多面体を編む

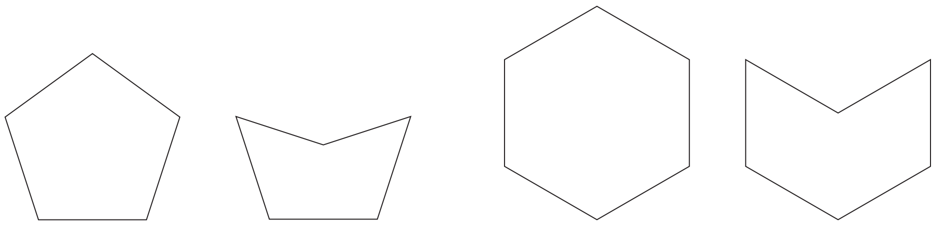
蟹江幸博

●物体（モノ）の形

私たちが生きているこの世界が，空間として 3 次元であることはよく知られています（空間が 3 次元であることの意味が，ポアンカレ『科学の価値』(吉田洋一訳，岩波文庫）の第一部第四章に詳しく説明してあります）．物体が何でできているかという問題は物理学の守備範囲ですが，幾何学では物体（モノ）の形自体が考察の対象なのです．つまり，3 次元の幾何こそが本来あるべき幾何学なのです.

（0 次元の）点が動いて曲線を作り,（1 次元の）曲線が動いて曲面を作り,（2 次元の）曲面が動いて空間の領域を作ります．真っ直ぐに動けば，曲線は線分に，曲面は多角形に，空間領域は多面体になります．真っ直ぐについては，考え始めると難しいのですが，今は分かっていることにして，真っ直ぐに動いたものだけを考えましょう．そうすると，線分は直線の一部であり，多角形は平面の一部になるので，平面（図形の）幾何になります.

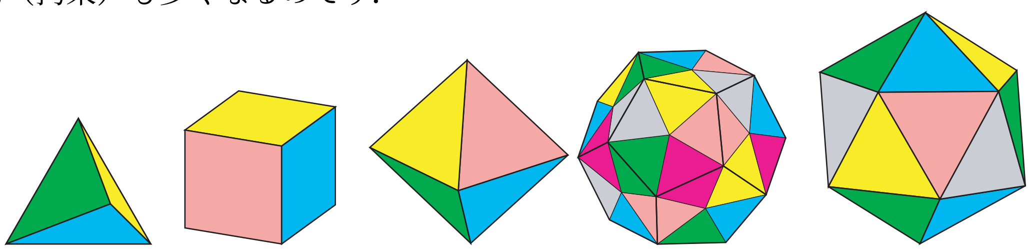
三辺合同定理により，三角形はその境界である辺（の長さ）によって定まりますが，$n \geqq 4$ であれば n 角形は辺の長さだけでは定まりません．正方形の頂点を蝶番にした模型を考えれば，パンタグラフのように動いて，長さの等しい 4 辺を持つ四角形は菱形としてしか定まりません．n が大きくなれば，辺の長さがすべて等しくても，形を指定することはできず，凸にならないことも起こります（図は $n = 5, 6$ の場合の例）.



さて，物体の形を表わす空間領域を考えましょう．形を私たちが認識するのは，その表面，つまり境界を知るということです．ここでは，その境界が多角形の集まりになっている多面体領域だけを考えることにしますが，それでも状況は十分に複雑なのです．

（平面）多角形の場合は，境界である辺の形が（大きさを含めて）与えられても，形はまったく決まらなかったのですが,（空間の）凸多面体に限れば，境界面が同じなら互いに合同になってしまうのです．それは既に 18 世紀に，コーシーが示しており，凸な多面体に対するコーシーの剛性定理が成り立ちます．この定理の証明はたとえば M. アイグナー，G.M. ツィーグラー著『天書の証明』(シュプリンガー・ジャパン）の第 11 章にあります．

多面体の方が多角形よりもずっと複雑であるにもかかわらず，どうしてこのようなことが起こるのでしょうか．次元が大きくなれば当然，飛躍的に多様性は増していきますが，構造の複雑さだからこそ，多面体をなすための制約（拘束）も多くなるのです．

