下巻の演習の解答

解答のスペースが少なかったために，読者に分かりにくかったかもしれないものについて，順次解説を増やしていこうと思っている．解説が欲しいと思った読者は，掲示板かメールで連絡して欲しい．

第 1 章

定理 1.1　この証明をきちんと組み上げるのは結構面倒である．例えば，志賀浩二，砂田利一 [8] にはやさしい書き方だがきちんとした証明がある．長方形と三角形の面積公式を順に示し，多角形の三角形分割可能性を示し，分割の仕方によらないことを示すという手順を踏んでいる．

演習 1.2　(2)O での接線の傾きは

$$y'\left(\frac{a+b}{2}\right)=2\cdot\frac{a+b}{2}=a+b=\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

と，AB の傾きと一致する．このことから，

$$\frac{MO}{ON}=\frac{AN_A^1}{N_A^1N}=\frac{BN_B^1}{N_B^1N}=1$$

がわかる．

演習 1.3　$\theta=2\varphi$ とおき，円の半径を r とすれば，$a=2r\sin\varphi$ であり，扇形の面積は $\pi r^2\dfrac{\theta}{2\pi}$，半径と弦とで囲まれる三角形の面積は $ar\cos\varphi$ であるから，弓形の面積は

$$\pi r^2\frac{\theta}{2\pi}-\frac{ar\cos\varphi}{2}=\frac{a^2}{4\sin^2\varphi}\left(\frac{\theta}{2}-\sin\varphi\ \cos\varphi\right)=\frac{a^2}{4}\,\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

となる．

演習 1.4　(1) ピュタゴラスの定理と，三角形の相似と，三角形の角の 2 等分線が，底辺を角を挟む辺の比に分割することを使うだけでよい．

第 n 段階から次の段階に進むことは，どの n に対してもまったく同じように議論できる．また次の演習 1.5 でのように三角関数を使って表すことにすれば，半角の公式を使って，内接正 n 多角形の周の長さ q_n と外接正 n 多角形の周の長さ Q_n が

$$q_{2n}^2 = 2n(n - \sqrt{1-q_n^2/n^2}), \quad Q_{2n} = \frac{4n}{Q_n}(\sqrt{n^2+Q_n^2}-n)$$

という漸化式を満たすことが分かる．前者は容易．後者は

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\dfrac{1}{\cos\theta}-1}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}+1}$$

を使えばよい．また，容易に

$$Q_n = \frac{q_n}{\sqrt{1-q_n^2/n^2}}$$

も得られるが，これから，q_n の極限が Q_n の極限と一致することが分かる．中国魏晋期の数学者である劉徽は，内接正多角形による近似列を計算するだけで，π を上下から評価できることを幾何的に (面積に注目して) 示している．

(2) 複号のそれぞれの場合に 2 乗して確かめればよい．

第 2 章

演習 2.10

(1) $a^x/\log a$. (2) $(x\log x - x)/\log a$. (3) $\tan^3 x = \tan x\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ とおけ. $\dfrac{1}{2}\log(x^2+a^2)$. (4) $\dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$. (5) $\dfrac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)}$. (6) $\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$.

(7) $\dfrac{f(ax+b)}{a}$. (8) $t=\sqrt{x-a}$ と置いて置換積分. $\dfrac{2}{15}(3x+2a)\sqrt{x-a}^3$.

(9) $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$ を使う. $\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. (10) $\dfrac{1}{2}\log|x^2-a^2|$.

(11) $\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x+c)$. (12) $\log|\sin x| - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$. (13) $\dfrac{\tan^2 x}{2}+\log|\cos x|$.

(14) $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\arcsin x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$. (15) $\dfrac{x^3}{3}\arcsin x + \dfrac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{9}$.

(16) $-x\cos x+\sin x$. (17) $\dfrac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(18) $\dfrac{1}{2}\log|x^2-x-1| - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\log\left|\dfrac{2x-\sqrt{5}-1}{2x+\sqrt{5}-1}\right|$. (19) $(\log|x|)^2$.

(20) $\log|\log|x||$. (21) $\log|\log|\log|x|||$. (22) $x+\cos x$. (23) の解を C，(24) の解を S と書いて，それぞれ部分積分して，C, S に関する連立方程式を解く．

$$C = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x), \qquad S = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x).$$

(25) $\arcsin\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}$. (26) $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan\theta$ とおく. $\dfrac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}$.

第 3 章

演習 3.1〜3.4　ほとんどは, 三角関数の関係式と部分積分 $\displaystyle\int u'v\,dx=uv-\int uv'\,dx$ を行うだけ. 念のために, 各問での u' を挙げておく.

(1)$u'=1$. (2)$u'=\sqrt{x+a}$. (3) は例えば, 置換 $xt=\sqrt{ax-x^2}$ を行って, (1) を使えばよい. I_1 については, t の式で (1) を使うことになる.

(4)$u'=1$ (5)$x^n=x^n-x^{n-m}+x^{n-m}$ と置け. (6)$u'=e^{\pm x}$. (7)$u'=x^m$.

(8)$u'=\sin x$ で 1 回, $u'=\cos x$ で 1 回, 部分積分をする.

(9)$u'=(b-x)^n$ または $u'=(x-a)^m$. (10)$u'=(1-x)^m$ または $u'=(x+1)^n$.

(11)$u'=\tan^2 x=\sec^2 x-1$. (12)$u'=\sin x$. (13)$u'=\cos x$. (14)$u'=\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$. (15)$u'=\sec^2 x$. (16)$u'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. (17)$u'=\sin^m x\cos x$ または $u'=\sin x\cos^n x$. (18)$u'=\dfrac{\cos x}{\sin^m x}$. (19)$u'=\dfrac{\sin x}{\cos^n x}$. (20)$u'=\cos mx$. (21)$u'=\sin mx$.

演習 3.6　(1) は定義から明らか.

(2) は定義に従って計算すればよい. 代数的な言葉を使えば, このことは $\overline{}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 加群として準同型であるという.

(3)　　$Q(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0\qquad(a_i\in\mathbb{R})$

とするとき,

$$\begin{aligned}\overline{Q(z)}&=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1z}+\overline{a_0}\\&=\overline{a_n}\,\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z}+\overline{a_0}\\&=a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}+a_0=Q(\overline{z})\end{aligned}$$

となる.

(4) は (1) からすぐに確かめられる.

演習 3.7　(1)$\dfrac{1}{4\sqrt2}\log\dfrac{x^2+\sqrt2x+1}{x^2-\sqrt2x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt2}\arctan\dfrac{\sqrt2x}{1-x^2}$. これを $F_1(x)$ とする.

(2)$\dfrac{1}{4\sqrt2}\log\dfrac{x^2-\sqrt2x+1}{x^2+\sqrt2x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt2}\arctan\dfrac{\sqrt2x}{1-x^2}$. (3)$\dfrac14\dfrac{x}{x^4+1}+\dfrac34F_1(x)$.

(4) $\dfrac16\log\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt3}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt3}$.

(5) $\dfrac13\left(\dfrac12\log\dfrac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\sqrt3\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt3}\right)$.

(6) $\dfrac{1}{6}\log\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(7) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\sqrt{3}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

演習 3.8 (1)$t=\sqrt{x}$ とおく．答えは $-(1-\sqrt{x})^4/2$. (2)$t=\sqrt{4x+1}$ とおく．答えは $\dfrac{(2x-1)\sqrt{4x+1}}{12}$. (3)$t=x^2$ とおく．答えは $\dfrac{1}{2}\log|x^2+\sqrt{x^4+b}|$.

(4)$t=\sqrt{x^n+1}$ とおく．答えは $\dfrac{2}{n}\sqrt{x^n+1}+\dfrac{1}{n}\log\dfrac{\sqrt{x^n+1}-1}{\sqrt{x^n+1}+1}$.

(5) $t=\sqrt{x^n+1}$ とおく．答えは $\dfrac{1}{n}\log\dfrac{\sqrt{x^n+1}-1}{\sqrt{x^n+1}+1}$. (6) $t=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ とおき，演習 3.1(1) と演習 2.6(13) を使う．答えは $\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^4}}{4}(x^2+2)$.

演習 3.9 (1)$u=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{ex+f}}$ と置くと，$u^n=\dfrac{ax+b}{ex+f}$,

$$x=\frac{-fu^n+b}{eu^n-a},\quad dx=\frac{(af-be)nu^{n-1}}{(eu^n-a)^2}du$$

となり，u の有理関数の積分になる．$af\neq be$ なので，この置換は可逆な変数変換になっている．

(2)$t=\sqrt{ax+b}$ と置け．

演習 3.10 (1)$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\log\dfrac{e^x+2-\sqrt{5}}{e^x+2+\sqrt{5}}$. (2)$-\dfrac{1}{3}\log\dfrac{e^x-1}{e^x-4}$.

(3)$n\neq-1$ のとき $\dfrac{(\log x)^{n+1}}{n+1}$. $n=-1$ のときは演習 2.10(21).

(4)$-\dfrac{3e^{2x}+1}{12(e^{2x}+1)^3}$. (5)$e^x(x\log x-1)$. (6)$\dfrac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

演習 3.11 (1)$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置け．$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

(2)$t=\tan x$ と置け．$\dfrac{1}{2}\log\left|\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\right|+\dfrac{x}{2}$.

