三平方の定理を証明しよう

蟹江幸博

数学セミナー増刊，楽しもう数学!，日本評論社 (2011 年 9 月号)

三平方の定理は誰でも知っている．多分，誰でも知っている．そう思っていた．つい最近，それが実は，数学に親しみを持っている人なら，という限定をつけなければならないことを知った．少しゆったりと説明してみることにしよう．

さて，平方とは square という意味であり，文字どおりには三つの正方形の定理ということである．どんな正方形かと言えば，直角三角形の三辺の上に立つ正方形のことである．

直角三角形の直角を挟む二辺を cathetus と言い，残りの辺を斜辺 hypothenuse と言う．ラテン語である．cathetus の 2 辺は区別はされず，訳すのなら非斜辺とするしかない．

しかし，中国の数学用語では，三つの辺を短い方から勾股弦（こうこげん）と言って，区別する．辺の長さを $a < b < c$ とし，対する頂点をそれぞれ A, B, C とすると，斜辺 AB に対する角 $\angle ACB$ が直角である．三角形の内角の和が二直角なので，他の角は鋭角である（図 1 の辺と頂点の記号は固定しておく）．

さて，三平方の定理は，斜辺 AB を 1 辺とする正方形 $ABDE$ の面積が，他の正方形 $ACGF$ と $BCHI$ の面積の和になるということであり（図 2），辺の長さで表せば $c^2 = a^2 + b^2$ となる．

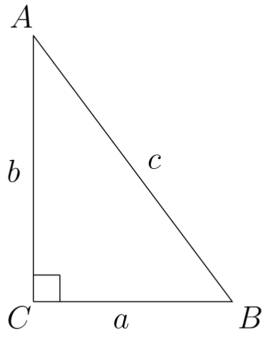

図 1

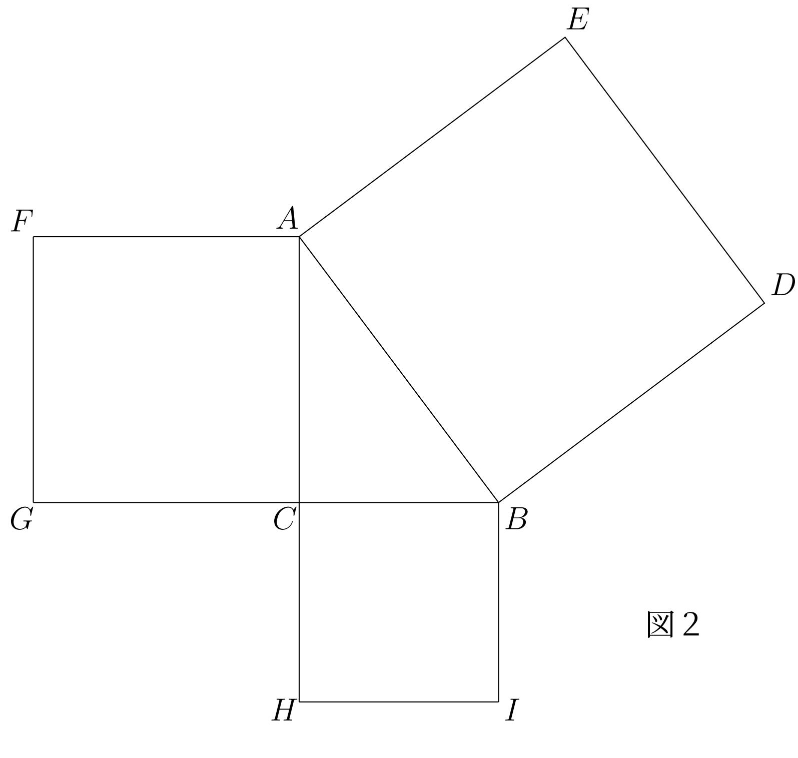

図 2

この定理は逆も成り立ち，直角を与えることにも使うことができる．とても重要であり，個々の具体的な場合には 4000 年程も前から知られていた．四大古代文明（メソポタミア，エジプト，インド，中国）は，おそらく独立にこの事実を知っていた．証明すべき定理という概念が生まれたのがギリシャなので，幾何の確立した事実を初めてまとめた紀元前 4 世紀のユークリッドの『原論』にも定理とし

