書評　名著に親しむ

日本語でできる，表現論のさまざまな入り方

特集の目次を眺めるだけでも表現論というものにはさまざまな切り口があると感じられることだろう．

表現にもいろいろあるが，何よりまず群の表現であり，ガロアが群を提起して以来，群は問題を解くための道具であり，重要な応用は表現を介することが多い．19 世紀以来，結晶学や分子構造，さらには原子構造や素粒子論への応用が盛んで，表現論はむしろ数学外の関心のほうが高かったといえる．

理論の発展よりも応用からの要求の方が急だったせいか，近年に至るまで表現論だけの成書というものはなかった．そのため，表現論の名著というものは見当たらない．もちろん，表現論を扱っている名著ならばある．が，表現論を扱うにはかなりの準備が必要で，後半にならないと表現論が出てこないことが多い．

表現論が展開される群には大きく分けて，有限群とリー群がある．有限群の表現にしても，まず有限群の基礎知識が必要で，例えば M. ホールの『群論』(榎本他訳) 吉岡書店 (1969) でも，表現は終章近くにならないと登場しない．表現に出来るだけすぐに触れたければ，J.-P. セールの『有限群の線型表現』(岩堀，横沼訳) 岩波書店 (1974) が簡明で良い．その第 1 章は理論化学者の実用に供し得るように書いたとあり，発展途上の表現論が応用を強く意識していたことが窺われる．

量子力学への応用としては，ワイルの『群論と量子力学』(山内恭彦訳) 裳華房 (1932) が古典だが，日本語が古くて読みにくい．

リー群論といえば，シュヴァレー『リー群論』(齋藤正彦訳) ちくま学芸文庫 (2012) とポントリャーギン『連続群論』(柴岡、杉浦、宮崎訳) 岩波書店 (1957,1958) があげられる．ともに我々の世代の青春の書であり，精読に値する．位相群を深く調べることでリー群に行きつき，表現論を用いてコンパクト・リー群の分類まである．後者に述べられているポントリャーギン双対性は，後に淡中忠郎によりアーベル群でないコンパクト群に拡張され，さらに辰馬伸彦により局所コンパクト群にまで拡張された．その辰馬による『位相群の双対定理』紀伊國屋 (1994) は少し手強いかもしれない．

また，リー群一般でなく，個別に重要な群の表現を具体的に知っておくことも大切なことで，ランクの小さい群ながら，一般論的な視野を持ちつつ，リー環との関係も含めて表現を丁寧に紹介してある山内恭彦，杉浦光夫『連続群論入門』培風館 (1960) は，長い間日本語での唯一の表現論の入門書であった．

リー群は対応するリー環の簡約，半単純，単純，可解，ベキ零，可換などという代数的性質により分けられ，また，定義体が実数か複素数かによっても大きく異なり，それ以外の体の場合は代数群として位置づけられ，その表現論は特に整数論において大きな役割を果たすことになる．

まずはリー環の表現というなら，日本語ではないが J. E.Humphreys の Introduction to Lie algebras and representation theory(Springer,1973) が読みやすい．

個別の群ならまずはワイルの『古典群－不変式と表現』丸善出版 (2004) で，じっくり読む余裕があるなら是非にも読むと良いが，かなり手強い．ほかに，例外群の表現が具体的に詳しく書かれている横田一郎『群と表現』裳華房 (1973) もある．ともに目的を持ってから手に取る方がよいだろう．

半単純群の表現論は膨大な理論になっているが，ベキ零群の表現の軌道法も知っておくとよい．これには，藤原英徳『指数型可解リー群のユニタリ表現－軌道の方法』数学書房 (2010) がある．

21 世紀になって，読み始めやすい 2 冊の表現論の入門書が出た．右のページの下の 2 冊である．こういう入門書が書かれたということは，日本の表現論研究の成熟を表す精華であると言ってよい．読み始めやすいとは言ったが，読み通しやすいわけではない．挫折しても，繰り返し挑戦してほしい．そうするだけの価値のある良書である．

- 山内恭彦，杉浦光夫『連続群論入門』新数学シリーズ (1960) 培風館

  素粒子論の役に立てるには回転群だけでは足らないという物理学者の要請で書かれた．リー群の一般論を踏まえながら，ローレンツ群，さらに $SU(2)$ と $SL(2)$ の表現が丁寧に述べられている．リー群とリー環との対応や，リー環の表現から作られるリー群の表現についても，具体的な計算を伴った解説がある．リー群の表現論の一般論を確認する例は本書の中で見つかるだろう．

- ヘルマン・ワイル『古典群ー不変式と表現』(蟹江幸博訳) 丸善出版 (2004,2012)

  群の不変式を求める個別な努力が，コンパクト群の行列表現に発展し，さらに一般のリー群の表現論へ向かうとき，線形代数の基礎づけを振り返り，古典群をはっきりした対象とし，それらの不変式を求めるという立場の中で，指標の理論を確立し，ワイルの指標公式などを導いたもの．ユニタリ・トリックの適用範囲での表現論，不変積分，双対性など，表現論のルーツがここにある．

