有限と無限の狭間：略解

蟹江幸博●三重大学教育学部

演習 9 正数 $h > 0$ と整数 n に対して，不等式

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh \qquad (n \geqq 1)$$

が成り立つ．

例解． これは本文に述べたので，2 項定理の後に述べた 2 次の不等式

$$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{(n-1)n}{2}h^2 \qquad (n \geqq 2)$$

を同じようにして証明して置く．

$n = 2$ のとき，両辺とも $(1+h)^2$ となって成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定して，

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \\ &\geqq (1+h)(1+kh+\frac{(k-1)k}{2}h^2) \\ &= 1+(k+1)h+(k+\frac{(k-1)k}{2})h^2+\frac{(k-1)k^2}{2}h^3 \\ &\geqq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2\end{aligned}$$

を導けばよい．

演習 10.

(1) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が有限の値 a と b に収束し，すべての n に対して，$a_n \leqq b_n$ であれば，$a \leqq b$ である．

(2) (1) の仮定を，$a_n < b_n$ としても，一般には $a < b$ とはならないことを示す反例を作れ．

(3) すべての n に対して $a_n \leqq b_n$ であり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ となる．

(4) すべての n に対して $0 \leqq a_n \leqq b_n$ であり，$\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ ならば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ となる．

(5) すべての n に対して $|a_n| \leqq b_n$ であり，$\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ ならば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ となる．

例解． 証明の部分は本文にあるので，(2) の例を少し挙げておこう．$n \geqq 1$ とする．

1. $a_n = 0 < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n$.
2. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} < b_n = 1$ とすれば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 = \lim_{n \to \infty} b_n$.
3. $a_n = \dfrac{1}{2n} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n$.
4. $a_n = \dfrac{1}{n^2} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n$.
5. $a_n = \dfrac{1}{e^n} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 = \lim_{n \to \infty} b_n$.

演習 11（2 項定理） 整数 $n \geqq 0$ に対して

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \, x^k y^{n-k}$$

が成り立つ．

例解． $n = 0$ のとき両辺は 1 となって成り立つ．これでいいのだが，心配なら，$n = 1$ のとき両辺は $x + y$ となって成り立つから始める．$n = k$ のとき成り立つ

とする．

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \\
= \;& (x+y)\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\; x^k y^{n-k} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\; x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\; x^k y^{n-k+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\; x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\; x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_{k-1}\; x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\; x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} ({}_nC_{k-1} + {}_nC_k)\; x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
= \;& y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n+1}C_k\; x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k\; x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

ここで，境界値と漸化式 (3) を使っている．

演習 12．正の整数 h, k に対して

$$a^k \cdot a^h = a^{k+h}, \quad (a^h)^k = a^{hk} \qquad \text{(指数法則)}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

例解． $n = k+h$ に関する帰納法で示す．$n = 2$ のときは $h = k = 1$ で，左辺 $= a{\cdot}a$ と右辺 a^2 は，定義により等しい．n まで成り立っているとして，$k+h = n+1$ の場合に示す．$k = 1$ のときは定義そのもの．$k > 1$ とすると，

$$
\begin{aligned}
a^k \cdot a^h &= aa^{k-1} \cdot a^h = aa^{k-1+h} \\
&= a^{1+k-1+h} = a^{k+h} = a^{n+1}
\end{aligned}
$$

となる．2 番目の等式で帰納法の仮定を，2 番目では定義を使った．後は a が属する代数系の積の結合律と自然数の和の結合律と交換律を使っただけだから，こ

こまでは a が積に関して群であるような代数系に属していれば成り立つ．

2 つ目の等式については，k に関する帰納法でおこなう．$k=1$ のときは，左辺 $=(a^h)^1=a^h=a^{h\cdot 1}=$ 右辺．$k>1$ のときは

$$(a^h)^{k+1}=(a^h)^k(a^h)^1=a^{hk}a^h=a^{hk+h}=a^{h(k+1)}$$

とすればよい．

演習 13.

