『黄金分割について』

蟹江幸博

最近筆者は『黄金分割』(H. ヴァルサー著，日本評論社）というドイツ語の本を翻訳出版した．嬉しいことに好評なようで，すぐに増刷されている．高校程度の数学の知識があれば読めるように書かれているからだろうし，それでいながら話題が豊富で，140 枚ほども図があって，多角形の幾何や，フィボナッチ数列，フラクタル，折り紙などとの関係も述べられ，とても楽しい本になっているからでもあるだろう．上の写真はその表紙と，英語版の表紙である．日本語版の表紙に広重の浮世絵を用いたのは，英語版のモナリザの向こうを張ってみたのである．ダ・ヴィンチと広重の黄金分割の理解は，違っているようで，また同じようにも見える．ともあれ，そのことのお陰で，筆者にこの文章を書くようにという依頼が来た.「黄金分割と美」について考えることは筆者には荷が重過ぎるが，厳密な議論はこの本 [1] を見ていただくことにして，少しとりとめのない話をしてみよう．

さて，腕時計がテーマの本誌でも，黄金分割を取り入れたデザインの時計は美しいという文章を見かける．が，どこがどうだから美しいのだろう．言われたほどに美しいとは，中々思い難いものがある．そして,「分割」という言葉から，何を分割したのだろうと，不審な気分になるかも知れない．実は，ある意味で，西洋の美術や芸術の伝統の上に黄金分割の思い入れがあるからなのである．そうした思い入れの中で多少とも数学的に根拠らしきことが言えないか，考えてみることにしよう．

言葉の定義がはっきりしないまま，黄金分割という「美しい」言葉が独り歩きをしている．ヨーロッパ・ルネサンスの頃，美の規範が古代ギリシャに求められ，また「神聖分割」という言葉で飾られながら，主に宗教画の世界で意識的に用いられるようになった．それまでの宗教画は，宗教的な意義の重さが描かれるものの大きさに反映して，つまりほぼ比例して描かれていて，言うならばバランスの欠けた絵画が多かったのである．黄金分割をどう用いたかと言えば，たとえば図 2 のデューラーの自画像を見てみよう．デューラー自身，16 世紀の当時としては幾何学に詳しいことで知られていた．柳亮氏の著書 [2] の中で紹介されているように，描かれているパーツを分けるように，辺に平行な直線をいくつか引き，さらに得られる長方形の対角線を引いてみると，明確な意図が感じられるだろう．キャンバスの形は大抵は長方形であり，それをいくつかの長方形に分割し，さらに対角線も引いて，分割された領域に何をどのように描くかを考え，いわば絵画の設計図を作ることによってバランスのとれた造形が得られている．また，大き

な画面を描くときや，大量に多くの絵を描くときには，個人がというより工房という集団で描くものだったので，弟子たちに指示をするためにも，こうした割り出しは必要だっただろう．

しかし，その際，勝手な線を引くよりも，何らかの指針になるように引こうとするのは人情である．つまり,「綺麗な」形の長方形が色々な形で出てくるようにしたら良かろうということになる．そのもっとも良い形，それによる分割が，そもそもの黄金分割なのである．このことが,「分割」という言葉が広く用いられる理由なのだろうと思う．確かに，ルネサンス以降の西洋絵画には，意図的に崩した場合を除いて，バランスに欠けたものは現れて来ない．日本でも古く，飛鳥時代の仏像，たとえば法隆寺の釈迦三尊像などは，妙に均整がとれていない．しかし時代が下がると，たとえば能面（図３の面は黄金長方形の輪郭の中に，上下を黄金比に内分する位置に目がある）のような類いまれな均整美が生れてくる．それは，室町期に民間貿易が盛んになって，黄金分割の概念が伝播したからだろうと考えられている．茶室の結構，庭の造形，浮世絵の普遍性，いま極めて日本的と言われているものが，黄金分割を背景にしている節があるのは，文化というものを考えるとき，興味深いものがある．

振り返って考えてみれば，エジプトのピラミッド (図 4)，ギリシャの神殿 (図 5) など，日本人にも馴染みの深い外国の建造物の中には，なぜ美しいのかという理由がはっきりしないながら，見飽きることなく見続けることができ，深い感動すら誘うようなものがある．詳細に調べてみると，実はこの種の長方形が，意識的にか無意識にかは知らないが，用いられていることが分かっている．大きく複雑な構造物を作るには，何かしら細密な設計図が必要で，設計図は多種の長方形の組み合わせであり，重ね合わせにならざるを得ない部分がある．