- 平井武『線形代数と群の表現 I，II』すうがくぶっくす 20,21，朝倉書店 (2001)

  大学の初年級の線形代数と微積分以外の予備知識は一切いらず，群の定義から始めて，多彩な群の例，表現論を考える理由から豊富な表現の例，ユニタリ表現，非ユークリッド幾何や力学，相対性理論，電磁気学，量子力学への多様な応用，最後には素粒子の坂田モデルまで行き着く．所々に，線形代数や微積分の表現論から見た振り返りが入る．これ一冊で表現論とは何かがわかる．

- 小林俊行＋大島利雄『リー群と表現論』岩波書店 (2005.4)

  線形代数と微積分を基礎知識としつつ，必要な知識は随所に丁寧な解説がある．位相群の表現論から始め，リー群・リー環・等質空間・同変ファイバー束を初歩から詳述．有限次元表現のカルタン・ワイル理論，ボレル・ヴェィユ理論を論じ，無限次元ユニタリ表現の構成の基本的考え方まで紹介．辞書のようにではなく，通読して欲しいと著者は思っているし，それは可能である．

参考文献

1) ヘルマン・ワイル『群論と量子力学』(山内恭彦訳) 裳華房 (1932) Gruppentheorie und Quantenmechanik , H.Hirzel, Leipzig(1928, 1931)
2) ファン・デル・ヴェルデン『量子力学における群論的方法』(間瀬正一訳) 養賢堂 (1998). *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, (1928, 1932)
3) ウィグナー『群論と量子力学』(森田正人, 森田玲子訳) 吉岡書店 (1971) *Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg Verlag, Braunschweig(1931).
4) ヘルマン・ワイル『古典群－不変式と表現』(蟹江幸博訳) 丸善出版 (2004,2012) The Classical Groups: Their Invariants and Representations, Princeton Univ.Press, by Hermann Weyl(1939), 原著第 2 版 (1946), 増補版 (1953)
5) シュヴァレー『リー群論』(齋藤正彦訳) ちくま学芸文庫 (2012) Claude Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press(1946).
6) L.S. ポントリャーギン 『連続群論　上下』(柴岡、杉浦、宮崎訳) 岩波書店 (上 1957, 下 1958), *Topological Groups*, Princeton University Press(1939).
7) ゲリファント, シーロフ『超関論入門 I,II』(功力金二郎＋井関清志他訳) 共立全書 526,529、*Generalized Functions*, by I.M.Gel'fand and Silov(1958, 1964-) 1:性質と演算,2:超関数の空間, 3:微分方程式論, 4:調和解析への応用 (with Vilenkin), 5:積分幾何と表現論 (with Graev, Vilenkin), 6：表現論と保型関数 (with Graev, M. I.; Pyatetskii-Shapiro)
8) 山内恭彦, 杉浦光夫『連続群論入門』新数学シリーズ (1960) 培風館
9) 彌永昌吉・杉浦光夫、応用数学者のための代数学、岩波書店, 1960.
10) ホッホシルト『リー群の構造』(橋本浩治訳) 吉岡書店 (1972) The Structure of Lie Groups, by G.Hochschild(1965)
11) J.P. セール『有限群の線型表現』(岩堀長慶, 横沼健雄訳) 岩波書店 (1974), *Representations lineaires des groupes finis*, by Jean-Pierre Serre(1967, 1972).
12) 横田一郎『群と表現』基礎数学選書 10, 裳華房 (1973)
13) Serge Lang, "$SL_2(R)$", Addison-Wesley Publishing Company, Readnig, Massachussetts(1975)
14) James E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973, Second printing, revised. 1978.
15) 岡本清郷『等質空間上の解析学–リー群論的方法による序説』紀伊國屋数学叢書 19(1980)
16) 岩堀長慶、対称群と一般線形群の表現論、岩波講座基礎数学、 岩波書店 (1980 年頃)
17) 永尾汎, 島津行男『有限群の表現』数学選書８、裳華房 (1987)
18) M. Sugiura, Unitary representations and harmonic analysis – An introduction – (2nd ed). North-Holland Mathematical Library 44, North-Holland, 1990.
19) 神保道夫『量子群とヤン・バクスター方程式』シュプリンガー現代数学シリーズ、シュプリンガーフェアラーク東京、1990
20) 辰馬伸彦『位相群の双対定理』紀伊國屋数学叢書 32(1994)
21) 平井武『線形代数と群の表現 I, II』すうがくぶっくす 20,21, 朝倉書店 (2001)
22) 谷崎俊之『リー代数と量子群』共立叢書, 現代数学の潮流 (2002)
23) 小林俊行＋大島利雄『リー群と表現論』岩波書店 (2005.4)
24) 藤原英徳『指数型可解リー群のユニタリ表現－軌道の方法』数学の杜１, 数学書房 (2010.12.10)