て載っている．同じ文明の，紀元前 6 世紀のピュタゴラスが発見したとされ，ピュタゴラスの定理と呼ばれている．

そのユークリッドの証明を紹介しよう（図 3）．C から辺 ED への垂線の足を J，辺 AB との交点を K とする． 正方形 $ABDE$ を KJ で分割し，長方形 $BDKJ$ と $AKJE$ に分割する．そこで，長方形 $BDKJ$ と正方形 $BCHI$ の面積が等しいことを証明するために,，対角線 KD と CI で二等分し，三角形 BDK と BCI の面積が等しいことを示す.

$BD /\!/ KJ$ だから，$\triangle BDK$ と $\triangle BDC$ の面積は等しく，$BI /\!/ AH$ だから，$\triangle BIC$ と $\triangle BIA$ の面積は等しい．$BD = BA$，$BC = BI$，$\angle DBC = \angle ABI$ であり，二辺挟角の合同条件を満たすので，$\triangle BDC$ と $\triangle BIA$ は合同であり，面積は等しい．同じ議論で長方形 $AKJE$ と正方形 $ACGF$ の面積が等しいことが分かる．

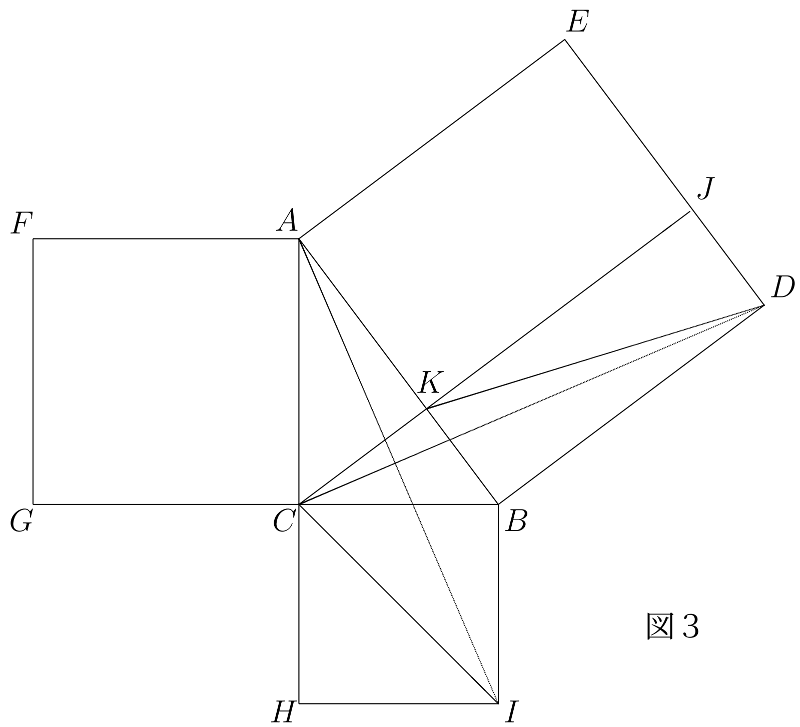

図 3

この証明は面積の等式を，三角形の合同定理と，三角形の面積の公式とから導くものである．実にきちんとした証明である．最初に発見されたときの証明がこのような形であったとは思われない．

実際，ピュタゴラスの証明と言われるものはもっと直観的であり，古代中国のものも同様である．直角三角形の非斜辺の長さの和を 1 辺とする正方形を考え，その中に 4 つの直角三角形を適当に配置すると，図 4 が得られる．三角形を塗りつぶすと，左では 2 つの正方形，右は斜辺を 1 辺とする正方形が浮き上がってくる．同じ正方形から，三角形を同じだけ取り除いたのだから面積は等しい．

このように，多角形または多角形の和集合 P と Q があったとき，いくつか合同な図形をくっつけて合同な図形が得られるとき，P と Q を**補充合同**であると言

