

関数の話にしよう

蟹江幸博●三重大大学教育学部

演習 41 (1) (ド・モルガンの法則)

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(2) A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$(3) A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

例解. (1) $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ または $x \notin B \Leftrightarrow a \in A^c$ または $a \in B^c \Leftrightarrow a \in A^c \cup B^c$.

$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ かつ $x \notin B \Leftrightarrow a \in A^c$ かつ $a \in B^c \Leftrightarrow a \in A^c \cap B^c$.

(2) 最後の2つ以外は容易. 2つは同様なので, 1つだけ示す.

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B \cup C \Leftrightarrow (x \in A$ かつ $x \in B)$ または $(x \in A$ かつ $x \in C) \Leftrightarrow a \in A \cap B$ または $a \in A \cap C \Leftrightarrow a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(3) 定義から明らか.

演習 42

集合 X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, 和集合と積集合を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X \mid x \in A_\lambda \text{ となる } \lambda \text{ がある} \}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X \mid \text{どんな}\lambda\text{に対しても } x \in A_\lambda \text{となる}\}$$

と定義すると、例えば、

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

など、演習 41 の類似が成り立つ。

例解. どれも似たようなものなので、最初のもので示す。

$$x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow x \notin A_\lambda \text{となる}\lambda\text{がある} \Leftrightarrow x \in A_\lambda^c \text{となる}\lambda\text{がある} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

演習 43

X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と、 Y の部分集合族 $\{B_\mu \mid \mu \in M\}$ に対して、次が成り立つ。

$$(1) f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

(2) $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$. また、等号が成り立たない例を作れ。

$$(3) f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu).$$

$$(4) f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu).$$

例解. (1) $y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \Leftrightarrow y = f(x) \text{となる } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{がある} \Leftrightarrow y = f(x), x \in A_\lambda \text{となる } \lambda \in \Lambda \text{がある} \Leftrightarrow y \in f(A_\lambda) \text{となる } \lambda \in \Lambda \text{がある} \Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$

(2) 明らか。反例はたとえば、 $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ で、 $A_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $A_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ とすればよい。

(3) は (1) と (4) の解答を見ればすぐに分かるので、(4) を示す。

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) \Leftrightarrow \text{すべての } \mu \in M \text{ に対して } f(x) \in B_\mu \Leftrightarrow \text{すべての } \mu \in M \text{ に対して } x \in f^{-1}(B_\mu) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu).$$

演習 44

(1) $a < b, c < d$ が有限のとき, 开区間 (a, b) を开区間 (c, d) に移す 1 次関数を定めよ. 同じ写像で, 閉区間も半开区間も写される.

(2) $a < b, c$ が有限で, $d = \infty$ のとき, 开区間 (a, b) を开区間 (c, ∞) に移す関数を求めよ, [ヒント: 1 次関数と分母が 1 次関数の分数式の和として定めることができる.]

(3) $a < b$ が有限のとき, 开区間 (a, b) を开区間 $(-\infty, \infty)$ に移す関数を求めよ. [ヒント: 分母が 1 次関数の 2 つの分数式の和として定めることができる.]

例解. ほかに解はあるが, 一番手軽なものとして,

$$(1) y = \frac{(c-d)x + ad - bc}{a-b},$$

$$(2) y = \left(1 - \frac{1}{a(b-a)}\right)x + \frac{1}{b-a},$$

$$(3) y = \frac{1}{b-x} - \frac{1}{x-a}.$$

演習 45

(1) 開集合の全体を $\mathcal{O}$ とすると, 次の (開集合の公理と呼ばれる) 3 つの性質を満たす.

$$(a) \mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{O}.$$

$$(b) U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}.$$

$$(c) \{U_\lambda \in \mathcal{O}\}_{\lambda \in \Lambda} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}.$$

(2) 実数の集合 A に対し, A の部分集合族 $\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$ は開集合の公理を満たす. ただし, (a) については $A, \emptyset \in \mathcal{O}_A$ とする. このとき, $\mathcal{O}_A$ の元を A の開集合と呼び, それが定める位相を A の**相対位相**と言う.

