連続と連結とコンパクト

蟹江幸博●三重大学教育学部

演習 51

(1) 要請 6 を証明せよ.

(2) 要請 6 から要請 3 を導け.

例解. 本文中にある.

演習 52

(1) $f(a) < 0 < f(b)$ として，中間値 0 に対する中間値の定理を証明せよ.

(2) 一般の中間値の定理を証明せよ.

例解. 本文中にある. (1) の証明で二分法を使う場合は区間縮小法を使うが，X でも Y でもその上限 c で $f(c) = 0$ となることを示す必要があった. 連続関数に関する議論での 1 つの典型例なので，書いておこう. $\xi = \sup X$ とし，$f(\xi) = 0$ を示す. f が ξ で連続であることを使う. $f(\xi) > 0$ であれば，$f|_{B_\varepsilon(\xi)} > 0$ となる正数 $\varepsilon > 0$ が存在するので，ξ が上限であることに反する. $f(\xi) < 0$ であれば，$f|_{B_\varepsilon(\xi)} < 0$ となる正数 $\varepsilon > 0$ が存在するので，ξ より小さい数で X に属せない数がべたーっとあり，ξ が X の上限であることに反する.

演習 53

(1) 奇数次の多項式 $f(x)$ に対する方程式 $f(x) = 0$ は（少なくとも 1 つ）解を持つ.

(2) 連続関数 $y = f(x)$ に対して，単調増加列 $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ があって，$f(a_{i-1})f(a_i) < 0$ $(i = 1,$

$\ldots, k)$ を満たしたとする．そのとき，各区間 $I_i = (a_{i-1}, a_i)$ の中に方程式 $f(x) = 0$ の解が（少なくとも１つ）存在する．

(3) 連続関数 $y = f(x)$ が $f([a,b]) \subset [a,b]$ を満たすとき，$f(c) = c$ を満たす $c \in [a,b]$ が存在する．このとき，c を f の**固定点**という．

例解． (2) は演習 52 の (1) から明らか．

(1) は，演習 8(1) から，多項式 $P(x)$ に対して整数 $x = n$ で値の極限は，$\lim_{n\to\infty} P(n) = \mathrm{sgn}(a)\infty$ と，最高次 k の係数 a の符号で決まっている．しかし，それも n^k で決まっており，$n \leqq x < n+1$ なら $n^k \leqq x^k < (n+1)^k$ であることから，$\lim_{x\to\infty} P(x) = \mathrm{sgn}(a)\infty$ であることがわかる．したがって，任意の $M > 0$ に対して $P(x) > M$ となる十分大きな x が存在する．k が奇数であれば，$(-x)^k = -x^k$ であるので，同様にして，$P(x') < -M$ となる，十分小さな（負で絶対値が大きな）x' が存在する．あとは多項式が連続であることを注意すればよい．

(3) $f(a) = a$，$f(b) = b$ であれば OK．そこで，$f(a) > a$ かつ $f(b) < b$ としてよい．そのとき関数 $g(x) = f(x) - x$ は連続で $g(a) > 0$，$g(b) < 0$ を満たすので，中間値の定理により $g(c) = 0$ を満たす $c \in [a,b]$ が存在する．このとき $f(c) = c$ となる．

演習 54

(1) $\mathbb{R}^n$ がベクトル空間であることを示せ．

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

とおくと，$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ がノルム空間になることを示せ．

例解． (1) は線形代数の基本問題なので省略．(2)

条件 (1), (2) は明らか．(3) については右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引くと

$$
\begin{aligned}
& (||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2-||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \\
= & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}^{\,2}+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}^{\,2}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}^{\,2} \\
= & 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)
\end{aligned}
$$

となる．2 で割って，前者の 2 乗から後者の 2 乗を引けば

$$
(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)-\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i x_j y_j=\sum_{i<j}(x_i y_j-x_j y_i)^2 \geqq 0
$$

となる.

演習 55

(1) 内積空間はノルム空間であることを示せ．ただし,

$$
||\mathbf{x}||=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}
$$

とおく.［ヒント:まず，**シュワルツの不等式**

$$
|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leqq \|\mathbf{x}\|\ \|\mathbf{y}\|
$$

を示せ.］

(2) ノルムが内積から定義されるとき，**中線定理**

$$
||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2=2(||\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2)
$$

が成り立つ.

(3) ノルム空間は一般には内積空間にならないが，ノルムが中線定理を満たしているなら，内積空間になることを示せ.［ヒント:

$$
(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{2}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{y}\|^2)
$$

が内積の性質を満たすことを示せ．そのためには，シュワルツの不等式を先に示すとよい.］

(4) ユークリッド・ノルムが中線定理を満たすことを示せ．そして，(3) で与えられる内積が

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

となることを示せ．この内積を考えた $\mathbb{R}^n$ を n **次元ユークリッド空間**と言う.