(3)$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置け．$\dfrac{x}{2}+\arctan\left(-3\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

第 4 章

演習 4.3 (1)$n\geqq 3$ だから，$(0,1/2]$ 上では，$1>\sqrt{1-x^n}\geqq\sqrt{1-x^2}$ であることと，

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{1/2} = \arcsin 1/2 = \frac{\pi}{6}$$

であることから．

(2)$n \geqq 3$ だから，$(0,1)$ 上では，$1 \leqq \sqrt{1+x^n} < \sqrt{1+x^2}$ であることと，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [\operatorname{arcsinh} x]_0^1 = \operatorname{arcsinh} 1 = \log(1+\sqrt{2})$$

であることから．最後の式は，$1 = \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ を解けば，$e^t = 1+\sqrt{2} > 0$ と得られる．

(3) 原始関数は求められないが，ある程度の評価ならできるという例になっている．$(0,1)$ 上では，

$$\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1+x^2)(1-x^2)} < \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$$

であることと，演習問題 2.9(12) より，

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\right]_0^1 = \frac{\arcsin 1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

であることから．(4) も (3) と同様．ただし，積分の値は

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad dx = [\arcsin x]_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

であることから．

(5) は (4) を少し手直ししたもので，$k^2 < 1$ であることから，$(0,1)$ 上では，

$$1 > 1-k^2x^2 > 1-k^2 > 0$$

であることを使えばよい．

演習 4.10　(1) 64/3. (2) 31/6. (3)$\pi^2/32$. (4)$\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \log\left|\dfrac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right|$.

［解説］

$\alpha = \dfrac{1+a^2}{2a}, \beta = \dfrac{1+b^2}{2b} > 1$ とおくと，被積分関数の分母は $\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)} = 2\sqrt{ab}\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}$ となる．

演習 2.9(48) を使うと，一般に，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}} = \log\left|\frac{\alpha+\beta}{2} - x + \sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}\right|$$

となるので，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left[\log\left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)}\right|\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-1-\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)}\right|}{\left|\frac{\alpha+\beta}{2}+1+\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}\right|}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\left|\frac{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\beta+1}}\right|^2$$

となる．$\alpha\pm1=\dfrac{1+a^2}{2a}\pm1=\dfrac{(1\pm a)^2}{2a}$, $\beta\pm1=\dfrac{(1\pm b)^2}{2b}$ であるので，

$$\left|\frac{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\beta+1}}\right|=\left|\frac{\dfrac{1-a}{\sqrt{2a}}-\dfrac{1-b}{\sqrt{2b}}}{\dfrac{1+a}{\sqrt{2a}}-\dfrac{1+b}{\sqrt{2b}}}\right|=\left|\frac{\sqrt{b}(1-a)-\sqrt{a}(1-b)}{\sqrt{b}(1+a)-\sqrt{a}(1+b)}\right|$$

$$=\left|\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1+\sqrt{ab})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{ab})}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right|$$

(5)$\pi^2/4$. ［ヒント］$x=\pi-t$ とおくと，演習 4.8 の (3) に帰着する．

(6) 答えは $(1+e^{-\pi})^2/2$. $\sin x$ の符号に注意すると，問題の積分は絶対値のない積分

$$\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

となる．また部分積分によって，$-(\sin x+\cos x)e^{-x}/2$ が被積分関数の原始関数になることがわかるので，積分の値は

$$-\left[\frac{(\sin x+\cos x)e^{-x}}{2}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{(\sin x+\cos x)e^{-x}}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=\frac{(e^{-\pi}+1)+(e^{-\pi}+e^{-2\pi})}{2}$$

となる．

(7)n が偶数のとき 0 で，n が奇数のとき π. 計算は，$n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}\sin 2mx&=\sum_{i=0}^{m-1}(\sin 2(m-i)x-\sin 2(m-i-1)x)+\sin 0x\\&=\sum_{i=0}^{m-1}2\sin x\cos(2m-2i-1)x=2\sin x\sum_{i=0}^{m-1}\cos(2i+1)x\end{aligned}$$

となり，$n=2m+1$ のとき

$$\sin(2m+1)x=\sum_{i=0}^{m-1}(\sin(2(m-i)+1)x-\sin(2(m-i)-1)x)+\sin x$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} 2\sin x\cos(2m-2i)x + \sin x$$
$$= 2\sin x \sum_{i=1}^{m} \cos 2ix + \sin x$$

となり，

$$\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\Big[\sin nx\Big]_0^{\pi} = 0$$

となることから．

演習 4.11　(1) 単振動の合成をすると

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta) \quad \text{ただし，}$$

$(\tan\theta = \dfrac{b}{a})$ となるが，$t = x+\theta$ とおくと，$\sin t$ は周期 2π なので，演習 2.5 から $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\, dx$ が得られる．ここで積分区間を，

$$\int_0^{2\pi} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

と分ける．第 2 項で $\pi - x = t$ とおくと

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\, dx = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin t)\, dt$$

となって，第 1 項に等しくなる．

(2)$t = x^2$ とおくと，

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\int_1^{a} + \int_a^{a^2}\right) f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

とし，2 項目で $s = \dfrac{a^2}{t}$ とおくと，

$$\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t} = \int_a^1 f\left(\frac{a^2}{s}+s\right)\frac{ds}{-s}$$

となって，第 1 項と一致する．

演習 4.12　(1)$\tan x$ が $x = 0, \dfrac{\pi}{4}$ で，$0, 1$ という値をとるので，演習 3.1(1) から．$n = 1$ のときは演習 2.8(29)．

(2) 演習 3.2(8) から，

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^n \sin x}{n!}\ dx = \left[-\frac{x^n \cos x}{n!} + \frac{x^{n-1}\sin x}{(n-1)!}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - I_{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - I_{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + I_{n-4}
\end{aligned}
$$

などとなり，

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = 1, \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\ dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 1
\end{aligned}
$$

であるから．

以下は積分区間の両端でお釣りの項が 0 になって，値がもっとはっきりと求まる．

(3) 演習 3.2(9) により，

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_a^b \frac{(x-a)^m}{m!}\frac{(b-x)^n}{n!}\ dx = I_{m+1,n-1} = \cdots \\
&= I_{m+n,0} = \int_a^b \frac{(x-a)^{m+n}}{(m+n)!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}
\end{aligned}
$$

(4) と (5) は (3) で $(a,b)=(0,1)$ または $(a,b)=(-1,1)$ とおけばよい．また (4) の最初の等式は，$x=\sin^2 t$ と置けばよい．

(6) は (5) で，$m=n$ とおくだけ．(7) は演習 3.4(17) から，(8) は演習 3.3(12) から．ただし，$J_{0,0}=\dfrac{\pi}{2}, J_{1,0}=1$ に注意．

(9)$x=a\sin^2 t$ とおくと，$\sqrt{ax-x^2}=a\sin t\cos t$ となるので，

$$
\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{ax-x^2}}\quad dx = 2a^n \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx = 2a^n J_{2n}
$$

となる．後半は $x=a\sin t$ とおけばよい．

演習 4.13　証明は容易．n を偶数と奇数にわけて，

$$
(2p)!!\,(2p-1)!! = (2p)!, \quad (2p+1)!!\,(2p)!! = (2p+1)!
$$

とすれば，見やすい．

第 5 章

演習 5.1　(1) 面積 S は，上の公式から

$$
\begin{aligned}
S_{c,d} &= \int_c^d (\sqrt{a^2-x^2}-(-\sqrt{a^2-x^2}))\,dx = 2\int_c^d \sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= \Big[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\Big]_c^d = dd'-cc'+a^2(\varphi-\psi)
\end{aligned}
$$

が得られる．2 行目の最初の等式は演習問題 2.9(12) による．D は直交座標では $(d,d'(=\sqrt{a^2-d^2}))$，極座標では (a,ψ) と表され，C は直交座標では $(c,c'(=\sqrt{a^2-c^2}))$，極座標では (a,φ) と表されるとしている．ここで，$\arcsin\dfrac{d}{a}=\dfrac{\pi}{2}-\psi$，$\arcsin\dfrac{c}{a}=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ に注意する．

たとえば，$d=a$，$c=d$ なら，$S_{d,a}=a^2\psi-dd'$ となり，(2) の月形の面積を与える．三角形 $\triangle ODB$ の面積は $\dfrac{1}{2}OH\times BD=OH\times BH=dd'$ であり，月形との面積の和は $a^2\psi$ となり，中心角 2ψ の扇形の面積となる．

ちなみに，$D=A$，$C=-A$ の場合，$S_{-a,a}=a^2\pi$ となって円の面積が再現する．

演習 5.2　中心を原点とする座標を入れ，扇形の 2 辺の偏角を φ,ψ とすると (図 5.5 参照)，$\psi-\varphi=\alpha$ である．弧の極方程式は，$r=r(\theta)=a$ となり，面積は

$$
\frac{1}{2}\int_\psi^\varphi r^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_\psi^\varphi d\theta=\frac{a^2}{2}[\,\theta\,]_\psi^\varphi=\frac{a^2(\psi-\varphi)}{2}=\frac{a^2\alpha}{2}
$$

となる．

このことは，計算によって扇形の面積を求めたというよりも，極座標表示による面積の公式が不当なものでないことを確かめたというべきである．

演習 5.4　(1)γ 上ではパラメータ θ に対して $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおけるので，

$$
(x+iy)^n=(\cos\theta+\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sin n\theta=P_n(x,y)+iQ_n(x,y)
$$

となり，$P_n=\cos n\theta$，$Q_n=\sin n\theta$ となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma (P_n(x,y)dxQ_n(x,y)dy) &= \int_0^{2\pi}(\cos n\theta(-\sin\theta)-\sin n\theta\cos\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\sin(n+1)\theta\,d\theta=0
\end{aligned}
$$

$$
\int_\gamma (P_n(x,y)dx+Q_n(x,y)dy)=\int_0^{2\pi}\cos(n+1)\theta\,d\theta=\begin{cases}0 & (n\neq -1)\\ 2\pi & (n=-1)\end{cases}
$$

(2)γ 上では $y=x$ なので，x を独立変数とすると，

$$
(x+iy)^n=x^n(1+i)^n=x^n\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)^n
$$

$$= x^n\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

となるので,

$$P_n(x,y) = x^n\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}, \qquad Q_n(x,y) = x^n\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$$

となり,

$$\int_\gamma P_n(x,y)dx = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}\int_0^1 x^n dx = \frac{\sqrt{2^n}}{n+1}\cos\frac{n\pi}{4},$$
$$\int_\gamma Q_n(x,y)dx = \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\int_0^1 x^n dx = \frac{\sqrt{2^n}}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}$$

となる.