美しい長方形とは，という議論の前に，長方形の形について数学の言葉で述べてみよう．易し過ぎるように見えるかも知れないが，辛抱して貰うことにする．図形が合同とは，移動して重ね合わせられるということだが，合同でない長方形の形が同じということはあり得る．数学の言葉では，それは相似ということである．多角形で言うなら，対応する角が等しく，対応する辺の比が等しいときである．これは，たとえば，同じ１つの図形を，近づいて見たり，遠ざかって見たりすれば，大きさは変わるが相似なように見えるだろう，ということから正当化される．

長方形はすべての角が直角で，2 組の対辺はそれぞれ同じ長さになっているので，辺の異なる（かも知れない）2 つの長さを与えれば，合同類が決まる．つまり，それが決まれば合同な長方形しか出来ない．そこで，図 6 に示すように，長方形の形は (a, b) で与えられるとしてよい．別の長方形が (a', b') で与えられるとして，それが相似であるのは $a : a' = b : b'$ という条件だが，それは $a : b = a' : b'$ と言い換えられる．そしてこれはまた，1 つの数に置き換えられる．$b' = 1$ とおいたときに，この関係式が成り立つ値 $c = a'$ は $a : b = c : 1$ を満たし，比例式の内項の積と外項の積が等しいことから，$bc = a \times 1 = a$，つまり $c = a/b$ となるが，これを

比 $a:b$ の値と言う．長方形の場合，この値が決まれば形が決まるということになる．ところで気を付けなければいけないのは，$a:b=b':a'$ であっても 2 つの長方形は相似であることである．長方形の 2 対の辺のうち，どちらを縦と考えるかということに当たるだけである．その場合には，$1/c$ が比の値として得られることになる．つまり,（線分の長さだから）$c>0$ として，c と $1/c$ は同じ形の長方形を表わすわけである．

実は，古代から主に建築や装飾品に関して，色々な形の長方形が用いられてきている．何を使うかによって印象が違っている感じがするのは面白い．図 7 にこれまで比較的多く使われたことのある長方形を並べてみた．どの長方形が一番美しいだろうか？

まず正方形．$c=1$ である．確かに均衡はとれている．美しいと言えなくもない．が，なぜか安定性に欠ける感じもする．縦から見ても横から見ても同じ形だが，それだからこそ心理的に不安定と言うか，つまり，転がっても同じ形だから，じっと見ていると意識下に転がらせてしまう心の動きが生れ，いわば見ていると「動き」を感じる不安定さかもしれない．

$c=2$ というのは正方形を 2 つ並べたもので，単一の長方形の美としては，いささか資格に欠ける点がある．じっと見ていると正方形 2 つに分かれて動き出すような気もしてくる．しかし，敷き詰めが必要な場合にはもっとも簡便かつ有効ということができ，日本では畳の形に用いられている．

ということなら，$c \geqq 2$ は大き過ぎるし，同じ理由で $c \leqq 1/2$ も小さ過ぎる．そこで美しい長方形の候補は $1<c<2$ の範囲で探すことになる．$c=3/2, 4/3, 5/3, 5/4, 7/4, \ldots$ などの有理数の場合は，作り方が簡単なので実際に使われることもあるが，突き詰めて考えれば正方形の組合せ図形なわけである．といって，何でもいいから選べといわれても困るだろう．そこで，平方根が 1 つという比較的簡単な無理数を考えることにしよう．

さて，$c=\sqrt{2}$ もよく用いられており，日本でも法隆寺など古代の建物や絵画には見受けられるようである．現代になって，この形の長方形は紙の国際規格として用いられている．A 判とか B 判とかいうものがそれである．たとえば A 判の全紙を A0 判と呼ぶ．ちなみに面積を $1\mathrm{m}^2$（平方メートル）としているので，辺の長さは $2^{1/4}\mathrm{m}$ と $2^{-1/4}\mathrm{m}$ である．この形の便利さは，長い方の辺を 2 つ折にすると，もとの長方形に相似になることであり，面積が $2^{-n}\mathrm{m}^2$ の相似な長方形が次々と得られることにある．このときの紙を An 判と呼んでいる．