(3) 点 a の ε 近傍の全体を $\mathcal{U}(a)$ とすると, 次の (基本近傍系の公理と呼ばれる) 3 つの性質を満たす.

$$(a) U \in \mathcal{U}(a) \Rightarrow a \in U.$$

$$(b) U, V \in \mathcal{U}(a) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}(a), W \subset U \cap V.$$

$$(c) U \in \mathcal{U}(a) \text{ に対して, } W \in \mathcal{U}(a), W \subset U \text{ で}$$

あって、「 $x \in W$ に対して、 $V \in \mathcal{U}(x)$, $V \subset U$ がある」を満たすものが存在する.

例解. (1) (a) 明らか. (b) $x \in U \cap V$ をとり, 内点であることを示す. まず $x \in U$ であり, U が開集合だから x は U の内点で $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ を満たす $\varepsilon_1 > 0$ がある. 同様にして, $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$ を満たす $\varepsilon_2 > 0$ がある. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ととれば, $B_\varepsilon(x) \subset U \cap V$ となる.

(c) $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ ととると, $x \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ がある. U_λ が開集合だから, $B_\varepsilon(x) \subset U_\lambda \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある.

(2) は演習 41 から明らか.

(3) (a) 明らか. (b) $U = B_{\varepsilon_1}(x)$, $V = B_{\varepsilon_2}(x)$ と書けば, $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ と取って, $W = B_\varepsilon(x)$ とおけばよい. (c) $U = B_\varepsilon(a)$ と書けば, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ ととって, $W = B_{\varepsilon'}(a)$ とおけばよい. $x \in W$ ならば, $|x - a| < \varepsilon'$ だから, ε'' を $\varepsilon' < \varepsilon'' < |x - a|$ をみたすようにとって, $V = B_{\varepsilon''}(x)$ とおけば条件を満たす.

演習 46 (1) F が閉集合であることは、「 $x_n \in F$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ならば $a \in F$ である」と同値である.

(2) 集合 A の点からなる収束列の極限となり得る点をすべて集めた集合を $\overline{A}$ と表わし, A の**閉包**という. 次の (開包の公理と呼ばれる) 4 つの性質を満たす.

$$(a) \overline{\emptyset} = \emptyset. \quad (b) A \subset \overline{A}.$$

$$(c) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (d) \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

(3) 集合 A が閉集合であることと, $A = \overline{A}$ であることは同値である.

(4) 集合 A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である. [ヒント: $\overline{A} = \cap \{F : \text{閉集合} \mid A \subset F\}$ であることを示せ]. $\overline{A}$ の点を A の**触点**という.

(5) 点 x が集合 A の集積点であることと, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ とは同値である.

(6) 集合 $A \subset B$ に対し, $B \subset \overline{A}$ を満たすとき, A は B で稠密であるという. 有理数の全体は実数の中で稠密であり ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), 無理数の全体も実数の中で稠密である ($\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

(7) 有界閉集合 F の任意の点列は, F の点に収束する部分列を持つ (有界閉集合の点列コンパクト性, [ヒント: 要請 4 を使う.]).

例解. (1) F が閉集合で, 「 $x_n \in F$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ であっても $a \notin F$ である」ものがあつたとして矛盾を導く (これで $\Rightarrow$ が言える). そのとき, $a \in F^c$ であり, F^c は開集合だから, $B_\varepsilon(a) \subset F^c$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある. ところが, 収束することから, ある N があつて, すべての $n \geq N$ に対して $x_n \in B_\varepsilon(a) \subset F^c$ とならねばならず, $x_n \in F$ に矛盾する.

$\Leftarrow$ は, 対偶を示す. F が閉集合でないとする. F^c が開集合でないのだから, F^c には内点でない点 a がある. すると, どんな $n \geq 1$ に対しても $B_{1/n}(a) \not\subset F^c$ となるので, $B_{1/n}(a) \cap F \neq \emptyset$ となる. この集合から 1 点 x_n を選べば, $x_n \in F$ かつ $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ となる. こうして, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となるが, $a \notin F$ なので, 「」の中の命題は成り立たない.