第 6 章

演習 6.1 (1) は第 5 章 4 節の最後の結果と本質的に同じ. (2) は

$$dx = \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$
$$dy = \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi$$
$$dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

から, 第 5 章 4 節の最後の計算と同様に, 外積を取って

$$\begin{aligned} dxdydz &= (r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi \\ &\qquad - r^2\sin\theta\sin\varphi(\sin^2\theta\sin\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi))drd\theta d\varphi \\ &= r^2(\sin\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\sin^2\varphi)drd\theta d\varphi \\ &= r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{aligned}$$

とすればよい.

演習 6.2 (1)$x = t$ とすればよい.

(2) $\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \dot{z} = \dot{z}$

だから,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

となる.

(3)

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\,\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\,\dot{\theta}\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$$

だから,

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\cos\theta^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + 2r\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$\dot{z}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

であり,

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$$

となる.

演習 6.8　(1) 円柱座標の逆変換の式から

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho},\quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{-y}{\rho},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-y}{\rho^2},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2}$$

が得られ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} + \frac{x}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

となり,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{x^2+y^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{x^2+y^2}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\end{aligned}$$

となる．(2) を示す前に，注意 2 の公式を示しておこう．計算が複雑なので，偏導関数の簡略記号を使って $x_s = \dfrac{\partial x}{\partial s}$ などと書くことにする．まず面積要素は

$$dx = x_s ds + x_t dt,\quad dy = y_s ds + y_t dt$$

から，外積の計算により

$$dxdy = (x_s y_t - x_t y_s)dsdt = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}dsdt = Jdsdt$$

となる．曲面 F が $z = z(x,y)(x,y) \in D$ により，また $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)(s,t) \in D'$ と表されていることから，(x,y) と (s,t) が変数変換になっており，$J \neq 0$ となっているとしてよい．$J > 0$ としてもよい ($J < 0$ なら s と t を交換すればよい).
曲面積の公式の被積分部分は

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy &= \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}Jdsdt \\
&= \sqrt{J^2+(Jz_x)^2+(Jz_y)^2}dsdt
\end{aligned}
$$

となる．この平方根の中身 G を計算するのだが，z_x, z_y を s, t で表しておく必要がある．

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s, \quad z_t = z_x x_t + z_y y_t$$

から，z_x, z_y を解くと，

$$z_x = \frac{z_s y_t - z_t y_s}{x_s y_t - x_t y_s} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}, \quad z_y = \frac{z_s x_t - z_t x_s}{x_t y_s - x_s y_t} = \frac{-1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}$$

となり，求める式が得られる．

さて (2) に戻ろう．$(s,t)=(\theta,\varphi)$ として，3 つのヤコビアンを計算すればよい．r が従属変数であることに注意して

$$
\begin{aligned}
x_\theta &= (r_\theta \sin\theta + r\cos\theta)\cos\varphi, & x_\varphi &= (r_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi)\sin\theta, \\
y_\theta &= (r_\theta \sin\theta + r\cos\theta)\sin\varphi, & y_\varphi &= (r_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi)\sin\theta, \\
z_\theta &= r_\theta\cos\theta - r\sin\theta, & z_\varphi &= r_\varphi\cos\theta
\end{aligned}
$$

として，

$$J = x_\theta y_\varphi - x_\varphi y_\theta = r\sin\theta(r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)$$

は容易だが，他の計算は少し工夫して

$$
\begin{aligned}
&(z_\theta x_\varphi - z_\varphi x_\theta)^2 + (z_\theta y_\varphi - z_\varphi y_\theta)^2 \\
&\quad = ((x_\theta)^2 + y_\theta)^2)(z_\varphi)^2 + ((x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2)(z_\theta)^2 - 2(x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi)z_\theta z_\varphi
\end{aligned}
$$

とし，まず，

$$
\begin{aligned}
&(x_\theta)^2 + (y_\theta)^2 = (r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)^2 \\
&J^2 + ((x_\theta)^2 + (y_\theta)^2)(z_\varphi)^2 = (r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)^2(r^2\sin^2\theta + r_\varphi^2\cos^2\theta)
\end{aligned}
$$

を確かめて，次に

$$(x_\varphi)^2 + (y_\varphi)^2 = (r_\varphi^2 + r^2)\sin^2\theta, \quad x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi = r_\varphi\sin\theta(r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)$$

と計算したら，後は腕力で

$$
\begin{aligned}
G = {} & (r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)^2(r^2\sin^2\theta + r_\varphi^2\cos^2\theta) \\
& + (r_\varphi^2 + r^2)\sin^2\theta(r_\theta\cos\theta - r\sin\theta)^2 \\
& - 2r_\varphi^2\sin\theta\cos\theta(r_\theta\sin\theta + r\cos\theta)(r_\theta\cos\theta - r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

$$= r^2((r^2+r_\theta^2)\sin^2\theta + r_\varphi^2)$$

と計算する．大変なようだが，順に $r^4, r^3r_\theta, r^2r_\theta^2, r^2r_\varphi^2, rr_\theta r_\varphi^2, r_\theta^2 r_\varphi^2$ の係数を計算すれば難しくはない．

第 7 章

演習 7.1　(1) 密度に触れない場合には密度 ρ は一様であると考えている．すると，$W = \displaystyle\int_a^b \rho\,dx = \rho(b-a)$ であり，

$$C_\rho(f) = \frac{1}{W}\int_a^b x\rho\,dx = \frac{\rho}{\rho(b-a)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

となり，線分の中点が重心になる．

(2)$a = c$ または $b = d$ であれば，(1) と同じなので，線分の中点となる．$a \neq c$ とする．傾きを $\lambda = \dfrac{d-b}{c-a}$ とおくと，線分 PQ は関数 $y = b+\lambda(x-a)$ と表される．弧長は $s = s(x) = \sqrt{1+\lambda^2}\,(x-a)$ である (演習問題 5.5(1))．重さ W は長さ L によって $W = \rho L$ と表される．

$$\bar{x} = \frac{\rho}{\rho L}\int_a^c x\frac{ds}{dx}\,dx = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{L}\int_a^c x\,dx = \frac{\displaystyle\int_a^c x\,dx}{c-a} = \frac{c+a}{2}$$

となる．$\bar{y}$ も同様で，$\bar{y} = \dfrac{b+d}{2}$ となる．よって重心は線分の中点である．

(3) 中心を原点とし，さらに回転させて，$\{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq a, -\alpha \leqq \theta \leqq \alpha\}$ であるとする．曲線の式は $r = a$ であり，$\rho(s) = 1$ とすると，$W = l(C) = 2a\alpha$ である．$\bar{y} = 0$ は明らか．

$$\bar{x} = \frac{1}{W}\int_{-\alpha}^{\alpha} a\cos\theta\frac{ds}{d\theta}d\theta = \frac{a^2}{2a\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

となる．特に半円 (弧) の場合，$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ で，重心は $\left(\dfrac{2a}{\pi}, 0\right)$ となる．

演習 7.4　(1) y 座標が一致する条件から，$3(W_- + W_+) = 2W = 2(2a\rho + W_- + W_+)$，つまり $W_- + W_+ = 4a\rho$ が得られ，$W_\pm = \rho\sqrt{(b\pm a)^2+c^2}$ であることから，これは Q, R を焦点とする楕円を表す．さらにこの式を x 座標が一致する条件に代入すると，$W_- = W_+$ が得られ，それから $b = 0$ が得られる．そして，$b = 0$ を $W_- + W_+ = 4a\rho$ に代入すると，$c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ が分かる．

(2) これは幾何の問題．[5] 第 3 章 §3 を参照してもらうことにしよう．

演習 7.9　(1)l を x 軸とする座標を入れ，γ を $(x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$ と書くと，仮定から $y(t) \neq 0$ であるので，$y(t) > 0$ と仮定することができる．さらに標準パラメータ s を使えば，曲線の重心の y 座標 η は,

$$\eta = \frac{\displaystyle\int_0^{l(\gamma)} y\,ds}{l(\gamma)}$$

であり，これを使って回転体の表面積を表せば,

$$2\pi \int_0^{l(\gamma)} y\,ds = 2\pi\eta \cdot l(\gamma)$$

となる．(2) 平面図形が図 5.1 の右図のように $D = \{(x,y) \mid g(x) \leqq y \leqq f(x),\ a \leqq x \leqq b\}$ と書かれている場合に示す．さらにまず，$D' = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq f(x),\ a \leqq x \leqq b\}$ である場合に示す．D' を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V と，D の重心の y 座標 η は (演習 7.3(3) により)

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx, \quad \eta = \frac{1}{S}\int_a^b \frac{f(x)^2}{2} dx$$

だから (S は D' の面積),

$$V = \pi \cdot 2\eta S = (2\pi\eta) \cdot S$$

となる．

演習 7.10　(1) 円 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ を回転させたものだから，微分して $2(x-a) + 2yy' = 0$ であり，表面積の公式の被積分関数は

$$y\sqrt{1+y'^2} = y\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{y^2}} = y\sqrt{\frac{a^2}{y^2}} = a$$