(5) 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数全体の集合を $C[a, b]$ は，**最大値ノルム**

$$\|f\| = \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \qquad (f \in C[a, b])$$

によってノルム空間になる.（和とスカラー倍は関数としての和とスカラー倍にとる.）

また，このノルムは中線定理を満たさないことを示せ.（このことにより $C[a, b]$ には内積が入らないことがわかる.）

例解.

(1) ノルムの公理のうち (3) 以外は明らか．ヒントに従って，まずシュワルツの不等式を示そう．t を実数とすると，

$$0 \leqq \|t\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (t\mathbf{x}+\mathbf{y}, t\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$$

となり，これがどんな t に対しても成り立たねばならないので，t に関する 2 次式の判別式が

$$\frac{1}{4}D = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leqq 0$$

となって，得られる．そこで，三角不等式の右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引くと

$$\begin{aligned}
& (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \\
= \ & (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
= \ & (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}||^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \|\mathbf{y}\|^2 \\
= \ & 2(||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| - (\mathbf{x}, \mathbf{y})) \geqq 0
\end{aligned}$$

となる．

(2) ノルムが内積から定義されると

$$
\begin{aligned}
& ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
= \; & ||\mathbf{x}||^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+||\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}||^2-2(\mathbf{x},\mathbf{y})+||\mathbf{y}||^2=2(\|\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2)
\end{aligned}
$$

となる．

(3) 反例は (5)．中線定理が成り立つと仮定する．内積の候補をヒントのように置く．

シュワルツの不等式の証明は，まず三角不等式の $\mathbf{x}$ に $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ を代入すれば $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}||\geqq\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}||$ を得，さらには

$$
\big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\big|\leqq\|\mathbf{x}+\mathbf{y}||\leqq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}||
$$

を得る．$(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2-||\mathbf{x}||^2-||\mathbf{y}||^2 \\
&\leqq (||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2-||\mathbf{x}||^2-||\mathbf{y}||^2 \\
&= 2||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||
\end{aligned}
$$

が得られ，$(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2-||\mathbf{x}||^2-||\mathbf{y}||^2 \\
&\geqq (||\mathbf{x}||-||\mathbf{y}||)^2-||\mathbf{x}||^2-||\mathbf{y}||^2 \\
&= -2||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||
\end{aligned}
$$

が得られる．合わせると $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leqq||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||$ となる．

対称性と正値性は明らか．加法性については

$$
\begin{aligned}
& 2(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y})-2(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})-2(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) \\
= \; & ||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{y}||^2-||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2 \\
& \quad -||\mathbf{x}_1+\mathbf{y}||^2-||\mathbf{x}_2+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}_1||^2+||\mathbf{x}_2||^2 \\
= \; & \frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+2\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2\right)-||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2 \\
& -\frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+2\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||^2\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2+||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||^2\right)=0
\end{aligned}
$$

となって成り立つ．$(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \dfrac{\|\mathbf{x}+\mathbf{0}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{0}\|^2}{2} = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2} = 0$ と加法性から

$$(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が得られる．後は，自然数 n に対して

$$(n\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

であることを帰納法で示す．$n = 2$ は加法性で $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ とおけばよい．帰納法の一般段階は，面倒だが一本道．ノルムはノルムに関して連続なので，$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は λ に関して連続である．シュワルツの不等式を使って

$$\begin{aligned}
|(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mu\mathbf{x}, \mathbf{y})| &= |((\lambda-\mu)\mathbf{x}, \mathbf{y})| \\
&\leqq |\lambda-\mu|\, ||\mathbf{x}||\, ||\mathbf{y}||
\end{aligned}$$

とすればよりはっきりする．

そこで a^x を定義したときのように，まず有理数に対して示し，次に λ に関する連続性を使えば

$$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

を示すことができる．

(4) 中線定理は

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 2(\|\mathbf{x}||^2 + \|\mathbf{y}||^2)
\end{aligned}$$

と示すことができ，また，内積は

$$\begin{aligned}
||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - \|\mathbf{x}||^2 - \|\mathbf{y}||^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}$$

となる．

(5) $C[a, b]$ がノルム空間になることについては，三角不等式以外は明らか．三角不等式 $\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$

も，最大値をとる点が一致しているときは，絶対値に対する三角不等式からしたがう．最大値をとる点が関数によって異なるときは明らか．

中線定理が成り立たないこと．$[a,b]=[0,1]$ の場合に書く．$f(x)=x$，$g(x)=1-x$ とすると，$f+g=1$，$f-g=2x-1$ となり，$\|f\|=f(1)=1$, $\|g\|=g(0)=1$, $\|f+g\|=1$, $\|f-g\|=(f-g)(1)=(f-g)(0)=1$ である．したがって，$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=1+1=2$, $2(\|f\|^2+\|g\|^2)=2\times 2=4$ となって一致しない．