(1) どんな有理数 h,k に対しても，指数法則が成り立つことを示せ．

(2) どんな正の有理数 $h>0$ に対しても $a^h>1$ であることを示せ．

(3) どんな有理数 $h>k$ に対しても $a^h>a^k$ であることを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a^{1/n}=1$ を示せ．

例解． (1) と (3) 以外は本文に解答がある．(1) h,k が整数の場合は，h,k が同符号の場合は演習 12 で済んでいる．異符号の場合は $n=h+k$ の正負に応じて，たとえば $h,n>0>k=-k'$ なら，

$$a^h a^k=a^h\frac{1}{a^{-k}}=\frac{a^{h-k'+k'}}{a^{k'}}=\frac{a^{h-k'}a^{k'}}{a^{k'}}=a^{h-k'}=a^n$$

とすればよい．

$(a^{\frac{q}{p}})^p=a^q$ を示す．

$$(a^{\frac{q}{p}})^p=(b^q)^p=b^{qp}=b^{pq}=(b^p)^q=a^q$$

となる．次に $\alpha=\dfrac{q}{p}=\dfrac{qr}{pr}$ だったとする．$a^{qr/pr}$ は $c^{pr}=a$ を満たす $c>0$ をとって，c^{qr} としたものであり，これが b^q と一致することを示す必要がある．しかし，$a=c^{pr}=c^{rp}=(c^r)^p$ なのだから，$b=c^r$ でなければならない．したがって，$c^{qr}=c^{rq}=(c^r)^q=b^q$ となる．

そこで，$h=\dfrac{q}{p}$，$k=\dfrac{r}{s}$ であれば，$d>0$ を $d^{ps}=a$ を満たす（唯一の）数とすれば

$$\begin{aligned} a^h a^k &= a^{\frac{q}{p}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{qs}{ps}} a^{\frac{pr}{ps}} = d^{qs} d^{pr} \\ &= d^{qs+pr} = a^{\frac{qs+pr}{ps}} = a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}} = a^{h+k} \end{aligned}$$

となる．

(3) は (2) を使って $a^h (= a^{h-k+k} = a^{h-k} a^k) > a^k$ と変形すればよい．

演習（はさみうちの原理）14．数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が同じ有限の値 d に収束するとする．すべての n に対して，$a_n \leqq x_n \leqq b_n$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は収束し，その極限は d になる．

例解． $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = d$ の定義を書くと，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，2 つの数列に対し共通の自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば,

$$|a_n - d|, |b_n - d| < \varepsilon$$

を満たす．したがって，同じ n に対して,

$$x_n - d \geqq a_n - d > -\varepsilon \quad \text{かつ} \quad x_n - d \leqq b_n - d < \varepsilon$$

をみたすので，$|x_n - d| < \varepsilon$ となる．

演習 15．$a > 1, \alpha > 0$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$$

を求めよ．

本文に示してある．

演習 16

(1) $a > b > 1 \quad \Rightarrow \{a^n\} \succ \{b^n\}$.

(2) $\alpha > \beta > 0 \quad \Rightarrow \{n^\alpha\} \succ \{n^\beta\}$.

(3) $a_1 > 0,\ r > 1$ とする，数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+1} > ra_n$ を満たせば $\{a_n\} \succ \{r^n\}$.

これは既に分かっていることを $\succ$ を使って書いただけ.

演習 17.

(1) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ と，(2) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示せ.

例解．(1) $n^{\frac{1}{n}} > 1$ ゆえ，$a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ と置く．演習 9 (2) から,

$$n = (1+a_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > a_n^2 > 0$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ が得られ，$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ が得られる．(2) は本文に述べてある.

演習 18 $\{c_n\}$ が上に有界であることを示せ．［ヒント：$n \geqq 1$ なら $n! \geqq 2^{n-1}$ である］

例解．ヒントを使えば,

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{2^n}{2^{n-1}} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

となる.

演習 19

(1) $0 < x_i < 1$ ならば，$\prod_{i=1}^{n}(1 \pm x_i) \geqq 1 \pm \sum_{i=1}^{n} x_i$ となる．等号は $n = 1$ のとき.

(2) $\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{(k-1)k}{2n}\right) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n(k-2)!}$.

(3) $a_n \geqq c_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. 等号は $n = 0, 1$ のとき.