となる．円 $x^2+y^2 = b^2$ との交点の x 座標は $\dfrac{b^2}{2a}$ だから，$2\pi \displaystyle\int_0^{b^2/2a} a\,dx = \pi b^2$ となる．

(2) (1) と同様の計算により，被積分関数は r となる,

演習 7.11　(1) y について解けば，$y = y_{\pm} = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ となり，図を描けば，体積 V は

$$V = \pi \int_{-a}^{a} (y_+^2 - y_-^2) dx = 4\pi \int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2-x^2} dx = 4b\frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b$$

となる．表面積 S は

$$1+\Big(\frac{dy_\pm}{dx}\Big)^2 = 1+\left(\pm\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2}$$

を計算してから

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-a}^{a}(y_+ + y_-)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int_{-a}^{a}\frac{4ab\pi}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= 4ab\pi\Big[\arcsin\frac{x}{a}\Big]_{-a}^{a} = 4ab\pi^2 \end{aligned}$$

とすればよい．実は演習 7.9 を使えば，$V = 2\pi b\cdot\pi a^2$，$S = 2\pi b\cdot 2\pi a$ と，ほとんど計算しなくても求められる．

(2) (1) から B_+ の体積は $|B_+| = \pi^2 a^2 b$ である．重心の x, z 座標は 0 であり，y 座標を求めると，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|B_+|}\int_{B_+} y\ dxdydz \\ &= \frac{1}{|B_+|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\{(b+r\cos\theta)\cos\varphi\cdot r(b+r\cos\theta)\}\,dr \\ &= \frac{1}{|B_+|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\pi}\left\{\frac{a^4}{4}\cos^2\theta\cos\varphi+\frac{2}{3}a^3b\cos\theta\cos\varphi+\frac{a^2b^2}{2}\cos\varphi\right\}d\theta \\ &= \frac{1}{|B_+|}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\frac{a^4\pi}{4}+\pi a^2b^2\right\}\cos\varphi d\varphi = \frac{a^4\pi+4\pi a^2b^2}{2\pi^2a^2b} = \frac{a^2+4b^2}{2\pi b} \end{aligned}$$

となる．ここで，$a \to 0$ とした極限 $\dfrac{2b}{\pi}$ は半円周の重心の y 座標になっている (演 7.1(3))．

(3) 輪環体 B の x 軸のまわりの慣性モーメント J_x は

$$\begin{aligned} J_x &= \int_B \rho(y^2+z^2)dxdydz = \rho\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a dr\int_0^{2\pi}r(b+r\cos\theta)^3\ d\theta \\ &= 2\pi\rho\int_0^a(2\pi b^3 r+3\pi b r^3)dr = \pi^2a^2b\rho\Big(2b^2+\frac{3}{2}a^2\Big) \end{aligned}$$

となる．ここで，$\pi a^2\rho$ を ρ と置きかえて $a\to 0$ とすれば $2\pi b^3$ が得られている．

第 8 章

演習 8.6　(1) 体積 V と面積 S と重心 $(0, 0, \bar{z})$ は，$x = 2\sqrt{az}$ から，

$$V = \pi\int_0^b x^2 dz = \pi\int_0^b 4az dz = 2\pi ab^2,$$

$$S = 2\pi\int_0^b x\sqrt{1+\Big(\frac{dx}{dz}\Big)^2}dz = 2\pi\sqrt{a}\int_0^b x\sqrt{z+a}dz$$

$$= \frac{4\pi(\sqrt{a(a+b)^3}-a^2)}{3}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2\pi ab^2}\pi\int_0^b zx^2dz = \frac{1}{2ab^2}\int_0^b 4az^2dz = \frac{2}{b^2}\frac{b^3}{3} = \frac{2b}{3}$$

となる．

(2) 2 曲線の交点の z 座標は $c-a$ であり，円の z 軸との交点の z 座標は $a\pm c$ である．問題の領域は，球を放物面で切り分けた 2 つの領域に分けられる．まず，放物面の外側の領域の体積は，半径 r，高さ $(c-a)-(a-c)=2(c-a)$ の球欠の体積 (演習 6.4(1) 参照) から，$b=c-a$ とした (1) の体積を引いた

$$\pi(2c-2a)^2\left(c-\frac{2c-2a}{3}\right)-2\pi a(c-a)^2 = \frac{2\pi(c-a)^2(2c+a)}{3}$$

となり，内側の体積は球の体積からこれを引いた

$$\frac{4\pi c^3}{3}-\frac{2\pi(c-a)^2(2c+a)}{3} = \frac{2\pi a(3c^2-a^2)}{3}$$

となる．これはまた高さ $2(c-a)$ の球欠の体積に，$b=c-a$ とした (1) の体積を足しても得られる．

(3) (x,y) 平面上，母線の方程式は $y=-\dfrac{4(b-a)}{h^2}x^2+b$ となる．体積は

$$\pi\int_{-h/2}^{h/2} y^2dx = 2\pi\int_0^{h/2}\left(-\frac{4(b-a)}{h^2}x^2+b\right)^2dx = \frac{\pi h(3a^2+4ab+8b^2)}{15}.$$

(4)$x=x$ 断面は，2 辺の長さが $\sqrt{a-x}$, $b\sqrt{a-x}$ の直角 2 等辺三角形だから，体積は

$$\int_0^a \frac{b(a-x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left[abx-\frac{b}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}.$$

第 9 章

この章の演習で使えるように，定義に戻って，重心を丁寧に計算してみよう．密度は $\rho=1$ とする．$D=\{(x,y)\mid x\in[a,b], 0\leqq y\leqq f(x)\}$ に対して，D の面積 S と重心 $(\bar{x},\bar{y})$ は,

$$S=\int_D dxdy = \int_0^d\left(\int_0^{f(x)}dy\right)dx = \int_0^b f(x)\,dx,$$

$$S\bar{x}=\int_D x\,dxdy = \int_0^b xf(x)\,dx,\quad S\bar{y}=\int_D y\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^b f(x)^2\,dx$$

となる．曲線 $\gamma: y=f(x), x\in[a,b]$ の長さ L と重心 $(\bar{x},\bar{y})$ は,

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx,\quad L\bar{x}=\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx,\quad L\bar{y}=\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

となる．D と γ を x 軸の周りに回転させて得られる回転体の体積と回転面の面積とそれぞれの重心は演習 7.8 で与えられている．

演習 9.1　(1)$y=f(x)=a\cosh\dfrac{x}{a}$, 面積 S と重心 $(\bar{x},\bar{y})$ は,

$$S=a\int_0^b\cosh\frac{x}{a}\,dx=a^2\left[\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b=a^2\sinh\frac{b}{a},$$

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{a}{S}\int_0^b x\cosh\frac{x}{a}\,dx=\frac{a^2}{S}\left[x\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b-\frac{a^2}{S}\int_0^b\sinh\frac{x}{a}\,dx\\&=\frac{a^2}{S}\left(b\sinh\frac{b}{a}-a\left(\cosh\frac{b}{a}-1\right)\right)=b-a\tanh\frac{b}{2a},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\frac{1}{S}\frac{a^2}{2}\int_0^b\cosh^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{S}\frac{a^2}{4}\int_0^b(1+\cosh\frac{2x}{a})\,dx\\&=\frac{1}{S}\frac{a^2}{4}\left[x+\frac{a}{2}\sinh\frac{2x}{a}\right]_0^b=\frac{1}{S}\frac{a^2}{4}\left(b+\frac{a}{2}\sinh\frac{2b}{a}\right)=\frac{b+\dfrac{a}{2}\sinh\dfrac{2b}{a}}{4\sinh\dfrac{b}{a}}\end{aligned}$$

である．(2) $y'=\sinh\dfrac{x}{a}$ で，$\sqrt{1+y'^2}=\cosh\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{a}f(x)$．(1) と比較すると，長さは $L=\dfrac{S}{a}=a\sinh\dfrac{b}{a}$ で，重心は一致する．

(3) 表面積は (2) の $S\bar{y}$ と同じ計算になって，$F=\pi a\left(b+\dfrac{a}{2}\sinh\dfrac{2b}{a}\right)$ となり，重心の x 座標（他は 0）は (1) の計算を利用すると，容易に

$$\begin{aligned}&\frac{1}{F}\int_0^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{2F}\int_0^b xy^2\,dx=\frac{a^2}{2F}\int_0^b x\cosh^2\frac{x}{a}\,dx\\&=\frac{a^2}{4F}\int_0^b x(1+\cosh\frac{2x}{a})\,dx=\frac{a^2}{4F}\left(b+\frac{ab}{2}\sinh\frac{2b}{a}-\frac{a^2}{4}\left(\cosh\frac{2b}{a}-1\right)\right).\end{aligned}$$

(4) 体積も同じ計算になって $V=\dfrac{aF}{2}$ となり，重心の x 座標（他は 0）は

$$\frac{1}{V}\int_0^b xy^2\,dx=\frac{2}{aF}\int_0^b x\cosh^2\frac{x}{a}\,dx=\frac{a}{F}\left(b+\frac{ab}{2}\sinh\frac{2b}{a}-\frac{a^2}{4}\left(\cosh\frac{2b}{a}-1\right)\right).$$

演習 9.3　$\theta\to\theta-\pi, x\to x-a\pi, y\to-(y-2a)$ と変換すれば，C の方程式が得られる．

(1) 演習 9.2(2) と同じようにすれば，$ds=2a\cos\dfrac{\theta}{2}$ となるので，$y=a(1-\cos\theta)=$

$2a\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ であることから，

$$s = 2a\int_0^\theta \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2} = 4a\sqrt{\frac{y}{2a}} = 2\sqrt{2a}\sqrt{y}$$