演習 56

(1) ノルム空間 V の 2 点 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ に対し，

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$$

と置けば，(V,ρ) が距離空間になることを示せ．

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 間の距離は

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

で与えられる．

例解．(2) は明らか．(1) は容易．距離の公理の (3) は

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||+||\mathbf{z}-\mathbf{y}|| \\ &\geqq ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\end{aligned}$$

と示される．

演習 57

(1) ユークリッド空間の有界閉集合の連続像は有界閉集合である．

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X に対して，次の 3 つは同値である．

(a) X は有界閉集合である．

(b) X は**点列コンパクト**である．すなわち，X の任意の点列は，X の点に収束する部分列を持つ．

(c) X は**コンパクト**である．すなわち，X の任意の開被覆は有限の部分被覆を持つ．開被覆とは X の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で，$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を満たすもののことであり，部分被覆とは，添字集合 Λ の部分集合に対して同じ性質を持つもののことである．

(3) コンパクト集合の連続像はコンパクトである．

例解． (1) は本文で示したようにすればよい．(2) (a) $\Rightarrow$ (b) は，$n = 1$ のときは演習 46(7) で示してある．有界だから座標面に平行な直方体に入れておいて，第 1 座標について収束する部分列をとり，その部分列に対し第 2 座標について収束する部分列をとり,.... とやればよい．(b)$\Rightarrow$ (a) は対偶を考えれば容易．

(c) $\Rightarrow$ (a) は対偶を考えて,「有界でない」か「閉でない」ならば「コンパクトでない」ことを示せばよい．X が有界でないとする．原点を中心とする開球（n 近傍）$B_n(\mathbf{0})$ を考えると，$\{X \cap B_n(\mathbf{0}) \mid n \geqq 1\}$ は X の開被覆だが，有限個では被覆にならない．もしなれば，有界になるから．

X が閉集合でないとする．点列 $\mathbf{a}_n \in X$ で，収束するが，極限 $\mathbf{a} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n$ が X の元でないものがある．$U_i = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| > \dfrac{1}{i}\}$ を考えると，$\{X \cap U_i \mid i \geqq 1\}$ は X の開被覆だが，有限個では被覆にならない．もしなれば，$\mathbf{a}_n$ は $\mathbf{a}$ に収束できないから．

(a) $\Rightarrow$ (c) は二分法を少し拡張して，2^n 分法でやる．X を有界閉集合とし，$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を開被覆とする．背理法の仮定として，有限の部分被覆が存在しないとする．有界な X を大きな立方体 $I_0 = [a_0^1, b_0^1] \times \cdots \times [a_0^n, b_0^n]$ で包んでおき，各座標に関して半分ずつに超平面で分割すると，I_0 に相似な 2^n 個の直方体 J_i に分かれる．すべての i に対して $X \cap J_i$ が有限個の U_λ で覆われることはないので，ある i に対し，$X \cap J_i$ を覆うには無限個の U_λ が必要になる．この J_i を I_1

とする．I_1 の各辺の長さは I_0 の対応する辺の長さの半分で，直径である対角線の長さも半分になる．I_1 に対しても同様のことを行い，I_2 を作る．この操作は無限に続けられ，直方体の列

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$$

が得られ，どの I_m も，$X \cap I_m$ を覆うには無限個の U_λ が必要になる．ここで，各座標に関して区間縮小法が適用できるので，$\bigcap_m I_m$ は 1 点 $\{c\}$ となる．I_m に対する条件から，$X \cap I_m \neq \emptyset$ となるので，$c_m \in X \cap I_m$ を取ることができる．c_m の第 i 座標を c^i_m とおくと，$|c^i_m - c^i| = \dfrac{a^i_0 - b^i_0}{2^m}$ を満たすので，$\lim_{m\to\infty} c_m = c$ となる．X は閉集合なので，$c \in X$ である．したがって $c \in U_\lambda$ となる λ がある．U_λ は開集合なので，$B_\varepsilon(c) \subset U_\lambda$ となる $\varepsilon > 0$ がある．この ε に対して，I_m の直径が $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さく，$\rho(c, c_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となる m がある．すると，$I_m \subset B_\varepsilon(c) \subset U_\lambda$ となって，I_m が 1 つの U_λ に含まれることになり，I_m の取り方に矛盾する．

(3) コンパクト集合 K の連続写像 f による像 $f(K)$ の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ があったとする．f が連続なので，$\{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は K の開被覆になる．K がコンパクトだから有限の部分被覆 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i}) \mid 1 \leqq i \leqq N\}$ があるが，その像 $\{U_{\lambda_i} \mid 1 \leqq i \leqq N\}$ は $f(K)$ の開被覆になっている．