(2) (a) は明らか. (b) は $a \in A$ に対し, $a_n = a$ という収束列を考えればよい.

(c) $a \in \overline{A \cup B}$ をとると, $x_n \in A \cup B$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となるものがある. 無限個の n に対して, $x_n \in A$ であるか, $x_n \in B$ であるかなので, A か B かの点列で a に収束するものがあることになり, $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$ となる. 逆は明らか.

(d) 対角論法を使う. (b) から, $\overline{\overline{A}} \supset \overline{A}$ は明らかなので, その逆を示す. $a \in \overline{\overline{A}}$ をとる. $x_n \in \overline{A}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となるものがある. そしてさらに, $y_k^n \in A$ で $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k^n = x_n$ となるものがある. そこで, $z_n = y_n^n$

とおくと, $z_n \in A$ である. そこで $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ が言えればことは簡単なのだが, そうはいかない. y_k^n の収束の速さが n が大きくなるにつれて遅くなるかもしれないのだ.

選び方を工夫する. 任意の m に対して, $|x_{n_m} - a| < \frac{1}{2m}$ を満たすような $x_{n_m} \in \bar{A}$ がとれる. それに対して, $|y_k^{n_m} - x_{n_m}| < \frac{1}{2m}$ を満たすような $y_k^{n_m} \in A$ がとれる. これを z_m とおけば, $|z_m - a| < \frac{1}{m}$ となる.

(3) (1) と (2-d) を使えば, $\Rightarrow$ は明らか. $\Leftarrow$ は, (1) と閉包の定義から, 明らか.

(4) $B = \cap \{F : \text{閉集合} \mid A \subset F\} \supset A$ とおくと, ド・モルガンの定理 (演習 41(1)) と演習 45(1-c) から, B は閉集合になる. また, 上の (2-d) と (3) から, $\bar{A}$ は閉集合であり, B の定義から, B を含む. こうして, $\bar{A} \supset B \supset A$ が得られ, 全体に閉包演算を施せば,

$$\overline{\bar{A}} = \bar{A} \supset \bar{B} = B \supset \bar{A}$$

が得られる.

ここで使った「 $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ 」は閉包の公理の (c) からわかる.

(5) 集積点の定義と閉包の定義から明らか.

(6) 第 1 回の演習 3 は, 任意の実数のいくらでも近くに有理数があることを意味しており, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ であることがわかる. $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ を示すためには, 任意の実数 α に対し, α に収束する無理数列があることを言えばよい. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ であるから, α に収束する有理数列 $a_n \in \mathbb{Q}$ はある.

ところで, $\sqrt{2}, \pi$ など無理数が存在している. それを 1 つ選んで, ω とする. $h \in \mathbb{Q}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $h + \frac{\omega}{n} \notin \mathbb{Q}$ となる. だから, 無理数 $a_n + \frac{\omega}{n}$ は $n \rightarrow \infty$ で, a_n と同じ値 α に収束する.

(7) 要請 4 と (1) を使えばよい.

演習 47

(1) 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であることは、以下の (a),(b) と同値である。

(a) どんなに小さな $\varepsilon > 0$ に対しても、十分小さく $\delta > 0$ を取れば、 $|x - a| < \delta$ を満たす x に対しては $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ。

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、 $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ を満たす。

(c) $f(a)$ の任意の近傍 V に対して、 a のある近傍 U が存在して、 $f(U) \subset V$ を満たす。

(2) 関数 $y = f(x)$ が連続であることは、以下の (a),(b) と同値である。

(a) 値域 Y の任意の開集合 V に対して、その原像 $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ は定義域 X の開集合である。