となる．

(2) 上巻の演習??にある曲率半径の公式を，弧長 s を使って書き換えれば (˙ を θ に関する微分とする)

$$r = \frac{\dot{s}^3}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|} = \frac{(2a)^3\cos^3\dfrac{\theta}{2}}{a^2(1+\cos\theta)} = 4a\cos\frac{\theta}{2}$$

となり，$r^2+s^2 = (4a)^2$ となる．

(3) 積分方程式 $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+\dot{y}^2}dx = \sqrt{x}$ を解くという問題である．両辺を微分すれば

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{1-4x}{4x}}$$

となり，右辺を (+ の方をとって) 積分するには，演習 3.8(6) と同様の技法を使えばよい．答えは

$$y = x\sqrt{\frac{1-4x}{4x}} - \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{1-4x}{4x}} + c$$

となり，原点を通ることから

$$0 = 0 - \frac{1}{4}\arctan+\infty + c = -\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} + c \implies c = \frac{\pi}{8}$$

となる．これを $\theta = \pi - 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-4x}{4x}}$ を使ってパラメータ表示すれば，

$$\begin{aligned}
&\frac{1-4x}{4x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = \cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}},\\
&x = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos\theta),\\
&y = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{8} = \frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{8} = \frac{1}{8}(\theta+\sin\theta)
\end{aligned}$$

となって，$a = \dfrac{1}{8}$ のときの曲線 C となる．

演習 9.7　$x = \sin^{2n}t$，$y = \cos^{2n}t$ と置け．(1) 演習 4.12(7′) から

$$4\int_0^1 ydx = 4\int_0^{\pi/2} 2n\sin^{2n-1}t\cos^{2n+1}tdt$$

$$= 8n\frac{(2n-2)!!(2n)!!}{(4n)!!} = \frac{4(n!)^2}{(2n)!}.$$

(2)$[0,\pi/2]$ 上で $\dfrac{ds}{dt} = 2n\sin^{2n-1}t\cos^{2n-1}t$ だから，(1) と同様にすれば，$\dfrac{8(n!)^2}{(2n)!}$ が得られる．(3) 体積は $4n\pi J_{2n-1,4n+1} = 2\pi\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$ で，表面積は $8n\pi J_{2n-1,4n-1} = 6\pi\dfrac{n!(2n)!}{(3n)!}$ である．

第 10 章

演習 10.4　(1) の前半．$0<a<1$ とする．$0<c<d$ に対して，

$$\int_c^d \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x^a}\right]_c^d - \int_c^d \frac{a\cos x}{x^{a+1}}\,dx$$
$$= \frac{\cos d}{d^a} - \frac{\cos c}{c^a} - \int_c^d \frac{a\cos x}{x^{a+1}}\,dx$$

であり，$|\cos x| \leqq 1$ であることから，

$$\left|\int_c^d \frac{\sin x}{x^a}\,dx\right| \leqq \frac{1}{c^a} + \frac{1}{d^a} + \left|\int_c^d \frac{a\cos x}{x^{a+1}}dx\right| \leqq \frac{1}{c^a} + \frac{1}{d^a} + \int_c^d \frac{a}{x^{a+1}}dx$$
$$= \frac{1}{c^a} + \frac{1}{d^a} + \left[\frac{-1}{x^a}\right]_c^d = \frac{2}{c^a}$$

となる．$M = \left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$ (>1) とおくと，$c>M$ に対して

$$\left|\int_c^d \frac{\sin x}{x^a}\,dx\right| \leqq \frac{2}{c^a} < \frac{2}{M^a} = \varepsilon$$

となり，定理 10.2(2) により収束する．

今度は $\dfrac{|\sin x|}{x^a}$ を考える．$[n\pi,(n+1)\pi]$ 上で，$x = n\pi + t$ とおけば，

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(n\pi+t)^a}dt > \frac{1}{(n+1)^a\pi^a}\int_0^\pi \sin t\,dt$$
$$= \frac{2}{(n+1)^a\pi^a} > \frac{2}{\pi^a}\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x^a}\,dx$$

となり，これを足しあげれば，$1-a>0$ だから

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^a}dx > \frac{2}{\pi^a}\int_1^{n+2}\frac{1}{x^a}\,dx = \frac{2}{(1-a)\pi^a}\left[x^{1-a}\right]_1^{n+2}$$
$$= \frac{2((n+2)^{1-a}-1)}{(1-a)\pi^a} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

となって，発散することが分かる．

演習 10.5 (5) 任意に $0<\lambda<1$ をとると，演習 4.15(5) により，

$$\frac{x^{\lambda}\log x}{(1+x)^2}\overset{x\to 0+}{\longrightarrow}0,\qquad \frac{x^{1+\lambda}\log x}{(1+x)^2}=\frac{\log x}{x^{\lambda-1}}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^2}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$$

となるので，定理 10.3 の (1) と (2) により，0 でも ∞ でも，広義積分は絶対収束する．そこで積分区間 $[0,\infty)$ を $[0,1]$ と $[1,\infty)$ に分け，後者で，$t=1/x$ とおくと，

$$\int_1^{\infty}\frac{\log x}{(1+x)^2}dx=\int_1^{0}\frac{\log t^{-1}}{(1+\frac{1}{t})^2}\frac{-1}{t^2}dt=-\int_0^1\frac{\log t}{(1+t)^2}dt$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(1+x)^2}dx&=\int_0^1\frac{\log x}{(1+x)^2}dx+\int_1^{\infty}\frac{\log x}{(1+x)^2}dx\\&=\int_0^1\frac{\log x}{(1+x)^2}dx-\int_0^1\frac{\log t}{(1+t)^2}dt=0.\end{aligned}$$

(6)-1．(7)$\frac{\pi}{2}$．(8)$\frac{\pi}{2}$．(9)$\pi+\log(2+\sqrt{5})$．(10)π．(11) 演習 3.7(1) より，$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$．

(12) 演習 3.7(4) より，$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$．

演習 10.8 (1)1, (2)$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, (3)$\frac{\pi}{2}$.

演習 10.10 (1) は積分区間の両端で広義積分になることがあるが，定理 10.3 により絶対収束であることが分かる．(2) 部分積分して

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{\infty}x^se^{-x}\,dx=[-x^se^{-x}]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}sx^{s-1}e^{-x}\,dx=s\Gamma(s).$$

(3) $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=[-e^{-x}]_0^{\infty}=1$ であり，後は帰納的に

$$\Gamma(n)=n\Gamma(n-1)=\cdots=(n-1)!\cdot\Gamma(1)=(n-1)!$$

となる．このことが $0!=1$ と定義する理由でもある．

(4) (1) の定義式で，$x=t^2$ とおけばよい．これから，演習 10.9(3) の積分は $\frac{1}{2}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{2}$ となる．

(5) は演習 10.11 の (2) と (3) を $p=q=\frac{1}{2}$ として使えば，

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)=2\displaystyle\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi$ が得られる．これはまた，ガンマ

関数の定義に戻って，$x=y^2$ とおけば，演習 10.7 の積分になる．

(6) 演習 4.3(1) で粗い不等式しか得られなかった積分も，ガンマ関数を使えば求められる．$x^n=t$ とおくと，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\,dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right)$$

となるが，後は (5) と演習 10.11(3) を使えばよい．

(7) 演習 10.11 (3) から $B\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}$ となり，一方，演習 10.11 (2'), (2), (3) から

$$\begin{aligned} &B\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right) = \frac{2}{2^{s-1}}\int_0^{\pi/2}\sin^{s-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{s-1}}B\left(\frac{s}{2},\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{s-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{s-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \end{aligned}$$

となるので，両式を等置して，$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ を 1 つずつ消去すればよい．

(8) (7) で $s=2p$ とおけばよい．

演習 10.11　(1) は演習 10.10(1) と同様．(2) 定義式で $x=\cos^2\theta$ とおけばよい．

(2') (2) を使うと，

$$\begin{aligned} &B\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{p-1}\theta\,\sin^{p-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{p-2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{p-1}2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2^{p-1}}\int_0^{\pi}\sin^{p-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2^{p-1}}\left(\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\right)\sin^{p-1}\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2^{p-1}}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{p-1}\varphi\,d\varphi+\int_{-\pi/2}^{0}\sin^{p-1}\varphi\,d\varphi\right) = \frac{1}{2^{p-2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{p-1}\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

(3) (2) と演習問題 10.10(4) から，

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^{2p-1}e^{-x^2}y^{2q-1}e^{-y^2}\,dxdy \\ &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}r^{2p+2q-2}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,rdrd\theta \\ &= 2\int_0^{\infty}r^{2p+2q-1}e^{-r^2}dr\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,rd\theta \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q) \end{aligned}$$

となる．また，(1) の表示のままでも，$u=x+y$, $y=uv$ とおけば，この等式が得られる．ただし，積分領域は $[0,\infty)\times[0,\infty)$ から $[0,\infty)\times[0,1]$ に変わり，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$ であることに注意する．

(4) (3) と演習問題 10.10(3) から直ちに得られるが，演習 4.12(7) を書き直した (7') を使って，(2) から，

$$B(p,q) = 2\frac{(2p-2)!!(2q-2)!!}{(2p+2q-2)!!} = \frac{2^{p+q-1}(p-1)!(q-1)!}{2^{p+q-1}(p+q-1)!} = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

としてもよい．

第 11 章

定理 11.2　$f+g$ だけ示しておく．$f+$ g の積分可能性と定積分の値とを同時に示すことができる．まず，

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx$$

を示す．分割 Δ の各小区間 I_i において，$\inf f(x)+\inf g(x) \leqq \inf(f(x)+g(x))$ であるので，

$$s_\Delta(f)+s_\Delta(g) \leqq s_\Delta(f+g) \leqq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx$$