う．上の場合，非斜辺を１辺とする正方形の和集合が P で，斜辺を１辺とする正方形が Q である．

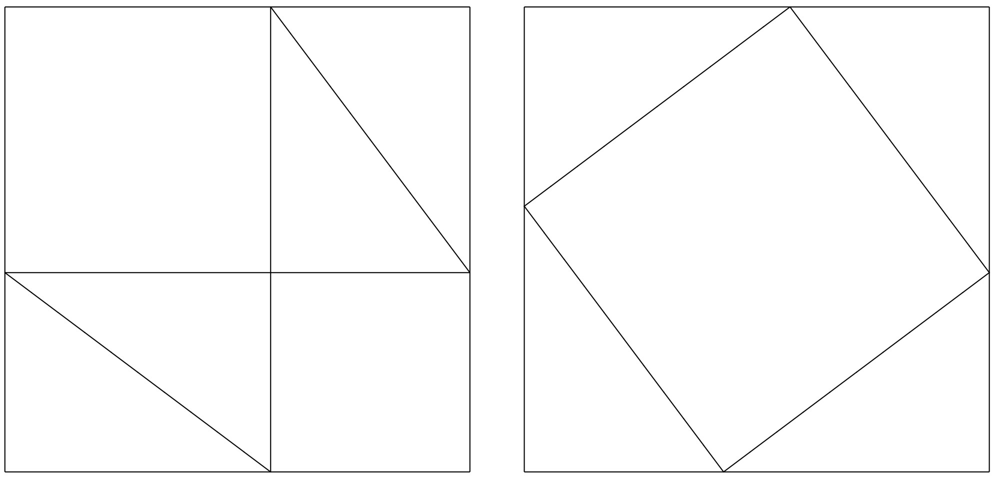

図４ピュタゴラス，中国

インドにもユニークな証明がある．バースカラという人の本には図５が描かれ,「見よ」と一言だけ書かれているという．これも定理の証明になっている．

見るだけで分かる人にはお節介だが説明をしておく．左図は斜辺を１辺とする正方形で，その内側に三角形を置くと小さい正方形が得られる．三角形２つで長方形を作り，縦横に並べて角に正方形を載せると右図になる．これをじっと見ると，非斜辺を１辺とする正方形を並べたものになる．小さい正方形の辺の長さが非斜辺の長さの差になっていることに注意すればよい．

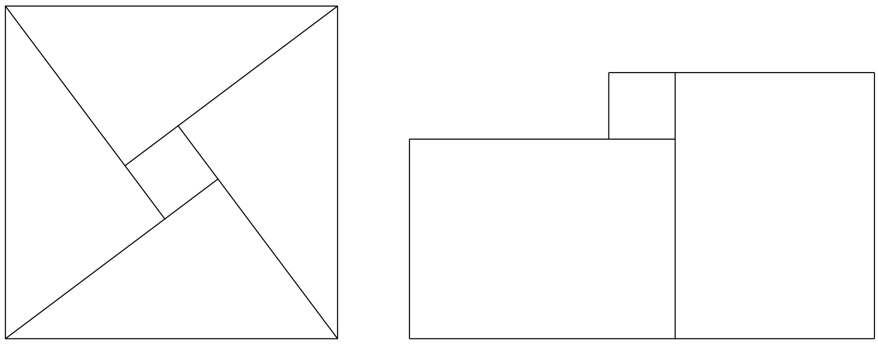

図５バースカラ

要するに，斜辺を１辺とする正方形を切り分けて，２つの正方形に組み合わせるということをしたのである．このように，いくつかの多角形を組み合わせて作られた多角形を互いに**分割合同**であると言う．

定理の幾何的証明は多く，分割合同や補充合同を示す，またそれらを組み合

わせることで行われる．そのため，はめ絵パズルのような証明も多く，代表的なものに図6がある．

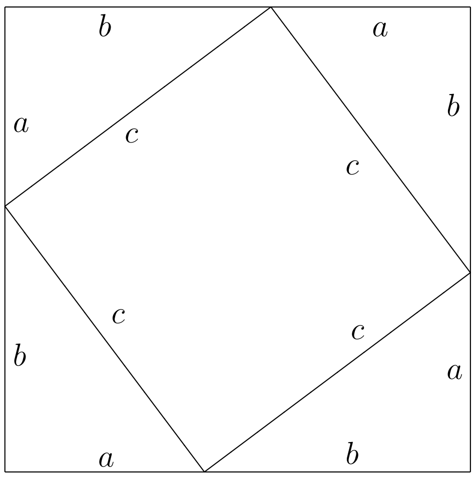

図4’