(b) 値域 Y の任意の閉集合 F に対して、その原像 $f^{-1}(F)$ は定義域 X の閉集合である。

例解. (1) $x = a$ での連続性 $\Rightarrow$ (a): (a) が成り立たなかったとする。すると、「ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $\delta > 0$ に対して $|x - a| < \delta$ であっても $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ となる x がある」ことになる。そこで、自然数 m に対して、 $\delta = \frac{1}{m}$ とおいたときに得られる x を x_m と書く。 $|x_m - a| < \frac{1}{m}$ だから、 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$ だが、 $|f(x_m) - f(a)| \geq \varepsilon$ なのだから、 $f(x_m)$ は収束せず、 $f(x)$ は $x = a$ で連続でなくなる。背理法により、(a) が成り立つ。

(a) $\Rightarrow x = a$ での連続性: (a) が成り立っているので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| < \delta$ を満たす x に対しては $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ。
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ とすると、この δ に対して、ある N が存在して、 $n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ となる。従って、 $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ となっている。

(b) $\Leftrightarrow$ (a): (b) は (a) を ε 近傍の言葉で言い換えただけ.

(b) $\Rightarrow$ (c): V を $f(a)$ の近傍とすると, $f(a)$ の開近傍 $V' \subset V$ があり, ある $\varepsilon > 0$ があって, $B_\varepsilon(f(a)) \subset V' \subset V$ となる. (b) から, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ を満たす.

(c) $\Rightarrow$ (b): 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $B_\varepsilon(f(a))$ は $f(a)$ の開近傍だから, a のある近傍 U が存在して, $f(U) \subset B_\varepsilon(f(a))$ を満たす. 上と同様にして, $B_\delta(a) \subset U$ となる $\delta > 0$ が存在する.

(2) $f(x)$ の連続性 $\Rightarrow$ (a): 値域 Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が開集合であることをいう. $a \in f^{-1}(V)$ をとる. $f(a) \in V$ だから, $f(a)$ は V の内点であり, ある $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ となる. f は $x = a$ で連続だから, (1-b) により, ある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ となるから, $B_\delta(a) \subset f^{-1}(V)$ となる. つまり, 任意の点 a が $f^{-1}(V)$ の内点なので, $f^{-1}(V)$ は開集合である.

(a) $\Rightarrow f(x)$ の連続性: a を定義域の任意の点とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $B_\varepsilon(f(a))$ は開集合だから, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \ni a$ は開集合である. a が内点だから, ある $\delta > 0$ が存在して, $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ を満たす. 従って, $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ を満たす.

(b) は演習 43 の直前の注意「 $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ 」によって, (a) と同値.

この注意の証明もしておこう. $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)^c$

演習 48

(1) 定義域が同じ 2 つの連続関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ に対して,

$$(af \pm bg)(x), \quad (fg)(x), \quad \frac{f}{g}(x), \quad \max\{f(x), g(x)\}$$

は連続である. ただし, a, b は実数で, 割り算をする場合には定義域から g の零点集合 $\{a \in X \mid g(a) = 0\}$ を除外しておく.

(2) 連続な関数 $y = f(x)$ の像が, 連続な関数 $z = g(y)$ の定義域に含まれているとき, 合成関数 $g \circ f(x)$ は f の定義域と同じ定義域を持つ連続関数となる.

例解. (1) 最後を除いて, 各点での連続性は演習 6 から. $x = a$ で, $f(a) > g(a)$ なら, a のある近傍 U 上で $f(x) > g(x)$ となるので, f の連続性から従う. $b = f(a) = g(a)$ とする. f と g が連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して, $f(B_{\delta_1}(a)) \subset B_\varepsilon(b)$, $g(B_{\delta_2}(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ となる. $\max\{f(x), g(x)\}$ の値は $f(x)$ か $g(x)$ のどちらかなので, $\delta = \min_i \delta_i$ とおけば $\max\{f(x), g(x)\}(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ となる.

(2) は演習 47(2-a) を使えばよい.

演習 49

(1) $x = a$ が関数 f の定義域の内点のとき, $x = a$ で連続であることと, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ とは同値である.