となる．次に下限の定義により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，分割 $\Delta^1, \Delta^2 \in D(I)$ が存在して，$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < s_{\Delta^1}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx < s_{\Delta^2}(g) - \frac{\varepsilon}{2}$ となる．そこで，Δ^1, Δ^2 の共通細分 Δ をとれば，

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx &< s_{\Delta^1}(f)+s_{\Delta^2}(g)-\varepsilon \leqq s_\Delta(f)+s_\Delta(g)-\varepsilon \\ &\leqq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx - \varepsilon\end{aligned}$$

となって, 上の不等式が得られる．上ダルブー和と上積分に関して同様の不等式が得られるので，

$$\underline{\int_a^b} f dx + \underline{\int_a^b} g dx \leqq \underline{\int_a^b} (f+g) dx \leqq \overline{\int_a^b} (f+g) dx \leqq \overline{\int_a^b} f dx + \overline{\int_a^b} g\,dx \quad (*)$$

が得られ，f と g の積分可能性から，一番左と右が等しくなり，中の 2 つの式が等しくなる．

スカラー倍については，上と同様にして値と収束性が同時に示される．他の場合では，演習 11.2，有界性，三角不等式などを組み合わせれば，値までは得られないが，収束性を証明することができる．すぐには証明できなくても，時間を掛けて証明にトライしてほしいが，どうしてもという場合には，[16]『解析教程 [新装版]』(下) 第 III 章￥S 5 の定理 5.9 の証明を参照すればよい．

演習 11.2　上限を M，下限を m と書く．$M-m$ は明らかに $|f(x)-f(x')|$ の上界である．上巻の定義??から，任意に $\varepsilon>0$ を与えると，$f(\xi)>M-\varepsilon$, $f(\eta)<m+\varepsilon$ を満たす，$\xi,\eta\in I$ が存在する．したがって，$f(\xi)-f(\eta)>M-m+2\varepsilon$ となり，$M-m$ は $|f(x)-f(x')|$ の最小上界 (=上限) である．

演習 11.3　(1) ディリクレ関数 f に対しては，任意の点の近傍に有理数も無理数もあるので，任意の分割 $\mathit{\Delta}$ の任意の部分区間 I_i に対して，$F_i=1$, $f_i=1$ となって，定理 11.1(3) を満たさないので，積分可能でない．

修正ディリクレ関数 f に対しては，$\varepsilon>0$ を任意に固定すると．$X_\varepsilon=\{x\in[0,1]\mid f(x)>\varepsilon\}$ は有限集合である ($q<1/\varepsilon$ を満たす自然数 q は有限個だから)．$k=\#X$ とし，分割 $\mathit{\Delta}$ を $d(\mathit{\Delta})<\dfrac{\varepsilon}{k}$ を満たし，X の点が分点にならないように選ぶと，

$$S_\Delta \leqq \varepsilon+kd(\mathit{\Delta})<2\varepsilon$$

となる．明らかに $s\mathit{\Delta}=0$ なので，$S_\Delta-s\mathit{\Delta}<2\varepsilon$ であり，定理 11.1(3) を満たす．

(2)$f(x)=x$ のとき，区間 $I=[a,b]$ の n 分割を考えると，$x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ であり，

$$S_\Delta-s_\Delta=\sum_{i=1}^n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

となって，定理 11.1(3) を満たすので，積分可能である．したがって，

$$\begin{aligned}S_\Delta&=\sum_{i=1}^n\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\\&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}=\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

となる．$f(x)=x^2$ のときも同様で，答えは $\dfrac{b^3-a^3}{3}$.

演習 11.4　(1)$[a',b']$ の分割に対し，その外部だけで分点を追加する $[a,b]$ の分割を考えよ．(2) 不連続点を含む区間だけ取り出して，評価すればよい．

演習 11.5　(1) それぞれ,

$$f(x)=\frac{1}{n}\quad\left(\frac{1}{n}<x\leqq\frac{1}{n+1}\right),\qquad g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x>0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

が例になる．$g(x)$ が連続なことは，上巻演習??(3) 参照.

(2) リプシッツ連続の定義から，$x,y\in I$ に対して，$|f(x)-f(y)|\leqq K|x-y|$ を満たす定数 K があるので，任意の $\mathit{\Delta}\in D(I)$ に対して，

$$Var_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqq K \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = K(b-a)$$

となるから．

定理 11.3

(3) (2) と定理 11.3(2) から．

(4) I 上 $f(x) \leqq M$ であるとする．$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと，

$$|F(x) - F(x')| \leqq \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \leqq M|x - x'|,$$

であり，$\Delta \in D(I)$ に対して，変動量は

$$Var_{\Delta}(F) = \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}| \leqq M \sup_{\Delta \in D(I)} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = M(b-a)$$

と有界になる．

(5) (2) から，単調増加関数に対して示せばよい．f を $[a,b]$ 上，単調増加とする．自然数 $n > 0$ に対して，$X_n = \{x \in [a,b] \mid f(x+0) - f(x-0) \geqq \dfrac{1}{n}\}$ を考える．ここで，$f(x+0)$ と $f(x-0)$ は f の x での左極限と右極限を表している．X_n は有限集合である．実際，X_n が m 個の点 $\{x_i \mid 1 \leqq i \leqq m\}$ を含んでいたとしても，

$$\frac{m}{n} \leqq \sum_{i=1}^{m} (f(x_i+0) - f(x_i-0) \leqq f(b) - f(a)$$

となり，m は $n(f(b) - f(a))$ を超えることができない．それゆえ，不連続点の集合

$$X = \{x \in [a,b] \mid f(x+0) - f(x-0) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

は，(有限集合の可算和なので) 高々可算である．

演習 11.6 平均値の定理 (1) から，例えば，

$$\left| \overline{\int_a^{x'}} f(x)\,dx - \overline{\int_a^{x}} f(x)\,dx \right| \leqq \left| \overline{\int_x^{x'}} f(x)\,dx \right| \leqq M|x' - x|$$

である．ここで，M は $|f(x)|$ の上界をとればよい．可積分についても同様．さらに，上巻の演習**??**により，一様連続である．

定理 11.9 $[a_1,b_1]$ の分割 $\Delta_1 = \{a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1\}$ と $[a_2,b_2]$ の分割 $\Delta_2 = \{a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2\}$ の直積で定まる Ω の分割を Δ とする．分割の小区間を $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $J_j = [y_{j-1}, y_j]$ とおき，$|I_i| = x_i - x_{i-1}$, $|J_j| = y_j - y_{j-1}$ とし，$m_{ij}(f) = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in I_i \times J_j\}$ とおく．下ダルブー和

$$s_\Delta = \sum_{i,j} m_{ij}(f)|I_i||J_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} m_{ij}(f)|I_i|\right)|J_j|$$

を考える．y を固定して，$f(x,y)$ を x の関数と考えたものを $g_y(x)$ とすると，$y \in J_j$

$$m_i(g_y) = \inf\{g_y(x) \mid x \in I_i\} = \inf\{f(x,y) \mid x \in I_i\} \geqq m_{ij}(f)$$

であり，

$$\sum_{i=1}^{m} m_{ij}(f)|I_i| \leqq \sum_{i=1}^{m} m_i(g_y)|I_i| \leqq \underline{\int_{a_1}^{b_1}} g_y(x)\,dx = \underline{F}_1(y)$$

となる．したがって，$y \in J_j$ について下限を取ると $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} m_{ij}(f)|I_i| \leqq m_j(\underline{F}_1)$ となり，

$$s_\Delta \leqq \sum_{j=1}^{n} m_j(\underline{F}_1)|J_j| \leqq \underline{\int_{a_2}^{b_2}} \underline{F}_1(y)\,dy$$

となる．Δ に関して上限をとれば

$$\underline{\iint_\Omega} f(x,y)\,dxdy \leqq \underline{\int_{a_2}^{b_2}}\left(\underline{\int_{a_1}^{b_1}} g_y(x)\,dx\right)dy \leqq \overline{\int_{a_2}^{b_2}}\left(\underline{\int_{a_1}^{b_1}} g_y(x)\,dx\right)dy$$

となる．s_Δ の代わりに S_Δ で同じようにすれば

$$\overline{\iint_\Omega} f(x,y)\,dxdy \geqq \overline{\int_{a_2}^{b_2}}\left(\overline{\int_{a_1}^{b_1}} g_y(x)\,dx\right)dy \geqq \overline{\int_{a_2}^{b_2}}\left(\underline{\int_{a_1}^{b_1}} g_y(x)\,dx\right)dy$$

が得られ，$f(x,y)$ の下積分と上積分を結ぶ不等式の連鎖が得られるが，$f(x,y)$ は可積分なので，その不等式の列は等式の列

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \underline{\int_{a_2}^{b_2}} \underline{F}_1(y)\,dy = \overline{\int_{a_2}^{b_2}} \underline{F}_1(y)\,dy = \overline{\int_{a_2}^{b_2}} \overline{F}_1(y)\,dy$$

になる．つまり，$\underline{F}_1(y)$ が可積分であり，積分値も等しくなる．また，不等式の連鎖の 3 番目を $\displaystyle\underline{\int_{a_2}^{b_2}} \overline{F}_1(y)\,dy$ に変えることができ，$\overline{F}_1(y)$ の可積分性も導かれる．

y の代わりに x を先に積分して上の議論を繰り返せば，$\underline{F}_2(x)$, $\overline{F}_2(x)$ に対しても同じことが示される．