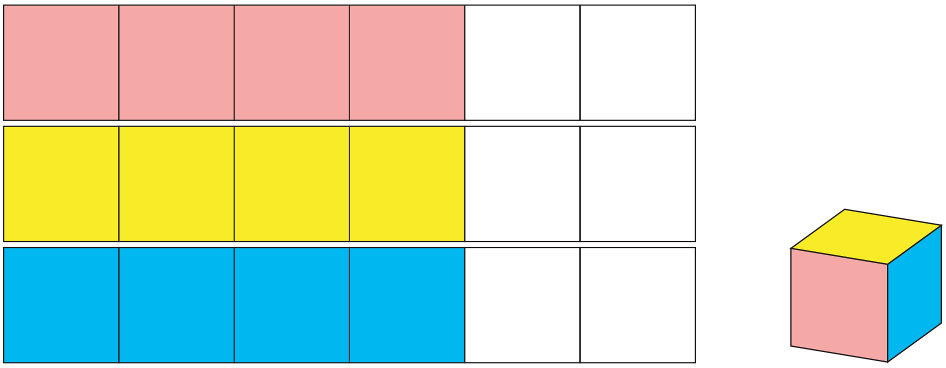


面がすべて合同な正多角形で，各頂点での立体角と各稜での平面角がすべ

て等しいという正多面体は，2000 年以上前のプラトンの時代から，たった 5 種類しかないことが知られています（上図）.

●多面体の構造を編み紙を使って感じとる

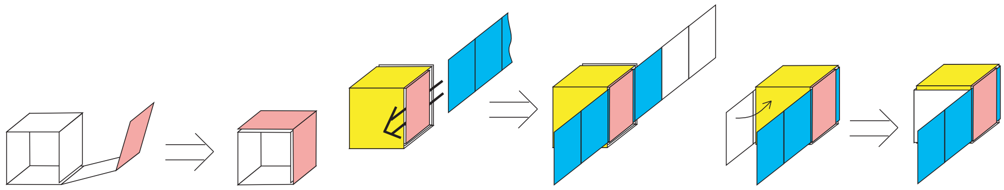
子供たちに一番馴染みのあるのは立方体で，立方体の展開図は教材としてもよく知られています．立方体の面を固定して，中身を吸い出し，平面に展開できるように適当な仕方で稜を切り離すと，展開図が得られます．展開図は 6 個の正方形がつながった多角形になりますが，6 個の正方形をどう繋げても，立方体の展開図になるわけではありません．例えば，下の図のうちの 1 つの帯（長方形）は 6 個の正方形がつながっていますが，立方体の展開図にはなりません.



しかしこの帯を使った方が，展開図よりも立体としての立方体の構造が，むしろよくわかるのです．ただし，帯は 3 本使います．切り取って，線をすべて山折りにして，面角を直角にして，白い面を内側に隠すようにすると，上下の底面のない筒が得られます．サイコロを机の上に置いて，机から離さないように動かせば，クルクルと回ります．これは上下の底面の中心を結ぶ直線のまわりの回転に当たります.

3 つあることで 3 次元の図形が得られるのです．3 つの筒を作って，たとえば，赤色の筒を黄色の筒の中に入れ，黄色の筒を青色の筒の中に入れて，同

時に青色の筒が赤色の筒の中に入っているようにしてやります.



1つの作り方のポイントを上に図示しておきましたが，作り方は一通りではありません．ちゃんとできているかどうかは，すべての頂点のまわりに異なる3色の面が集まっていることで確かめられます．組合せるだけで，びっくりするほどしっかりした立方体が出来上がります.

通常の基本的な技法は，組み紐を組むように，編み物を編むようにすることであり，隣り合ったものの上下を交換していくことです．それで，こういう技法を編み紙と呼ぶことにしました．もちろん，上の立方体も編み紙的に作ることもできます.

糊は一切使いません．糊の代わりをするのは白い正方形の部分です．重なり合った紙が崩れないのは摩擦によるのですが，だからこそ，きちんと作らなければいけません．白い部分は最終形では外に現れませんが，内部でしっかりと立方体の形を支えているのです.

