

級数から狭間を見る

蟹江幸博・三重大大学教育学部

演習 23 (1) $0 < x < 1$ とする． $n > 1$ ならば，

$(1 \pm x)^n > 1 \pm nx$ となる．

(2) $0 < x < 1$, $n \geq 1$ ならば， $(1 - x)^n < \frac{1}{1 + nx}$ となる．

例解．(1) は明らか．(2) は数学的帰納法で． $n = 1$ のときは，問題の不等式は $1 - x^2 < 1$ と同値． n ま で成り立つとすると，

$$\begin{aligned}(1 - x)^{n+1} &= (1 - x)^n(1 - x) < \frac{1 - x}{1 + nx} \\ &< \frac{1}{1 + (n + 1)x}\end{aligned}$$

となる．最後の不等式は

$$(1 - x)(1 + (n + 1)x) = 1 + nx - (n + 1)x^2 < 1 + nx$$

から．

演習 24 収束列はコーシー列である．

例解． $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ なら，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N があって，どんな $n \geq N$ に対しても $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ となったのだから， $n, m \geq N$ に対して

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + -a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．

演習 25 数列 $\{a_n\}$ が収束すれば，どんな部分列も同じ値に収束する [ヒント：まず，狭義単調増加列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ に対しては， $n_k \geq k$ となることを示せ] ．

例解 . まずヒントを数学的帰納法で証明しよう . $n_1 \geq 1$ は明らか . $n_k \geq k$ を仮定すると , $n_{k+1} > n_k \geq k$ となるので OK .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とすると , 任意の $\varepsilon > 0$ に対して , ある K が存在して , どんな $k \geq K$ に対しても $|a_k - a| < \varepsilon$ である . このとき , $n_k \geq k \geq K$ だから , $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ である .

演習 26 コーシー列 $\{a_n\}$ のある部分列が収束すれば , $\{a_n\}$ 自身も同じ値に収束する .

例解 . $\{a_n\}$ はコーシー列だから , 任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して , ある数 N があって , どんな $n, m \geq N$ に対しても $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たしている . ある部分列 $\{a_{n_k}\}$ が a に収束するとすれば , ある K が存在して , どんな $k \geq K$ に対しても $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たす . ここで , $M = \max\{N, K\}$ とおけば , どんな $k \geq M$ に対しても

$$|a_k - a| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる ($n_k \geq k$ に注意) .

演習 27

(1) $k \geq 2$ に対して , ガウス記号を用いて $a_n = \left[\frac{n}{k} + \frac{1}{2^n} \right]$ と置くとき , この数列の集積点を求めよ ([ヒント] k 個ある .) 集積点が k 個の数列を , 他にも探してみよ .

(2) 分数 $\frac{m}{n}$ ($1 \leq m < n$) を (n, m) に関する辞書式順序²⁾ に並べた数列を考え , その集積点が区間 $[0, 1]$ のすべての点となることを示せ .

他にも区間 $[0, 1]$ のすべての点が集積点になるような数列の例を挙げよ .

²⁾ (n, m) が (n', m') より前にあることを , $n < n'$ であるか , $n = n', m < m'$ であるときと定めること .

(3) 無限個の集積点を持ち，その集積点の集合が集積点³⁾を持たないような数列の例を挙げよ．例えば，集積点の集合が $\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ であるものを作れ．

(4) 無限個の集積点を持ち，その集積点の集合が 0 だけを集積点とする数列の例を挙げよ．例えば，集積点の集合が $\left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\}$ であるものを作れ．

例解．(1) 集積点は $\left\{\frac{i}{k} \mid 0 \leq i < k\right\}$ ．

(3) $n + \frac{1}{m}$ ($1 \leq m < n$) を (n, m) に関する辞書式順序に並べた数列を考える．

(4) $\frac{1}{n} + \frac{1}{2^m}$ ($1 \leq m < n$) を (n, m) に関する辞書式順序に並べた数列を考える．

演習 28 有界な数列は集積点を持つ．

例解．有界だから，数列全体を 1 つの閉区間 I の中に閉じ込める．後はアイデアのように半分づつにして，無限個残っている方を選んでいけば，区間縮小法を使うことができる．

演習 29 要請 4 から要請 3 (上に有界な単調増加列は収束する) を導け．

例解． a_n を上に有界な単調増加列とすると，その上界と初項 a_1 との間に数列全体が入るので，要請 4 から集積点 α がある．つまり α に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ がある．だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある K があって，どんな $k \geq K$ に対しても $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ となる．単項増大列だったから，どんな $n \geq n_K$ に対しても， $\alpha - a_n \leq \alpha - a_{n_K} < \varepsilon$ となる．

どの a_n に対しても $a_n \leq \alpha$ であることも示して置く必要があるが，意味から明らか．

³⁾ 実数の集合 X に対し， X から適当に選んだ数列の極限になる数を X の集積点という．

演習 30 コーシー列は有界である .