演習 11.8　$f_n'(x)$ の一様収束極限を $g(x)$ と書くと，定理 11.11 によって．

$$\int_a^x g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) = f(x)-f(a)$$

となる．上巻の定理??により，$g(x)$ は連続関数であり，この式を微分すれば，定理 11.6 により，$g(x) = f'(x)$ となる，

演習 11.9 （1） $\int_0^1 x^\alpha \, dx = \dfrac{1}{\alpha+1}$，（2） $\int_0^1 e^{\alpha x} \, dx = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha}$ を α で微分する．

定理 11.12 (i) から (iii) は $(x+y)^n = {}_nC_i x^i y^{n-i}$ を，$k = 0,1,2$ 回微分したあと，$y = 1-x$ と置けば得られる．(iv) は左辺を展開して，(i) から (iii) を使えばよい．

次に，$f(x)$ が一様連続なことから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|x-y| < \delta$ なら $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ を保証する $\delta > 0$ がとれ，また $|f(x)-f(y)| \leqq M$ $(x,y \in [0,1])$ を満たす M が存在する．

そこで，$|f(x)-p_n(x)| = \sum_{i=0}^n \left| f(x) - f\left(\dfrac{i}{n}\right)\right| \varphi_{n,i}(x)$ を評価するのだが，$|x-i/n| < \delta$ を満たす i に対しては上の ε で評価できる．$|x-i/n| \geqq \delta$ を満たす i に対しては，(iv) を使うと

$$\sum_{|x-i/n| \geqq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \varphi_{n,i}(x) = \sum_{|x-i/n| \geqq \delta} \frac{\left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right|}{(i-nx)^2} (i-nx)^2 \varphi_{n,i}(x)$$
$$\leqq \sum_{|x-i/n| \geqq \delta} \frac{M}{(n\delta)^2}(i-nx)^2 \varphi_{n,i}(x) \leqq \frac{M}{(n\delta)^2} \sum_{i=1}^n (i-nx)^2 \varphi_{n,i}(x)$$
$$= \frac{M}{(n\delta)^2} nx(1-x) = \frac{M}{n\delta^2} x(1-x) \leqq \frac{M}{\delta^2}\frac{1}{n}$$

となる．M と δ は n によらず定まっているので，n を十分大きくすればよい．

第 12 章

演習 12.1 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ の $t=1$ でのテイラー展開に $t = x^2$ を代入すれば $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ が得られる．(2) は $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}$ から直ちに得られる

演習 12.2 (1) $\int_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left[\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2\right]_0^1 = \dfrac{\pi^2}{8}$ であり，演習 12.1(1) から，左辺を展開し，$I_{2n+1} = \int_0^1 \dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ を計算する．

(2) 左辺を偶数番目と奇数番目に分ければよい．

演習 12.3 (1) 逆正接関数の加法公式 $\arctan x \pm \arctan y = \arctan \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$，$2\arctan x = \arctan \dfrac{2x}{1-x^2}$ に代入すればよい．

(2) 右辺を (1) で変形すればよい．

(3) (2) により，$t(1)=t(2)+t(3)$ が直ちに得られ，また $3^2+1=2\cdot 5$ から $t(3)=t(5)+t(8)$ が得られて，シュルツの公式が得られる．また $t(2)=t(3)=t(7)$ を使えば，演習の後の補足の式が得られる．

マチンの式を発見するのはかなりの試行錯誤が必要だろうが，証明するだけなら (1) を何度か使えばよい．実際，

$$4t(5)=2t\left(\frac{24}{10}\right)=2t\left(\frac{12}{5}\right)=t\left(\frac{\frac{12^2}{5^2}-1}{2\frac{12}{5}}\right)=t\left(\frac{144-25}{120}\right)=t\left(\frac{119}{120}\right),$$

$$t(1)+t(239)=t\left(\frac{239-1}{239+1}\right)=t\left(\frac{238}{240}\right)=t\left(\frac{119}{120}\right)=4t(5)$$

とすればよい．

(4) $n=0$ のとき $F_1F_2-F_0F_3=1\cdot 1-0\cdot 2=1$ で成立．n まで成り立つとすると，$F_{n+2}F_{n+3}-F_{n+1}F_{n+4}=(F_{n+1}+F_n)F_{n+3}-F_{n+1}(F_{n+3}+F_{n+2})=F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$ となる．

$F_4=F_3+F_2=2+1=3$ だから，$t(1)=t(2)+t(3)=t(F_3)+t(F_4)$ によって，$n=1$ のときは成立．n 番目まで成り立つとすると，上に示した漸化式と (1) により，

$$t(F_{2n+2})=t\left(\frac{F_{2n+2}F_{2n+5}}{F_{2n+5}}\right)=t\left(\frac{F_{2n+3}F_{2n+4}-(-1)^{2n+2}}{F_{2n+4}+F_{2n+3}}\right)=t(F_{2n+3})+t(F_{2n+4})$$

が得られ，$n+1$ 番目が成り立つことになる．

演習 12.4

［解答］(1) 積分範囲で $0\leqq x^8\leqq \dfrac{1}{2^4}<1$ なので，

$$\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx=\int_0^{1/\sqrt{2}}x^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}x^{8n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{8n+k}}{8n+k}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2^{k/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n(8n+k)}=\frac{1}{2^{k/2}}S_k$$

が得られる．S_k の収束はかなり速く，例えば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}16^{-n}$ よりも速い．正項級数なので和の順序によらず，示すべき公式は

$$\begin{aligned}\pi&=4S_1-2S_4-S_5-S_6\\&=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,dx\\&=\int_0^1\frac{16(y^5+y^4+2y^3-4)}{y^8-16}\,dy\end{aligned}$$

となる．ここで，$y=\sqrt{2}x$ という変数変換をしている．分母の因数分解

$$
\begin{aligned}
y^8-16 &= (y^4-4)(y^4+4)\\
&= (y^2-2)(y^2+2)(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)
\end{aligned}
$$

を参考にすれば，分子も

$$y^5+y^4+2y^3-4 = (y-1)(y^2+2)(y^2+2y+2)$$

と分解されることに気がついて，結局，公式の右辺は

$$
\begin{aligned}
&4S_1-2S_4-S_5-S_6 = \int_0^1 \frac{16(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}\,dy\\
&= \int_0^1 \frac{4y}{y^2-2}\,dy - \int_0^1 \frac{4y-8}{y^2-2y+2}\,dy\\
&= \Big[2\log|y^2-2|\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{4y-4}{y^2-2y+2}\,dy + \int_0^1 \frac{4}{(y-1)^2+1}\,dy\\
&= -2\log 2 - 2\Big[\log|y^2-2y+2|\Big]_0^1 + 4\Big[\arctan(y-1)\Big]_0^1\\
&= -2\log 2 + 2\log 2 - 4\arctan(-1) = \pi
\end{aligned}
$$

となる．

(2) 実数 x の 16 進展開で，小数点以下 N 桁が知りたければ，$16^N x$ の小数点以下を切り捨て，残りの整数を 16 で割った余りをとればよい．

そこでまず，

$$D_n = \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}$$

を計算すると，

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{960n^2+898n+376}{(8n+1)(8n+4)(8n+5)(8n+6)}\\
&\leqq \frac{960n^2+1224n+378}{(8n+1)(8n+4)(8n+5)(8n+6)}\\
&= \frac{120n+63}{(8n+1)(8n+4)(8n+5)} \leqq \frac{120n+75}{(8n+1)(8n+4)(8n+5)}\\
&= \frac{15}{(8n+1)(8n+4)} \leqq \frac{16}{8n(8n+4)} = \frac{1}{2n(2n+1)}
\end{aligned}
$$

となり，$n \geqq 2$ で既に 16 進の次の桁にしか影響せず，さらに n を大きくすればどんどんと小さくなる．そして，

$$16^N\pi = \sum_{n=0}^{N} 16^{N-n} D_n + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{D_n}{16^{n-N}}$$

の 16 進展開の第 1 桁だけが必要なのである．N が十分に大きければ，第 2 項は 16 進数

の小数点以下第 N 桁にまったく影響を及ぼさない．第 1 項の方もその整数部分，しかも 1 の位しかいらないのだから，計算量は飛躍的に少なくなり，個別の努力を集積することが可能になる．

演習 12.6　(1) $\dfrac{dx^{s-1}}{ds} = x^{s-1}\log x$.

(2) (1) により，$\Gamma(s)u^2+2\Gamma'(s)u+\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^\infty (u+\log x)^2\,dx \geqq 0$ となるので，u に関する判別式が $\Gamma'(s)^2-\Gamma(s)\Gamma''(x)\leqq 0$ を満たす．したがって，

$(\log\Gamma(s))'' = \left(\dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right)' = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma''(x)-\Gamma'(s)^2}{\Gamma(s)^2} \geqq 0$ となって，$\log\Gamma(s)$ は凸となる．

(3) $\varphi_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n & 0\leqq x\leqq n \\ 0 & x\geqq n \end{cases}$

とおくと，$\varphi_n(x)\geqq 0$ は単調に増大し e^{-x} に収束する．ディニの定理 (定理 11.10) により，任意の有界閉区間上でこの収束は一様収束になる．したがって，

$$\int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^\infty x^{s-1}\varphi_n(x)\,dx \to \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(s).$$

より詳しく言えば，$x^{s-1}(e^{-x}-\varphi_n(x))\geqq 0$ の積分が 0 に収束することを示すのに，0 の十分近くと ∞ の十分近くでは $x^{s-1}e^{-x}$ の広義積分が収束することを使い，残りの有界閉区間上で，一様収束性を使えばよい．

(4) (3) の lim の中を，$x = nt$ と変換すると

$$\int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 n^{s-1}t^{s-1}(1-t)^n n\,dt = n^s\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^n dt$$

$$= n^s B(s,n) = n^s\frac{\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n)} = \frac{n^s\cdot n!\Gamma(s)}{s(s+1)\cdots(s+n)\Gamma(s)} = \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