$\sqrt{2}$ は辺の長さが 1 の正方形の対角線だから，どんな文明にでも自然発生して不思議ではない．しかし，2000 年以上も前から $\sqrt{3}$ や $\sqrt{5}$ を求めることができたのだろうかと心配になるかも知れない．が，$\sqrt{n}$ の作り方なら，テオドロスの螺旋としてちゃんと知られている（図 9：[3] p.240 参照）．テオドロスはプラトンの幾何学についての先生で，紀元前 5 世紀の人である．$\sqrt{n}$ が簡単に作れることを見てみよう．

n が 2 つの自然数の平方の和 $n=k^2+\ell^2$ であれば，直角を挟む 2 辺の長さ

が k, ℓ の直角三角形の斜辺として得られる．また，n が2つの自然数の平方の差 $n = k^2 - \ell^2$ であれば，斜辺の長さが k で，もう1辺の長さが ℓ の直角三角形の，残りの辺の長さとして得られる．すべての自然数 n は，そのどちらかでないときも同じ操作を2回すればよい．それは，ラグランジュによって，すべての自然数は高々4つの自然数の平方の和に書くことができるからである（[4] p.132 に，高校数学だけを予備知識とした証明を書いておいたので，興味があれば参照のこと）．

そういう事実を知らなかったとしても，幅が1の平行線を引いておけば，垂線を立てて円弧を描くという操作を行えば，順に $\sqrt{n}$ $(n = 2, 3, 4, 5, \ldots)$ を作図することができる．図9を見れば，容易に了解して貰えるだろう．

$1 < c < 2$ の候補としては $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ しかなく，$\sqrt{5}$ はもう $2 = \sqrt{4}$ より大きくなる．そこで，1との平均をとって $(1 + \sqrt{5})/2$ を考えてみると，$1 < c < 2$ の範囲に収まる．実はこれが黄金比である．τ と書く．黄金平均，神聖分割，神聖比率などの名前でも呼ばれているし，φ で表わされることもある．そして，このときの形の長方形を黄金長方形と言う．

こんな数合わせのような説明ではない，ちゃんとした定義が既に2400年以上も前に知られていて，ユークリッドの幾何学原論に書いてある．黄金比という言葉ではなく，外中比という言葉が使われている．第 VI 巻の定義3は，

「線分は，不等な部分に分けられ，全体が大きい部分に対するように，大きい部分が小さい部分に対するとき，外中比に分けられたといわれる」

というものである（[5] による）．このままでは分かりづらいので，図10で説明しよう．線分全体が AC であり，これを点 B で分割するのである．$AB > BC$ として，$AC : AB = AB : BC$ であるというのが条件である．全体を1とし，つまり $AC = 1$ とし，$AB = x$ とおくと，$BC = 1 - x$ であり，比例式を x だけで表わすと

$$1 : x = x : (1 - x) \quad \text{つまり，} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}$$

となる．この右の式が『黄金分割』英語版の表紙のモナリザに書き込まれているものである．分母を払えば，

$$1 - x = x^2 \quad \text{つまり} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

という2次方程式が得られる．この式こそが，黄金分割のすべてを内蔵しているのだ．「2次方程式を知らずして美を語る資格はない」と言うこともできなくはない．

さて，この2次方程式を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるが，線分の長さは正だから，正の根 $(\sqrt{5} - 1)/2$ が黄金分割の内分比である．この数を ρ と書く．内分比としたために1より小さくなっただけで，長方形の形としては τ と同じものを定めている．これには

$$\tau\rho = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

を確かめればよい．だから，τ も ρ も，ともに黄金比と呼ばれる．黄金分割とも呼ばれるので混乱が生れるのだが，黄金比にも 2 つあり，内分比 ρ で，また外分比 τ で分割するのを黄金分割と呼ぶ，と言った方が概念がすっきりする．また，$\tau - \rho = 1$ であるから，片方だけ覚えればよい．

日本人なら $\sqrt{5}$ の値は覚えているから，τ の値も簡単に求めることができる．つまり，$\sqrt{5} = 2.2360679774997896964\ldots$ は「富士山麓オーム鳴く」という暗記法で覚えているから，$\sqrt{5} + 1 = 3.2360679\ldots$ となり，それを 2 で割れば $\tau = 1.6180339\ldots$ となるのである．だから，$\rho = 0.6180339\ldots$ もすぐ分かる．日本人でいることが，ちょっと得した気分になる．