演習 58

(1) 以下のものが弧状連結であることを示せ．

(a) 閉，開，半開区間．(b) 曲線．(c) 球，球体，ε 近傍．(d) 半空間，凸多面体（半空間の共通部分として表わすことのできる有界領域）．

(2) 弧状連結集合の連続像は弧状連結である．

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 X に対して，次の 2 つは同値である．

(a) X は弧状連結である．

(b) X は**連結**である．すなわち，X を空でない 2 つの開集合の交わらない和集合に分けることができない．つまり，$X = U \cup V$ で，$U \cap V = \emptyset, U, V \neq \emptyset$ を満たし，U, V が開集合であるようにはできない．

例解． (1) (a), (b), (d) は明らか．(c) 球面はすべての点を赤道に結び，赤道が 1 次元低い球面であることからその赤道に結び，それを繰り返せば，1 点と結ばれることがわかる．球体と ε 近傍はすべて中心と結ぶ．

(2) 連続写像と連続写像の合成が連続になることから．

(3) (a) $\Rightarrow$ (b): 弧状連結な X が連結でなかったとする．$X = U \cup V$ で，$U \cap V = \emptyset$, $U, V \neq \emptyset$ を満たし，U, V が開集合であるものがある．点 $u \in U$, $v \in V$ を選べば，それを結ぶ曲線 $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v$ を満たすものがある．$K = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in U\}$ を考えると，$0 \in K, 1 \notin K$ であり，$\xi = \sup K$ が存在する．$\gamma(\xi) \in X$ であるが，$\gamma(\xi) \in U$ としても，$\gamma(\xi) \in V$ としても矛盾が出て，$X = U \cup V$ に反する．

(b) $\Rightarrow$ (a): X は連結であるとする．点 $x \in X$ を固定し，$A = \{a \in X \mid x$ と a は X 内の曲線で結べる $\}$ とおく．$B = X \setminus A$ とおくと，$X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ である．$x \in A$ ゆえ，$A \neq \emptyset$ である．A, B が開集合であることを示せば，X が連結であることから $B = \emptyset$ となり，$X = A$ となって証明が終わる．

点 $a \in X$ をとる．X は開集合だから，$B_\varepsilon(a) \subset X$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある．

$a \in A$ のとき，$B_\varepsilon(a)$ が弧状連結なことから，$B_\varepsilon(a) \subset A$ となり，a は A の内点になって，A は開集合になる．

$a \in B$ のとき，$B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ を満たすので，$B_\varepsilon(a) \subset B$ となる．もし $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ なら，$B_\varepsilon(a)$ の中に x

と曲線で結ぶことのできる点があることになるが，そのときは a 自身が x と結ぶことができ，$a \in B$ に矛盾する．

演習 59

(1)（ジョルダンの曲線定理）γ が（平面）ジョルダン曲線であれば，$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0,1]) = U \cup V$，$U, V$ は連結開集合で，$\gamma([0,1])$ は U, V の共通の境界となる．とくに，U の点と V の点を結ぶ曲線は必ず $\gamma([0,1])$ と交わる．

(2) 単位円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対して (1) を示せ．

例解． (1) はここで解答を述べるには難しい．(2) S^1 の内部の点はすべて一旦中心と結ぶ．S^1 の外部の点は，半径に沿って一旦半径 2 の円周上の点の結べばよい．S^1 の内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ曲線 γ が存在したとする．$f(t) = \rho(\gamma(t), \mathbf{0})$ とおけば，$f(t)$ は連続で，$f(0) < 1$，$f(1) > 1$ となる．中間値の定理により $f(s) = 1$ となる s が存在するが，$\gamma(s)$ は S^1 上の点である．

演習 60　単位円周から直線への連続写像 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ には，同じ値を持つ 1 組の対蹠点がある．つまり，$\mathbf{p} \in S^1$ が存在して，$f(\mathbf{p}) = f(-\mathbf{p})$ となる．

例解． $g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - f(-\mathbf{p})$ とおけばよい．$\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ の連続性は読者に任す．

演習 61

(1)（丸餅の問題）有界領域 G と直線 L があったとし，L に垂直な直線の中に G の面積を 2 等分するものが存在する．[ヒント：直線 L を x 軸とし，直線 $S_t : x = t$ の左側の部分 $G_t = G \cap \{(x,y) \mid x < t\}$ の面積 $m(G_t)$ が t に関して連続であることを示し，$f(t) = m(G) - 2m(G_t)$ の正負を調べよ．]

(2)（大福餅の問題）2 つの有界領域 G_1, G_2 を同時に 2 等分する直線がある．

(3)（鏡餅の問題）有界領域 G を，直交する 2 直線によって 4 等分することができる．

例解． 本文参照．