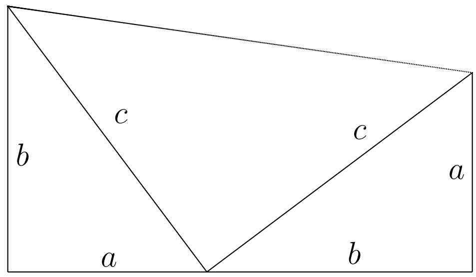

図4”

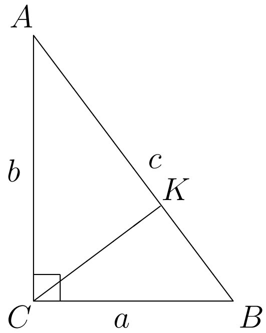

図7

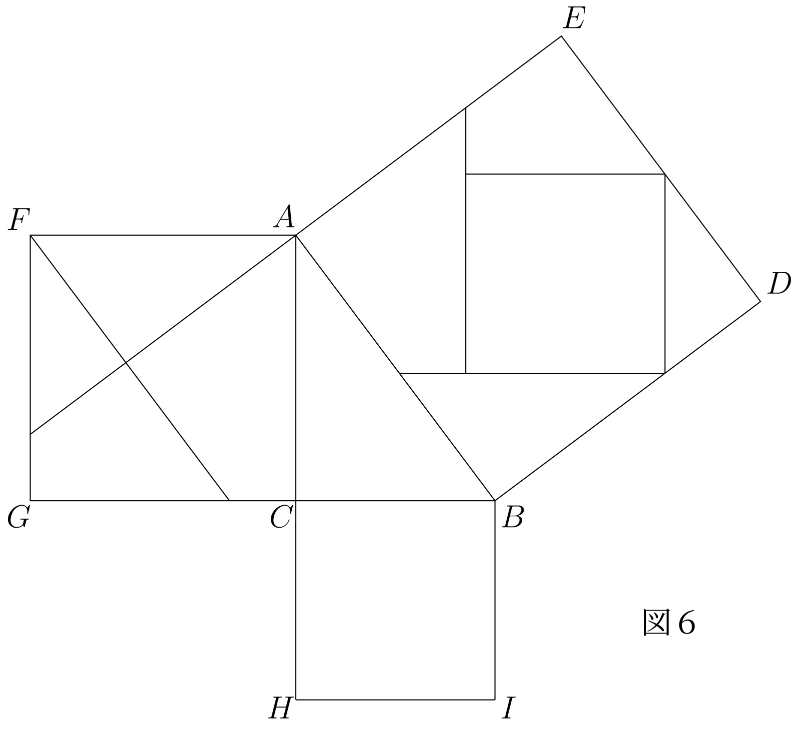

図6

EA の延長線と，F を通り AB に平行な直線によって，正方形 $ACGF$ を2つの三角形と2つの四角形に分割し，それらを正方形 $ABDE$ の各頂点に直角を合わせるように移動すると，その真ん中に正方形 $BCHI$ を移動させると，正方形 $ABDE$ がピッタリと埋まる．この証明が鮮やかなのは，分割するのが1つの正方形だけであり，移動が平行移動だけであることである．

この証明で，正方形 $ACGF$ を分割する,（ある範囲で）2本の直交線を平行移

動させると，異なる分割が得られるが，同じような証明ができる．

定理がユークリッド幾何の本質に関わっているため，他の仕事の副産物としても得られることがある．アルマゲストを書いて古代天文学を集大成したプトレマイオスには，トレミーの補題と呼ばれる重要な命題がある．三角関数の加法定理と同等な内容のものだが，円に内接する四角形に対して，「対辺の積の和が対角線の積に等しい」と表現される．これを円に内接する長方形に適用すると定理が得られる．