(5) (4) で逆数を取ると

$$\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!\,n^s} = e^{-s\log n}s\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$= e^{-s\log n}\prod_{k=1}^n e^{\frac{s}{k}}\cdot s\prod_{k=0}^n\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}} = e^{s(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n)}s\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} se^{-\gamma s}\prod_{k=1}^\infty\left(1+\frac{s}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}$$

(6) 左辺を，$x = s+t$ と座標変換すると

$$\Gamma(s+1) = \int_{-s}^\infty (s+t)^s e^{-s-t}\,dt = s^s e^{-s}\int_{-s}^\infty\left(1+\frac{t}{s}\right)^s e^{-t}\,dt$$

となる．この積分が $\sim\sqrt{2\pi s}$ であることを示せばよい．

そこで，$u = t/\sqrt{s}$ とおくと，

$$\int_{-s}^{\infty}\left(1+\frac{t}{s}\right)^{s} e^{-t}\,dt = \sqrt{s}\int_{-\sqrt{s}}^{\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{s}}\right)^{s} e^{-u\sqrt{s}}\,du$$

となる．後は，右辺の積分の $s\to\infty$ での極限が収束することを示せばよい．もし収束すれば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}$ である（$s\to\infty$ で被積分関数の漸近挙動は $\exp\left(-\sqrt{s}u+s\log\left(1+\dfrac{u}{\sqrt{s}}\right)\right) = \exp\left(-\dfrac{u^2}{2}+O\left(\dfrac{u^3}{\sqrt{s}}\right)\right)$ となることと，値については演習 10.8(1) による）．

積分を u の正負で分ける．$u>0$ のとき，$\left(1+\dfrac{u}{\sqrt{s}}\right)^{s} e^{-u\sqrt{s}}$ が単調に減少して $e^{-u^2/2}$ に収束し，$u<0$ のとき，$\left(1+\dfrac{u}{\sqrt{s}}\right)^{s} e^{-u\sqrt{s}}$ が単調に増大して $e^{-u^2/2}$ に収束することが示されれば，(3) の証明と同様にして収束性が証明できる．

そこで，$\sigma=\sqrt{s}$ と置いて，$f(\sigma,u) = \log\left(\left(1+\dfrac{u}{\sigma}\right)^{\sigma^2} e^{-u\sigma}\right) = \sigma^2\log\left(1+\dfrac{u}{\sigma}\right)-\sigma u$ が 0 に単調に収束することを示せばよい．そのためには，

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma,u)\geqq 0 \quad (-\sigma<u\leqq 0), \qquad \frac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma,u)\leqq 0 \quad (0<u)$$

を示せば十分である．

まず，$f(\sigma,0)=0$ に注意すると，$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma,0)=0$ である．あとは，$-\sigma<u$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\sigma,u)\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\sigma,u)\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{-\sigma u}{\sigma+u} = \frac{-u^2}{(\sigma+u)^2}\leqq 0$$

であることから，示される．

演習 12.8 (1) ガウスの公式から $s\to 0+$ で $\Gamma(s)\sim\dfrac{1}{s}$ と言ってもよいが，$\displaystyle\lim_{s\to 0+} s\Gamma(s) = \lim_{s\to 0+}\Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1$ としてもよい．したがって，演習 10.1(1) により $I=\displaystyle\int_0^1 \log\Gamma(s)\,ds$ は収束する．$t=1-s$ とおくと $I=\displaystyle\int_0^1 \log\Gamma(1-t)\,dt$ となる．相補公式を使えば，

$$2I = \int_0^1 \log\Gamma(s)\Gamma(1-s)\,ds = \int_0^1 \log\frac{\pi}{\sin\pi s}\,ds = \int_0^1 \log\pi ds - \int_0^1 \log\,\sin\pi s\,ds$$

となり，演習 10.6(2) により，$\displaystyle\int_0^1 \log\,\sin\pi s\,ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log\,\sin s\,ds = -\log 2$ となるので，$2I=\log 2\pi$ となる．

(2) $\displaystyle\int_1^{x+1}\log\Gamma(s)\,ds = \int_0^x \log\Gamma(s+1)\,ds = \int_0^x \log s\Gamma(s)\,ds$ だから，

$\displaystyle\int_x^{x+1}\log\Gamma(s)\,ds=\left(\int_1^{x+1}-\int_1^x\right)\log\Gamma(s)\,ds=\int_0^x\log s\,ds+\int_0^1\log\Gamma(s)\,ds=$ $x\log x-x+\dfrac{1}{2}\log 2\pi.$

(3) ワイエルシュトラスの無限積表示（演習 12.6(5)）を使えば,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}&=\frac{d}{ds}\log\Gamma(s)=\frac{d}{ds}\left(-\log s-\gamma s+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s}{n}-\log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right)\right)\\&=-\frac{1}{s}-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right).\end{aligned}$$

(4) (3) から $\dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=-\dfrac{1}{n}-\gamma+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$

(5) スターリングの公式（演習 12.6(6)）から,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+a)}{x^a\Gamma(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}(x+a)^{x+a-1/2}e^{-x-a+1}}{x^a\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x+1}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\left(1+\frac{a}{x}\right)^{a-1/2}e^{-a}=e^a\cdot1\cdot e^{-a}=1.\end{aligned}$$

演習 12.9　(1) ベータ関数の定義式を $x=\dfrac{y}{1+y}$ で変換せよ.

(2) (1) で，$bx^q=at$ とおけば，$x=\dfrac{(at)^{1/q}}{b^{1/q}}$, $dx=\dfrac{1}{q}\dfrac{a^{1/q}}{b^{1/q}}t^{\frac{1}{q}-1}$ となる.

(3) (i) $a=b=1$, $q=3$, $r=1$ で，$p=1$ または 2 なので，(2) から，積分は共に $\dfrac{1}{3}B\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\dfrac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ となる．相補公式を使った.

(ii) $a=b=1$, $q=4$, $r=1$ で，$p=1$ または 3 なので，(2) から，積分は共に $\dfrac{1}{4}B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\dfrac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ となる.

(iii) $a=b=1$, $p=1$, $q=2$, $r=n$ とおくと，(2) から

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}=\frac{\sqrt{\pi}^2}{2}\frac{\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)}{(n-1)!}.$$

(iv) $a=b=1$, $p=x$, $q=r=1$ とおくと，(2) から $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{t-1}\,dx}{1+x}=B(1-x,x)=$ $\dfrac{\pi}{\sin\pi t}$. (v) $s=t^4$ とおくと，$\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

演習 12.10　(2) の証明で残されていた (a), (b), (c) を示しておく．$x=\cos\theta$ とお

くと,

$$F(t)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)}},\quad G(t)=\int_0^1\frac{\sqrt{1-t+tx^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

となり,

$$\begin{aligned}G'(t)=&\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)}}=\frac{1}{2t}\int_0^1\frac{(tx^2-t+1-1)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)}}\\=&\frac{1}{2t}(G(t)-F(t))\end{aligned}$$

となって,(b) が得られる.$F'(t)$ の方は,演習 2.10(26) を使って部分積分すれば,

$$\begin{aligned}F'(t)=&\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)^3}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{\sqrt{(1-t+tx^2)^3}}\\=&\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}\,x}{(1-t)\sqrt{1-t+tx^2}}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{x\,dx}{(1-t)\sqrt{1-t+tx^2}}\\=&\frac{1}{2t(1-t)}\int_0^1\frac{tx^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)}}=\frac{1}{2t(1-t)}\int_0^1\frac{(1-t+tx^2-1+t)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t+tx^2)}}\\=&\frac{1}{2t(1-t)}(G(t)-(1-t)F(t))=\frac{G(t)}{2t(1-t)}-\frac{F(t)}{2t}\end{aligned}$$

となって,(a) が得られる.(c) は $I(t)$ を t で微分して,

$I'(t)=F'(t)G(1-t)-F(t)G'(1-t)-F'(1-t)(G(t)-F(t))+F(1-t)(G'(t)-F'(t))$

に (a) と (b) を代入すれば 0 になることがわかる.

(2) (ii) $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときは $k'=k$ であり,ルジャンドルの関係式に (i) を代入すればよい.

(i) 第 2 項の積分で,$t=\tan\theta$ とおけば,$\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}\,d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$ となり,演習 9.9(2) の解答でのように $\sin\varphi=\sqrt{2}\sin\theta$ とおけば,この積分は $K\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる.

また,第 2 項の積分で,$s=t^4$ とおけば,相補公式(演習 12.7(2))と演習 10.10(5) を使って

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 s^{-3/4}(1-s)^{-1/2}\,ds=\frac{\sqrt{2}}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\\=&\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{2}\pi}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

が得られる.

演習 12.11　$k = \dfrac{b}{a}$ と置くと，

$$aI(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}} = K(k')$$

となる．また，$u = b\tan\theta$ と置くと，

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)(ab+u^2)}}$$

となる．第 2 式でさらに $2u = v - \dfrac{ab}{v}$ と v に変換すると，

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_{\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{2(1+\frac{ab}{v^2})\,dv}{\sqrt{(a^2+v^2)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(v+\frac{ab}{v}\right)}}$$

$$= 2\int_{\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}} = I(a.b)$$

となる．最後の等式は，$w = \dfrac{ab}{v}$ と変換すると $\displaystyle\int_{\sqrt{ab}}^{\infty}$ が $\displaystyle\int_0^{\sqrt{ab}}$ に変わることによる．

そこで，$m = ag(a,b)$ とおけば，

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = \cdots = I(m,m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{m} = \frac{\pi}{2m}$$

が得られる．