さて，黄金比の値は確かに厳密に定義されているが，しかし，それを辺の比に持つ長方形が美しいのだろうか？

黄金比を定義するために使った図 10 の線分を考えると，そこの x が（小さい方の）黄金比 ρ であった．そこで，線分 AC を 1 辺とし，もう一方の辺の長さが ρ の長方形を考える．黄金長方形である．この長方形には図形的にどんな性質があるのだろうか？　図 11 をじっと見て，さらにページを持って廻しながら考えてみよう．BB' に線が引いてあるからでもあるが，正方形 $ABB'A'$ を頭の中で取ったり付けたりしていることに気付くだろう．そう，長方形 $ACC'A'$ と $CBB'C'$ は相似なのである．確かめてみよう．辺の比が等しいという式は $AC : AA' = CC' : AC$ であるが，この式にわかっている値を代入すると

$$1 : \rho = \rho : (1 - \rho) \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

となる．これは ρ の定義方程式そのものである．つまり，黄金長方形とは，その中の最大の正方形を取り除いて得られる長方形が元の長方形と相似であるような，長方形のことだったのである．

で，なぜ黄金長方形が美しいのだろうか？　分からない．本当のところは分からないのだが，敢えて根拠を探してみることにしよう．

上の事実が黄金長方形の定義なのだから，それから離れた理屈を振り回すわけにはいかない．

およそ，モノの形というものは，1 つの方向からだけ見るものではない．前からも，横からも，後ろからも，もしかしたら上からも見るかもしれないわけである．そのとき，見る方向によって形の印象があまり変化するのは，心の働きとして落ち着かない．昔あったお化け煙突のように，見る方向によって，2 本になったり，3 本になったり，果ては 5 本にもなるというのでは，驚きをともなう楽しさということはあるけれど，すこぶる落ちつきに欠ける．それよりやはり，どこから見ても,「同じ形」とはいかないが，同じ印象を与えるものが落ち着くだろう．そして，モノをじっと見ていると，心理的に取り外しが効く 1 つの単位として正方形が見え隠れする．図 11 で言うなら，$A'C'$ を下方に置いて見るのと，CC' を下方に置いて見るのとでは，形としては違うものの,（無意識のうちに）正方形を取り外せば相似になって，同じ形を認めることになる．安定感が調和であり，心理

的には「あーあ，落ち着く」というわけである．それが美しいと思わせる理由なのではないだろうか.

黄金長方形を輪郭に持つデザインの腕時計は，そんなに安価なものではない，きっと，前からも横からも，ぐるぐる回して見とれるだろう．どこから見ても違和感のない，同じ印象を与えるデザイン．あーあ，落ち着く．あーあ，美しい.

ここで止めてもいいが，折角だから，最初に触れた，立体での黄金長方形の例を考えて見よう．パルテノン神殿の正面から見た輪郭が黄金長方形だというのは有名な話だが，デューラーの自画像のように色々線を書き入れることにすれば，$\sqrt{5}$ の比を持つ長方形も取り出せる．また，平面図，つまり空中から見た形は $\sqrt{5}$ 長方形だが，内部構造には黄金長方形が見つかる．鳥でもないのに上から見てどうなると思うかもしれないが，そこはそれ，人というものはそれを感知するだけの英知を備えているわけですよ．きっと.

さて，ピラミッドである．黄金分割のどんな話にも出てくるピラミッド．しかし，エジプト学の本を眺めて見ても，なかなか黄金分割という文字に出会わない．果ては，ピラミッドを作った王ごとに固有の傾斜角があるという話まであり，美しい形の典型とは言えないことになる．が，美しいと思われるピラミッドには黄金長方形が隠れていて，だから美しいのだということになって欲しいものである．そうなるかどうか，調べてみた.

誰もが知っているのはギザの三大ピラミッドであり，3 つ並んだ写真は日本人にもよく知られている（図 4）．すべて正四角錐で，底面の正方形は正しく東西南北を向いている．確かに感動ものである．大きい方からクフ王，カフラー王，メンカウラー王のピラミッドと言われているが，この 3 つは 1 セットとして企画されたものだろうと吉村作治氏は言っている．正四角錐の形のピラミッドはメルと呼ばれていて，イアルと呼ばれていた階段ピラミッドとは区別され，真正ピラミッドとも言う．その中でもギザのものは美しいと考えられている．そこで，この 3 つについて調べてみる.