トレミーの補題は三角形の相似を使って証明されるので，もちろん相似を使ってもっと直接に証明することもできる．

図7は図3の一部だが，CK が AB への垂線になっているので，得られる3つの直角三角形はすべて相似である．$\triangle ABC \sim \triangle CBK$ だから，$AB : CB = CB : KB$ となり，$KB = CB^2/AB = a^2/c$ となることを示すものである．これはまさに，長方形 $BKJD$ の面積が正方形 $BCHI$ の面積と同じであることを示していて，ユークリッドの証明に戻る．

また，$\triangle ABC \sim \triangle ACK$ から，$KA = AC^2/AB = b^2/c$ が得られ，$AB = KA + KB = (a^2 + b^2)/c$，つまり，$c^2 = a^2 + b^2$ が得られる．線分の長さとしての立場 を貫いた証明になっている．

このほかにもいろいろな証明が知られており，多くの人がチャレンジしている．そういう努力を230個も集めた本が1927年に出版されている．著者のE.S.ルーミスは何冊も本を書いているが，『ピュタゴラスの命題』というこの本だけが今日も知られている．さらに88歳になる年の1940年に第2版を出したが，そこには371個の証明が掲載されている．1968年に米国数学教師協議会によって復刊されて以来刊行されていない．数十年前にその噂を聞いたが，本当に存在するかどうかも分からなかった．

ある時，本気で存在を確かめたら，存在することだけは分かった．中身も見ずに翻訳してみることを思い立って，何人かの出版社の編集者に話をしたが，実物を見た人さえ稀な本だから，中々話はまとまらない．ついに，ある編集者がゴーサインを出してくれ，本を手に入れ，翻訳に掛かった．日本評論社から出版される予定である．

ただ，本は天下の奇書と言うにふさわしく，また現在の数学の基準には達していない．もちろん掲載されている証明は間違っていない．すべて正しい．すべて異なっていると言ってよいのかが問題なだけである．

ルーミスによれば，中世に数学に関する修士号を得るには，ピュタゴラスの定理の新しい証明を提出する必要があったそうで，少なくとも異なる図から考察を始めれば異なる証明と認定したのだろうか．奇抜な証明が考案されるのももっともである．

ルーミスは証明を，代数的証明，幾何的証明，四元数的証明，力学的証明に分類しており，さらに三角法，解析幾何，解析学による証明を数えないという理由を述べている．後者の証明が前者の考察を踏まえているからだというのだが，そ

れを言うなら，前者の中の個数の数え方も問題になる．四元数的というのは実際にはベクトルと内積を使った証明ということで，四元数は使っていない．力学的というのも釣り合いを考えるということで，幾何的に分類しても構わないものである．

さらに，代数的と言っても，実は図形を描き，出てくる線分の長さを，a, b, c で表し，幾何的考察で得られる等式を変形して，$c^2 = a^2 + b^2$ を導くもので，最後まで幾何だけでやらないというだけのもののようである．

いくつか紹介しておこう．紙数がないのでヒントだけ示し，後は読者の楽しみに残しておこう．基本の図は図２と７である．

図７の考察では，比例式 $BK : CK = CK : AK$（$CK^2 = AK \cdot BK$）も得られるが，このとき CK は**比例中項**になると言う．ヨーロッパの教育の伝統の中では良く知られたもので，それを使う証明も多い．それらは代数的証明ということになる．

図３のユークリッドの証明では，長方形を対角線で２等分して考えたが，図８を使えば，直接に長方形のままでもできる．長方形 $BDJK$ と正方形 $BCHI$ は平行四辺形 $BCMN$ を介して等面積であることが分かる．