例解．(1) $+$ の場合は演習 9 の証明と同じようにすればよい．$-$ のときに数学的帰納法で証明する．$n = 1$

のときは両辺等しい．

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i) &= \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\cdot(1-x_{n+1}) \\
&\geqq (1-\sum_{i=1}^{n}x_i)(1-x_{n+1}) \\
&= 1-\sum_{i=1}^{n+1}x_i + x_{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i \\
&\geqq 1-\sum_{i=1}^{n+1}x_i
\end{aligned}$$

(2) は明らか．

(3) a_n の単調性の証明での一般項は，(1) によって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\geqq\frac{1}{k!}(1-\frac{1+\cdots+(k-1)}{n}) \\
= &\frac{1}{k!}(1-\frac{(k-1)k}{2n})
\end{aligned}$$

となる．(2) を使うと，

$$\begin{aligned}
a_n &> 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{(k-1)k}{2n}) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} \\
&> \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=(1-\frac{1}{2n})c_n
\end{aligned}$$

が得られる．

演習 20

(1) （等比級数の和の公式） $r\neq 1$ ならば[1]，
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ となる．したがって，$|r|<1$ のとき，無限等比級数は収束し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=\frac{a}{1-r}$ となる．$|r|\geqq 1$ のときは発散する．

[1] 本文に $r>0$ とあるのはミスプリ

(2) $a>0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

例解. (1) $s_n=\sum_{k=0}^{n}ar^k$ と置くと，$rs_n=\sum_{k=1}^{n+1}ar^k$ だから，$(1-r)s_n=a-ar^{n+1}$ となる.

(2) $k=[a]+1$ と置くと，$n>k$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &< \frac{k^n}{n!}=\frac{k^k}{k!}\prod_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i}\\ &< \frac{k^k}{k!}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

となる．k は止まっているので，事実 1 から，0 に収束する.

演習 21

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a.$

(2) $a_n>0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a.$

例略解. (1) a_n-a を考えれば，$a=0$ のときに示せばよいことが分かる．すると，無限小の定義から，どんな $\varepsilon>0$ に対してもある N があって，$n>N$ ならば $|a_n|<\varepsilon$ を満たす．そこで，

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}$$

と分けると，前者の分母は有限で一定の値，後者の絶対値は

$$\frac{|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|}{n}<\frac{(n-N)\varepsilon}{n}$$

で押さえられる．次に 2 つに分けると，前者に対応する分子は $a_1+2a_1+\cdots+Na_N$ でこれも有限値，分母は $n(n+1)/2$．後者の絶対値については

$$\frac{((N+1)+\cdots+n)\varepsilon}{n(n+1)/2}<\frac{(1+\cdots+n)\varepsilon}{n(n+1)/2}=\varepsilon$$

で押さえられる.

(2) $a \neq 0$ のときは，フライイングして log の連続性を使えば，(1) に帰着するが，演習 13(4) を使えば，直接 (1) と同じようにして示すこともできる．読者に残しておこう．

$a = 0$ のときは，(1) と同じ記号を使えば，$(a_1 \cdots a_N)^{1/n}$ と $\varepsilon^{(n-N)/n}$ で押さえられる項の積に分けられる．前者は演習 13 (4) から 1 に収束し，後者は ε で押さえられる．

演習 22

$a, b > 0$ とする．

(1) $a_1 = a$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + b}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) $a_1 = a$, $a_{n+1} = \dfrac{b}{1 + a_n}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) $a_1 = a$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{b}{a_n}\right)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(4) $a_1 = a > b_1 = b$ とする．$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ とおくとき，2 つの数列は収束し，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を示せ．

例略解． どの場合とも，すべての項は正で，極限があるとすれば非負になる．

(1)-(3) では極限の候補が方程式を解くことで求まる．

(1) では $\alpha = \sqrt{\alpha + b}$ を解けばよく，非負の根は $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2} > 1$ となる．$b = \alpha^2 - \alpha$ を使うと，

$$a_{n+1}^2 - \alpha^2 = a_n + b - \alpha^2 = a_n - \alpha$$

となる．これを使ううまい方法があって

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \alpha| &= \left|\frac{a_{n+1}^2 - \alpha^2}{\sqrt{a_{n+1} + b} + \alpha}\right| < \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{b} + \alpha} \\ &< \frac{|a_{n-1} - \alpha|}{(\sqrt{b} + \alpha)^2} < \cdots < \frac{|a - \alpha|}{(\sqrt{b} + \alpha)^n} \end{aligned}$$