まず図 12 を見て，正四角錐の形を決める数を考えよう．底面の正方形 $ABCD$ の 1 辺の長さを a とし，頂点 O からの高さ OH を h とすると，$a : h$ の比が同じ正四角錐は相似になる．また, これが決まれば，正方形の 1 辺からピラミッドに直面したときの輪郭の長方形の形が決まるといってもよい．もちろん，原理的には無限遠方から見た場合のということではあるが．数学的には正 8 面体の上半分という正四角錐の方が端正に思えるが，そのときは簡単な計算で $a/h = \sqrt{2}$ であることが分かる.

正四角錐の側面の傾斜角というのは図 12 の θ のことであって，比 $a : h$ が決まれば $\tan\theta = h/(a/2) = 2h/a$ によって定まる．もちろん，逆に傾斜角が決まれば比が決まる．現在では，傾斜角 θ も周長 $4a$ もかなりの精度で計測できるが，高さ h は推測値に過ぎない．砂や岩砕を取り除き，基部を露出させても，創建当時の形については，基本的には想像するしかない．クフ王のピラミッドは頂部が失

われて，現在201段だが，創建時は210段だったことが知られている．が，写真でもわかるように，カフラー王のピラミッドでは，頂上近くに化粧石が残されていて，創建時を想像することはできなくはない．その上での推測値である．

参照する本ごとにデータが違うと言ってもよいほどで，どの数値を基準に考えればよいか分からない．取り敢えず，3つのピラミッドのデータが1冊の本の中に書いてあることから，[8] を採用して，記載されている値 a, h, θ を表にすると，

	底辺 a	高さ h	傾斜角 θ	$2a/h$	$4\cot\theta$
クフ王	$230m$	$147m$	$51°52'$	3.1294	3.1402
カフラー王	$210m$	$136.5m$	$53°10'$	3.0770	2.9960
メンカウラー王	$108.5m$	$66.5m$	$51°20'$	3.2632	3.2008

となる．

見かけの輪郭が黄金長方形になって欲しいということなら，a/h が τ に非常に近いことが望ましい．分かり易い値は τ より $2\tau = 1 + \sqrt{5} = 3.2360679$ なので，$2a/h = 4\cot\theta$ を計算してみる．それが右の2つの欄である．右上角の数値には何とも妙な気分になる．実は，19世紀に大いに話題になったことに，クフ王ピラミッド，円周率の謎というものがあった．当時の a, h の計測値では $2a/h$ が3.144 になったそうで，古代エジプト人は円周率を知っており，さらにはピラミッドを作ったのは神の使者だという主張まであったのである．長い距離を測るには，現在でも電子機器を使わないなら，計測輪を転がして測るわけで，実は計測輪と思われるものが描かれている絵が残っているそうである．それなら，円周率が現れても不思議はない，とこれは吉村氏の受け売りである．

もちろん，傾斜角もピタッとどこでも同じなわけではなく，吉村氏の [7] によれば，クフ王のピラミッドの傾斜角は $51°49'42"$ と $51°51'39"$ の間にあるという．あの大きさのものでは凄い精度だと思うが，その値の幅の中にある $51°51'15''$ をとれば $4\cot(51°51'15'') = 3.1415709$ となって，これはもう円周率そのものである．それでは黄金長方形は現れないかといえば，そうでもない．メンカウラー王のピラミッドでの，本来は一致すべき $2a/h$ と $4\cot\theta$ の平均値は 3.2320 となって，むしろ 2τ の方に近い．

最大の真正ピラミッドであるクフ王のピラミッドには，作り方から円周率が反映してしまったが，メンカウラー王のピラミッドになると形も洗練され，黄金長方形の輪郭を持つようになったと，言うのはこじつけに過ぎるだろうか．ともあれ，そのような輪郭が意識されるのは，ある程度離れた場所から見るときに限るのである．

古代エジプトのヒエログリフを解読したシャンポリオンが，ギザを訪れたときの印象を日記にこう綴っている（[6]）．

「それに近づくにつれて，この巨大な建造物の印象が弱まることに，私同様，誰しも驚くことだろう．この遺跡を50歩の距離で見たとき，驚きもなく，何というか期待はずれの感じだった.... 接近するにつれ威厳は失われ，積み上げられた石

は小さな瓦礫にしか見えなくなる… 近くで見なければよかったと悔やむばかりである.」

　黄金分割は美しいか？　考えるほどに分からない.