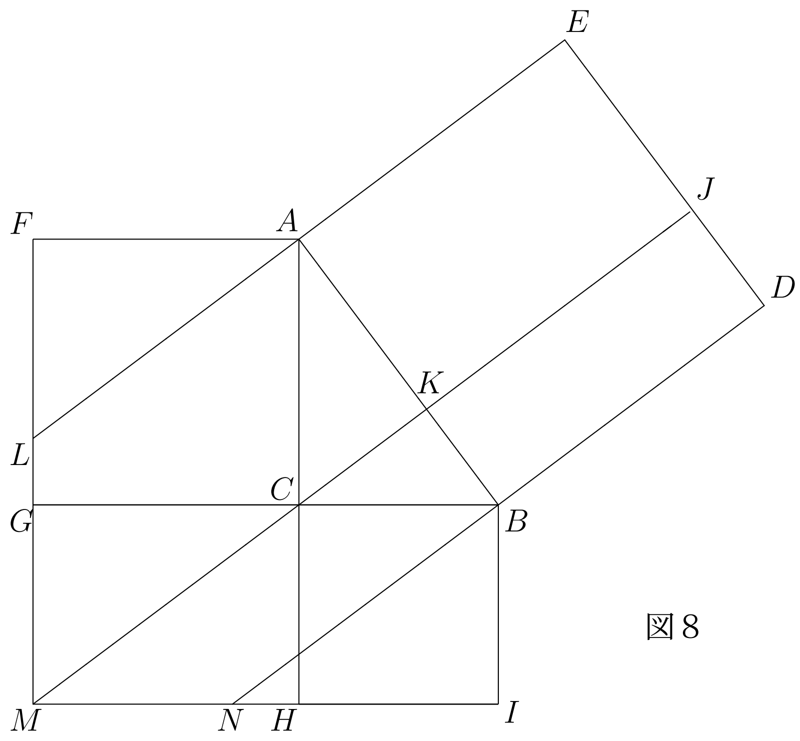

図８

図９がレオナルド・ダヴィンチの証明である．$\triangle EDP$ は $\triangle BAC$ を回転したものである．$\triangle HCG$ もこれと合同で，a^2 と b^2 の正方形に２つの三角形をくっつけた６角形 $ABIHGF$ と，c^2 の正方形に２つの三角形をくっつけた６角形 $AEPDBC$ が等積であることを言えばいい．それぞれ対角線 FI と CP で２等分したものが合

同になる．

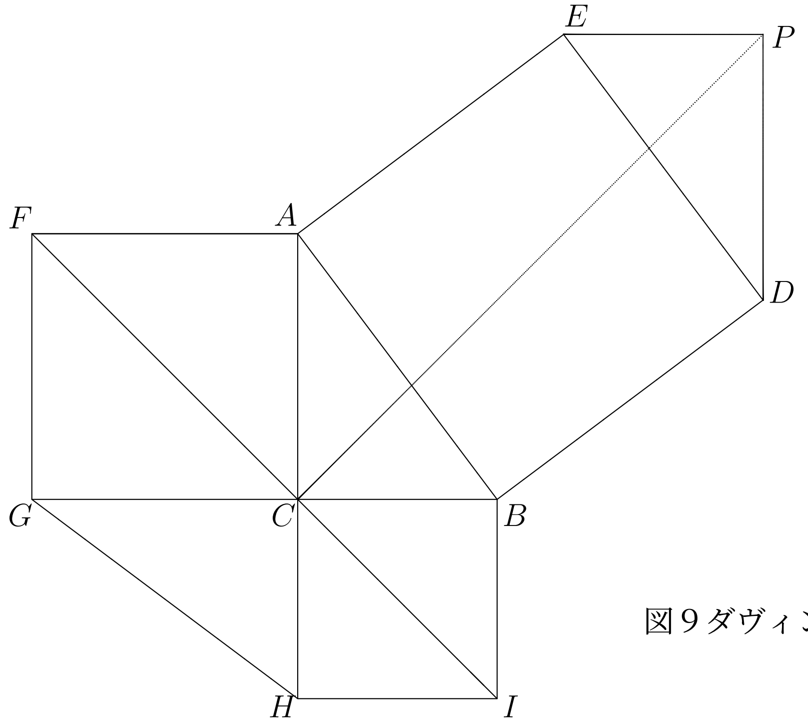

図９ダヴィンチ

図 10 がホイヘンスの証明．IBQ と FAR が直線で，$IB = BQ$, $FA = AR$ となるように作図する．QD を結ぶと，$\triangle BQD$ は $\triangle BCA$ を $90°$ 回転したものになり，四角形 $ARDQ$ は平行四辺形になる．したがって，3 辺合同定理により，$\triangle ABQ \equiv \triangle DER$ であることが分かる．その面積は正方形 $BCHI$ の半分で，$\triangle ABR$ の面積は正方形 $ACGF$ の半分である．一方，$\triangle DER$ と $\triangle ABR$ の面積の和が正方形 $ABDE$ の半分であることは，点 R から AB と ED に垂線を下せば，三角形の面積の公式からすぐに分かる．