(2) 関数 f の定義域が閉区間 $I = [c, d]$ のとき, 端点 $x = a$ での連続性を, $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ と定義し, 端点 $x = b$ での連続性を, $\lim_{x \rightarrow d-} f(x) = f(d)$ と定義すると, I 上の関数としての連続性は, 演習 47 (2-a) で I を相対位相で考えた命題と同値である.

(3) 以下の関数は 点 $x = 0$ で左右の極限を持つか, 持つとき極限を持つか, また, 右または左連続か. ($g(x), h(x)$ はすぐ上に定義したものとする). $x = 0$ での値を取り換えるとどうなるか.

- (a) $\frac{x - x^2}{|x|}$, (b) $H(x), H(|x|)$,
(c) $g(x)$, (d) $h(x), xh(x)$
(e) $\frac{1}{x}, \frac{1}{|x|}$

例解. (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ は, 上の定義では, 任意の

$\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $f(B_\delta(a) \cap (a, \infty)) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ かつ $f(B_\delta(a) \cap (-\infty, a)) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ を満たすことであり, まとめれば $f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ となる. 連続の定義では, $\alpha = f(a)$ とするのだから, $\setminus \{a\}$ の条件はあってもなくてもよい. 後は, 演習 47(1-b) を使えばよい.

(2) 相対位相の定義をじっくり見る.

(3) (a) 図 12 を見る. 左右の極限は存在するが一致しない. $x = 0$ での値は指定されていないが, どうしても連続でないが, 左連続か右連続にすることはできる. (b) $H(x)$ では左右の極限は存在するが一致しない. 左連続である. $|H(x)|$ では左右の極限は存在して一致するが, $x = 0$ での値 0 とは一致しない. 左連続でも右連続でもない. (c) 左右の極限は存在するが一致しない. 左連続でも右連続でもない. (d) $h(x)$ は右極限も左極限も (振動することによって) 存在しない. $xh(x)$ は連続. (e) $\frac{1}{x}$ の右極限は ∞ , 左極限は $-\infty$ と発散する. $\frac{1}{|x|}$ の左右極限は ∞ .

演習 50

(1) 以下の関数の不連続点の様子を調べよ. 定義域は $(-1, 1)$ とする.

(a) $\frac{1}{[x]}, \frac{1}{1/[x]},$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (x \neq 0), f(0) = 0,$

(c) 演習 49 (3-d) の $h(x)$ の基になる $f(x)$ の値を $f(0) = 0$ と変えたものを $f_1(x)$ とし, $y = f_1\left(\frac{1}{x}\right)$ を考える.

(2) デイリクレの関数は任意の点で連続でない. 修正デイリクレ関数は有理数では連続でないが, 無理数では連続である.

例解. (1) (a) $\frac{1}{[x]}$ の不連続点は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$ で, 不連続点である原点 (原点では $\pm\infty$) に収束. $\frac{1}{1/[x]}$

の不連続点は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$ で、連続点である原点に収束. (b) 不連続点は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots$ で、不連続点である原点（原点では振動）に収束.

(c) 不連続点は $0, \pm\frac{1}{2n} (n \geq 1)$ で、不連続点である原点（原点では振動）に収束.

(2) ディリクレの関数は任意の点で連続でないことと、修正ディリクレ関数が有理数で連続でないことは演習 46(6) から.

修正ディリクレ関数が無理数では連続であることを示す. 周期 1 なので, $(0, 1)$ 上で考える. $x \in (0, 1)$ を無理数とする. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. アルキメデスの公理 (演習 2) により, $\varepsilon > \frac{1}{q}$ を満たす自然数 q が存在する. $A = \{\frac{n}{m} \mid 1 \leq n < m < q\}$ は有限集合なので, $\delta > 0$ を十分小さくとれば, $B_\delta(x) \cap A = \emptyset$ に取れる. したがって, $B_\delta(x)$ に含まれる有理数の分母は q 以上であり, そこでの値は $\frac{1}{q}$ 以下になる. つまり, $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(0)$ となって連続であることが言える.