参考文献：

[1] H. ヴァルサー著『黄金分割』（蟹江幸博訳）日本評論社 (2002).

[2] 柳亮著『黄金分割　正続』美術出版社 (1965, 1976).

[3] ハイラー，ワナー著『解析教程上』（蟹江幸博訳）シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997).

[4] ア・ヤ・ヒンチン著『数論の３つの真珠』（蟹江幸博訳）日本評論社 (2000).

[5] 『ユークリッド原論』（中村，寺坂，伊東，池田訳）共立出版 (1971).

[6] レスリー・アドキンズ，ロイ・アドキンズ『ロゼッタストーン解読』（木原武一訳）新潮社 (2002).

[7] 吉村作治『痛快！ピラミッド学』集英社インターナショナル (2001).

[8] 仁田三夫編『図説古代エジプト１［ピラミッドとツタンカーメンの遺宝］篇』河出書房新社 (1998)

図のキャプション

図番号なし：H. ヴァルサー著『黄金分割』の日本語版と英語版の表紙

図１：デューラーの自画像の構造解析図（出来ればカラーの図を用意して,『柳正』154 ページにあるもののように線を書き入れる．その際 φ という書き込みを ρ にする.）

図２：法隆寺の釈迦三尊（不均衡さがわかりやすい写真がよい）

図３：すっきりした能面：例としては『柳続』の 54 ページや 56 ページにあるもののような感じのものがいい．探して下さい．キャプションはもちろんその能面の名前

図4：ギザのピラミッド（有名な３つのピラミッドが斜めに並んでいる角度の写真がいいでしょうが，なければ美しさで選んでください.）

図5：アテネのパルテノン神殿（遠景の方がいいでしょう）

図6：簡単な長方形の図，辺の長さが a , b であるという指示がついただけのもの：その右横に縦が 1 で 横が c の長方形で，左に描いた a, b の長さのものと相似なものを描く.

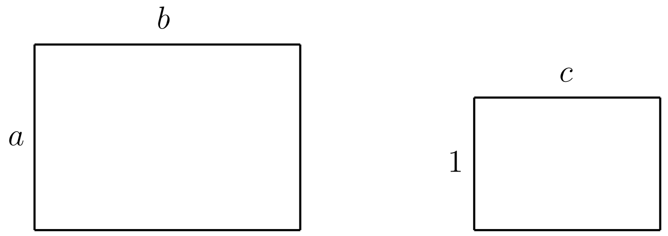
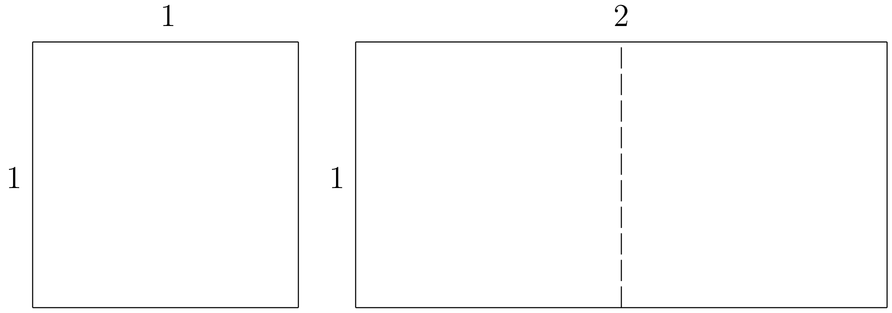


図7：以下の形の長方形を並べてください．できれば横長のほうがいいですが，紙幅との関係で縦長でも構いません．しかしその場合，記述が若干変わってくるので，早めにお知らせください．以下では，縦の長さを1として，横幅で指定します．もちろん，それぞれの図の下に以下のものをキャプションとする．図は一応大きくして描いておきました．1列に並んで不自然でないなら，並んでいたほうがいい.

(a) 1（正方形）　(b) 2　(c) $\sqrt{2}$　(d) $\sqrt{3}$　(e) $\tau = (1+\sqrt{5})/2$.