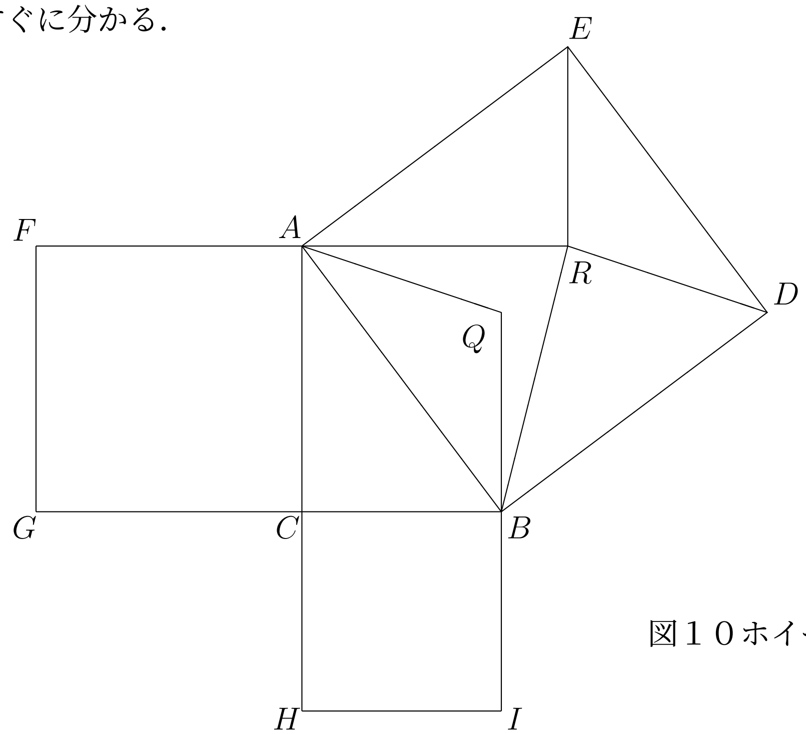

図１０ホイヘンス

アメリカの第 20 代大統領 J.A. ガーフィールドは就任して半年後に暗殺されたのだが，下院議員をしていた 1876 年頃，会議中に思いついたものとして有名な証明がある．

図 4' のように辺の長さを書き込めば，正方形の面積は $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab$ と計算され，$a^2 + b^2 = c^2$ が導かれる．ガーフィールドの証明は図 4' を半分にした図 4" で，台形の面積を計算したものである．これを別の証明だと数えないと，数百の証明ということにはならない．

円を使った証明も数多く，それにはライプニッツの証明と言われているものもある．図 11 は，BC を両側に延長し，B を中心とし，AB を半径とする半円を描き，交点に T と S と書いたものである．TS は直径だから，$\triangle ATS$ は直角三角形で，AC が TS への垂線になっているので，比例中項の関係で $AC^2 = TC \cdot CS$，つまり $b^2 = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2$ が得られる．

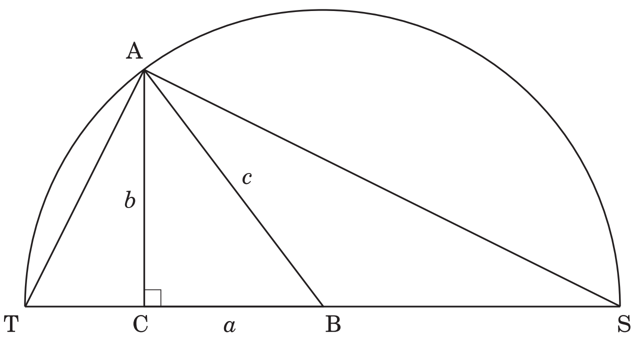

図 11　ライプニッツ

円に関係した長さに関する命題には，(1)「円内の任意の点を通る弦をその点で分割した 2 線分の長さの積は弦の取り方によらない」というものと，(2)「円外の任意の点を通る直線（円と交わるとき）の，2 つの交点までの距離の積は一定であり，接点までの距離の 2 乗に等しい」というものがあり，これもピュタゴラスの定理の証明に使うことができる．