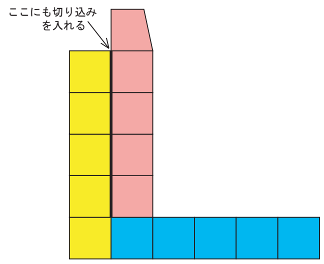
編み紙的に作り上げていくなら，面に印があった方が作り易いでしょう．例えば，赤黄青の各帯の左から2番目と4番目の正方形に，順に1,6,2,5,3,4と，サイコロの眼を表わす模様を書いておけば，重ねるときの目安にもなるし，サイコロが出来上がるのも子供には嬉しいでしょう.

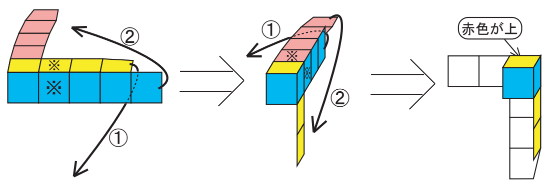
●展開図と比べる

展開図では，立体としての構造とは関わりなく，平面に展開する都合だけで切り離す稜を決めます．立体を再現する場合，図形とは別の手段で，つまり糊やテープなどでくっつけなければならず，キレイにくっつけるという作業が児童生徒には難しいということと，うまくくっついたとしても，糊であればの水分で歪んできたり，テープが必要のないところをくっつけたりして,

形を保つことが難しいようです．しかし，編み紙で上手く作られたものは，余り劣化しません．さらに，物理的にくっついていないので，何度でもやり直すことができます．そのことによって，生徒が自分の納得の行くまで挑戦したり，吟味したりすることができます．

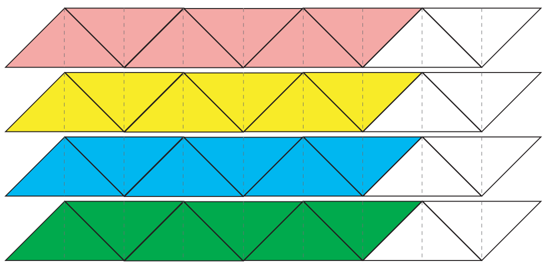
展開図は全部がつながった１つの多角形ですが，編み紙はばらばらになっているので，最初に重ね合わせる部分を選ぶという手続きが増えます．それが嫌なら，つながった台紙も作れます（下の左図）．

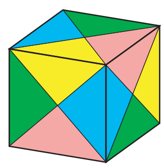




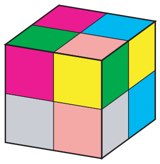
右の図を見れば，作り方のポイントは分かるでしょう．つながっていることで却って，立方体の構造は先の３本帯の編み紙より分かりにくくなっています．

立方体には別の対称性もあります．立方体の頂点を通る対角線のまわりの回転で，それが４本の帯からなる台紙に対応しています（下の左図，出来上がりは右図）．以降，作り方は省略します．





また，面対称を反映した編み紙の台紙を作ることもできます．



現在作成済みの編み紙の台紙には，5 種類の正多面体，4 種類の星型正多面体とそれらの複合多面体を 6 種類，さらに，13 種類の準正多面体とその双対多面体，4 種類の星型正多面体，53 種の星型準正多面体のうち 8 種，92 種のジョンソンの立体のうち 45 種，5 種類のダ・ヴィンチの星などがあります．同じ台紙で，凸な多面体と凸でない多面体が出来ることもあり，それを合わせて空間充填図形を作ることもできます．任意個の穴の空いたトーラスを作ることができます（実作は穴の数が 3 まで）．

台紙が欠けているのは構造が複雑だからですが，幾何的な困難というより物理的な困難が表面化するためであることが多いのです．重ね合わせが増えると紙の厚さが効いてきて立体の形を損なうことと，A4 の紙に印刷する都合上，面の面積が小さくなり器用さの限界を超えることが主な原因です．A3 紙へのカラー印刷が安価になれば，少しは後者は改善されますが．

構造が簡単な多面体の場合には，色々な台紙を作ることができます．たとえば，立方体の平面切断という教材がありますが，立方体を色々な平面で切断してできる双方の多面体を編み紙で作ることができ，別々に作ったものを合わせてみせるのも面白いものです．

正多角形を底面とする柱や錐などは台紙も簡単に作れるので，むしろ児童生徒に台紙を作らせてみるのもよいでしょう．易しいのと難しいのを少しずつ，出来上がりの立体を挙げておきますので試みて下さい．