例解 . 演習 5(1) のようにやってみる . $\{a_n\}$ がコーシー列だから , ある数 N があって , どんな $n \geq N$ に対しても $|a_N - a_m| < 1$ を満たす . 集合 $I = \{a_i \mid 1 < N\} \cup \{a_N \pm 1\}$ の最大最小値をとればよい .

演習 31

(1) コーシー列は収束する .

(2) 「コーシー列は収束する」ことから区間縮小法を導け .

例解 . (1) $\delta_n = \frac{1}{2^n} > 0$ とおく . $n = 0$ のときは , 演習 30 で取った N を N_1 とすれば , $I_1 = [a_{N_1} - 1, a_{N_1} + 1] \subset I_0$ にすべての a_n ($n > N_1$) は含まれる . 順に $N_n (> N_{n-1})$ が取れ , すべての a_m ($m > N_n$) が含まれる閉区間 $I_n = [a_{N_n} - \delta_n, a_{N_n} + \delta_n] \cap I_{n-1} \subset I_{n-1}$ が得られたとする . $\delta_{n+1} > 0$ に対しても , , ある数 N_{n+1} があって , どんな $m \geq N_{n+1}$ に対しても $|a_{N_{n+1}} - a_m| < \delta_{n+1}$ を満たす ($N_{n+1} < N_n$ となっていたら , $N_{n+1} = N_n$ とおく) . すると , $a_{N_n}, a_m \in I_{n+1} = [a_{N_{n+1}} - \delta_{n+1}, a_{N_{n+1}} + \delta_{n+1}] \cap I_n$ であり , 縮小する閉区間列が取れる ($|I_n| \leq \delta_n$) . こうして要請 2 から , すべての共通部分に 1 点 a が存在する . $a_{N_n} \in I_n$ だから , 部分列 $\{a_{N_n}\}$ は a に収束し , 演習 26 から数列 $\{a_n\}$ 自身も a に収束する .

(2) 閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ の減少列で , 長さ $|I_n| = b_n - a_n$ が 0 に収束するとする . 任意の $\varepsilon > 0$ に対し , ある N があって , 任意の $n \geq N$ に対して $b_n - a_n < \varepsilon$ である . a_n は単調増加であるから , 任意の $m > n \geq N$ に対して , $b_N > a_m \geq a_n \geq a_N$ である . $a_m - a_n < b_n - a_N < \varepsilon$ となるので , a_n はコーシー列となり , 収束する . 同様に b_n も収束するが , $b_n - a_n$ が 0 に収束するので , 2 つの極限は一致する . 演習 10 からこの

極限は、すべての $I_n = [a_n, b_n]$ に属する。

演習 32 (コーシーの収束条件) 級数 $\sum a_n$ が収束することと、「任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N > 0$ があって、任意の $n > m \geq N$ に対して

$$\left| \sum_{k=N+m}^{N+n} a_k \right| < \varepsilon$$

が成り立つことは同値である。

例解。部分和 s_n がコーシー列であるという条件を書き直しただけ。

演習 33 (1) 級数 $\sum a_n$ が収束すれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる。

(2) 級数 $\sum |a_n|$ が収束すれば(このとき級数は絶対収束するという)、級数 $\sum a_n$ は収束する。

証明は本文にある。

演習 34 0 に収束する単調減少列 a_n に対する交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する。

例解。部分和 $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ がコーシー列をなすことを言えばよい。

奇数 n に対し、 $s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1} a_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$ 、 $s_{n+2} = s_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = s_{n+1} - a_{n+2} < s_{n+1}$ 、さらに $s_{n+2} - s_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = a_{n+1} - a_{n+2} \geq 0$ となる。 $s_{n+3} > s_{n+2}$ も同様に示され、任意の $m > n$ に対し、 $s_n < s_m < s_{n+1}$ となる。こうして、 n の偶奇を問わず、 $|s_m - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$ となる。 a_n が 0 に収束するので、コーシー列をなすことがわかる。

演習 35 (優級数の定理) $|b_n| \leq a_n$ を満たす 2 つの級数 $\sum a_n$ と $\sum b_n$ に対して、 $\sum a_n$ が収束すれば $\sum b_n$ は収束する。

例解．演習 33 から， $b_n > 0$ としてよい．部分和の数列を考えれば，数列の比較定理（演習 10）から得られる．

演習 36 (1) $k \geq 1$ とする．正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ も収束する． $0 < k < 1$ の場合はどうなるか？

(2) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば， $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ も収束する．