(1) を使う証明は，図 1 で，B を中心とし半径を AB とする円を描く（図 12）．AC の延長線と円との交点を D とすると，$AC = CD$ となる．直線 BC と円との交点で，C の側の点を T，B の側の点を S とする．すると (1) が使えて，$TC \cdot CS = AC \cdot CD = AC^2$ となり，後はライプニッツの証明と同じである．

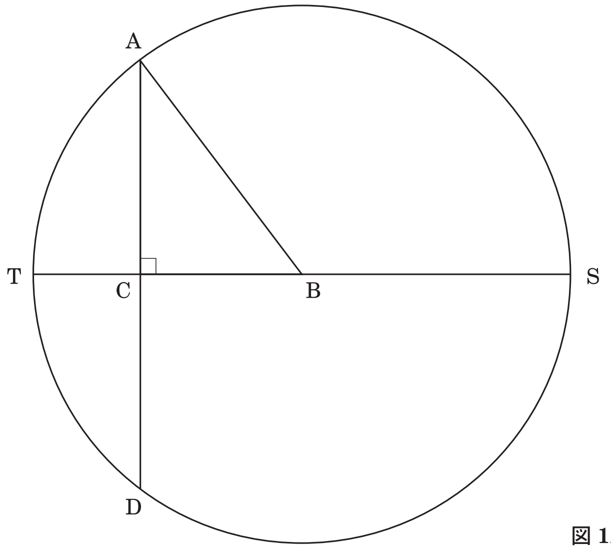

図 12

(2) を使う証明では，図 1 で，B を中心とし半径を BC とする円を描く（図 13）．円と AB との交点を P，AB の延長との交点を Q として (2) を使うと，$AC^2 = AP \cdot AQ = (AB - BP)(AB + BQ) = (AB - BC)(AB + BC) = AB^2 - BC^2$ となって，BC^2 を移項すれば終わる．

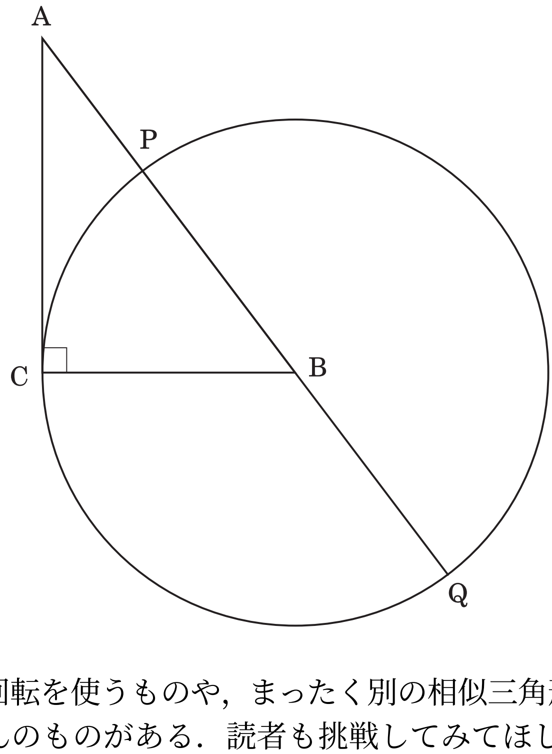

図 13

他にも，90 度の回転を使うものや，まったく別の相似三角形を作りだすといった方法など，たくさんのものがある．読者も挑戦してみてほしい．

また，http://www.cut-the-knot.org/ pythagoras/index.shtml というサイトには 90 もの証明が，時にはアニメーション入りで掲載されていて，楽しい．挑戦に疲れたら，覗いてみるとよいかもしれない．