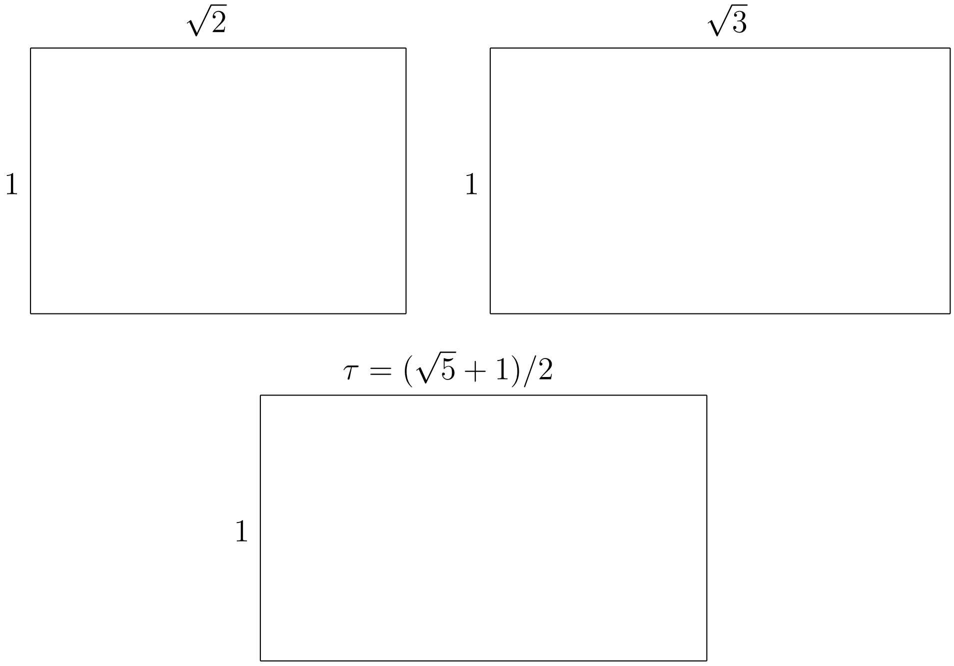


図 8：キュレネのテオドロスの螺旋（Fax を別送しました．綺麗に取れなければ，[3] p.240 から取って貰ってもいいと思うけど，トレースし直すのでしたら，左の図の直角の指定は，原図のように円弧でなく，直角のカギにして下さい）

図 9：Fax からトレースし直すのでしたら，参考のため，eps ファイルなら送ることはできます.

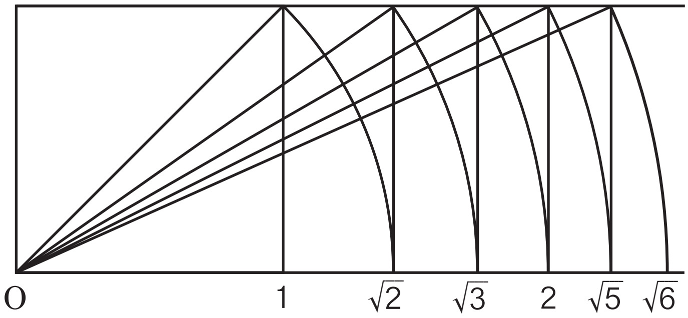


図 10

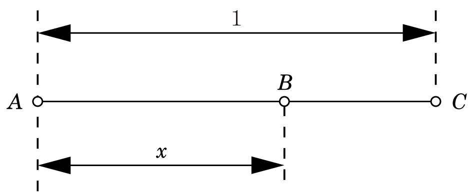


図 11

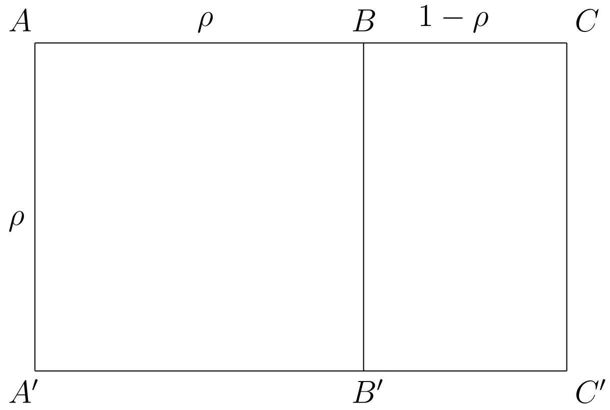


図 12 はそちらで描いてもらっている正四角錐の線図.