例解．(1) $\sum a_n$ が収束するので， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となり，十分先では $a_n < 1$ で，したがって， $a_n^k < a_n$ である．

(2) $\sum(a_n + b_n)$ が収束するので，これを優級数としてとれる（ $2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$ を使う）． $\square$

演習 37 (1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し，極限が a であれば，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

となる．

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

となる．

(3) 単調減少する項からなる正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば， $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ となる．

(3) は本文にある．(1) と (2) は本文のヒント通りにやる．また，(1) と (2) の一般項を足すと

$$\frac{(n+1)(a_1 + \cdots + a_n)}{n} = \frac{n+1}{n} s_n$$

となるので，(1) と (2) は一方から他方が従う．

演習 38 (根のテスト; コーシーの判定法) 正項の数列 a_n の n 乗根 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ が収束するとする. その極限を r とするとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \infty & (r > 1 \text{ のとき}) \\ \text{収束} & (r < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. $r = 1$ のときに, 発散する例と収束する例を作れ

解答は本文にある.

演習 39 正項の数列 a_n の隣り合う項の比 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が収束するとする. その極限を r とするとき,

(1) (比のテスト; ダランベールの判定法)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \infty & (r > 1 \text{ のとき}) \\ \text{収束} & (r < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. $r = 1$ のときに, 発散する例と収束する例を作れ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ となる.

例解. (1) 解答は本文にある.

(2) 条件から, $(r > 0)\varepsilon > 0$ に対し, ある N が存在し, どんな $n \geq N$ に対しても $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \varepsilon$, つまり

$$(r - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (r + \varepsilon)a_n$$

をみたとす. 繰り返せば

$$a_n < (r + \varepsilon)a_{n-1} < \cdots < (r + \varepsilon)^{n-N}a_N$$

を, また同様にして

$$a_n > (r - \varepsilon)a_{n-1} > \cdots > (r - \varepsilon)^{n-N}a_N$$

を満たす. ここで,

$$L = \frac{a_N}{(r - \varepsilon)^N}, \quad M = \frac{a_N}{(r + \varepsilon)^N}$$

とおけば,

$$(r - \varepsilon)^n L < a_n < (r + \varepsilon)^n M,$$

$$(r - \varepsilon)L^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < (r + \varepsilon)M^{\frac{1}{n}}$$

となる. ところが演習 13(4) から $\lim_{n \rightarrow \infty} L^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$ である. 任意の $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ に対し, ある N' があって, どんな $n \geq N'$ に対しても

$$1 - \varepsilon' < L^{\frac{1}{n}} \text{ と } M^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon''$$

が成り立つようにできる. $N'' = \max\{N, N'\}$ とし, $n \geq N''$ をとれば,

$$\sqrt[n]{a_n} < (r + \varepsilon)M^{\frac{1}{n}} < (r + \varepsilon)(1 + \varepsilon'')$$

となる. そこで (十分小さく) 任意に与えた $\tilde{\varepsilon} > 0$ に対して,

$$(r + \varepsilon)(1 + \varepsilon'') \leq r + \tilde{\varepsilon}$$

を満たすように, $\varepsilon, \varepsilon'' > 0$ をとればよい. たとえば, $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ とおき, $\leq$ を $=$ で置き換えた等式を解けば,

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{r + \varepsilon}$$

が得られる. 同様に

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{r - \varepsilon}$$

とおけば,

$$r - \tilde{\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < r + \tilde{\varepsilon}$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が示された. □

演習 40 次の級数の収束・発散を調べよ.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,
 (3) $a > 0$ に対し, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{n + n^2}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ [ヒント : $p = 0$ のときは打ち消し合って , 1 に収束する . p が大きくなっていくとだんだん値が大きくなって , $p = \frac{1}{2}$ のときに無限大になってしまう . 括弧の中を通分して , 分子の有理化をし , 事実 3 を使え]

例解 . (1) 比のテストにより収束 . (2) 根のテストにより発散 . (3) 比のテストにより , $a < 1$ のとき収束し , $a > 1$ のとき発散 . $a = 1$ のときは , $\frac{1}{n+n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ を使って収束が分かる .

(4) 答は $p < \frac{1}{2}$ のとき収束 . $p \geq \frac{1}{2}$ のとき発散 .
まず , ヒントにあるように括弧の中を変形する .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

収束させたいときは上からの評価

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

を使い , $p < \frac{1}{2}$ とすると ,

$$n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2n} \frac{n^p}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}-p}}$$

となり , 事実 3 から収束する優級数が得られたことになる .

発散させたいときは下からの評価

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} > \frac{1}{2\sqrt{n}(n+1)}$$

を使って , $p = \frac{1}{2}$ のときに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

と , 発散する劣級数があることを示せばよい .