が得られる．$\alpha > 1$ だからもちろん $\sqrt{b} + \alpha > 1$ であって，右辺は 0 に収束し，だから左辺も 0 に収束する．

別解として，似たような方法だが，a_n の単調性を示し，その単調増大か減少かを決定するのは $a = a_1$ と a_2 の大小によることを示し，それがまた，a と α の大小によることを示すという手順を踏む方法もある．そちらの方が本格的で，できればそのようにするのがよい．

注意． $b=1$ ならば $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で黄金比になり，$b=2$ ならば $\alpha=2$ となる．

(2) では $\alpha = \dfrac{b}{1+\alpha}$ を解けばよく，これは $b = \alpha^2+\alpha$ となって，非負の根は $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2} > 1$ となる．階差を見ると

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{b}{1+a_n} - \frac{b}{1+a_{n-1}} \\
&= \frac{b(a_{n-1}-a_n)}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \\
&= \frac{a_n}{(1+a_n)}(a_{n-1}-a_n)
\end{aligned}
$$

となって，a_{n-1} から a_n への向き付けの距離の $\dfrac{a_n}{(1+a_n)} < 1$ 倍が a_n から a_{n+1} への向き付け距離になっている．大きくなることと小さくなることが交互に繰り返され，進む距離はだんだんと小さくなる，だから，偶数だけの部分列と奇数だけの部分列は共に単調で，互いに相手側の列の有界性を保証しているので，区間縮小法により，収束する．収束しさえすれば極限は α である．

もっと詳しく見てみる．a_2 と $a_1 = a$ を比べると，上と同じような計算で

$$
a_2 - a_1 = \frac{1+a+\alpha}{1+a}(\alpha - a)
$$

となり，$a < \alpha$ なら，奇数列は増大列で，偶数列は減少列になり，$a > \alpha$ ならその逆になる．$a = \alpha$ なら，すべての n で $a_n = \alpha$ である．さらに，同様な計算で

$$
\alpha - a_{n+1} = \frac{\alpha}{1+a_n}(a_n - \alpha)
$$

となって，a_n は α を中心に行ったり来たりを繰り返し，しかも歩幅を小さくしていくのである．

注意． $b=1$ ならば $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で黄金比になり，$b=2$ ならば $\alpha=1$ となる．

(3) では $\alpha=\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{b}{\alpha}\right)$ を解けばよく，これは $b=\alpha^2$ となって，非負の根は $\alpha=\sqrt{b}$ となる．そこで差を見ると

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha &= \frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{b}+\frac{b}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{b})^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

となり，$n \geqq 2$ ならば $a_n \geqq \sqrt{b}$ である．絶対値の評価なら $n \geqq 1$ に対して

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqq \frac{|a_n-\alpha|}{2} \leqq \frac{|a_{n-1}-\alpha|}{2^2} \leqq \cdots \leqq \frac{|a_1-\alpha|}{2^n}$$

が得られ，2 項目からは単調減少で $\sqrt{b}$ に収束する．

注意． $b=2$ のときは $\sqrt{2}$ の収束列で，$\sqrt{2}$ を近似していく非常によいアルゴリズムになっている．この計算が 4000 年ほど前のバビロニアの粘土板に残されている．

(4) $0<b<a$ から相加・相乗平均の不等式を使えば，

$$b=\sqrt{b^2}<\sqrt{ab}(=b_2)<\frac{a+b}{2}(=a_2)<a$$

となる．一般の n でも，同じ計算で，

$$b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n$$

となり，(2) のときと同じように単調増大する $\{b_n\}$ と単調減少する $\{a_n\}$ が得られている．さて区間の幅を計算しよう．

$$\begin{aligned} a_{n+1}-b_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_n+b_n}=\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2}{2} \\ &< \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})}{2}=\frac{a_n-b_n}{2} \\ &< \frac{a_{n-1}-b_{n-n}}{2^2}<\cdots<\frac{a_1-b_1}{2^n} \end{aligned}$$

となり，これは 0 に収束する．