上巻の演習の解答

解答のスペースが少なかったために，読者に分かりにくかったかもしれないものについて，順次解説を増やしていこうと思っている．解説が欲しいと思った読者は，掲示板かメールで連絡して欲しい．

第 1 章

1.1. 問題よりも少し一般にして考えてみる．アキレスの速さが亀の r 倍であったとする．計算を簡単にするため亀が分速 1m であるとしよう．

アキレスが亀の後方 rm のところにいた時点を $t_0 = 0$ とし，その時の亀の位置を $x_0 = 0$m，アキレスの位置を $y_0 = -r$m とする（以下単位の m を省略）．第 n ステップでの時刻 t_n（以下単位の分を省略）は亀の位置 x_n と等しく，アキレスの位置 y_n は常に x_{n-1} に等しい．この差 $x_n - x_{n-1}$ をアキレスが進むのには $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{r}$ 掛かり，次のステップまでに亀は $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{r}$ 進む．初期条件から $x_1 - x_0 = 1$ だから，

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{r} = \cdots = \frac{x_1 - x_0}{r^{n-1}} = \frac{1}{r^{n-1}}$$

となり，

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}}$$

となる．$n \to \infty$ のとき，刻まれていった時間は

$$t_n = x_n = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} \longrightarrow \frac{r}{r-1}$$

に近づく．元の問題のように $r = 1000$ とすれば，$1 + \dfrac{1}{999}$ 分後にはアキレスは亀に並んでいる．これはまた，

$$x = t, \quad y = -r + rt \text{ から } x = y \text{ とおけば } t = \frac{r}{r-1}$$

と，1 次方程式を解くだけでも得られる．どこにパラドクスがあるというのだろう．

公比 $\dfrac{1}{r}$ が有理数なら，有限等比級数の和も無限等比級数の和も有理数になって，有限な有理時間後にアキレスは亀に追いついてしまう．どこに不思議があるのだろう．やはり当時としては「有限の時間の中に，無限の時刻を刻みこむことができてよいのだろうか？」ということだったのではないのだろうか．現代的には，無限の操作を認めるかどうかという問題に転化していると言えなくもない．それが古代からの通約不可能性問題，つまり，無理数の存在と絡んだ興味を誘って，一般の人々の理解と不理解の狭間あたりのグレーゾーンに位置するがために，いつまでも人の関心を引きつづけているのかもしれない．

1.2． ヒントの通りに，$e > \dfrac{1}{p}$ を満たす整数 $p > 0$ と，$q \leqq p\alpha < q+1$ を満たす整数 q をとる．これを p で割れば，$\dfrac{q}{p} \leqq \alpha < \dfrac{q+1}{p}$ が得られる．$h = \dfrac{q}{p}$, $k = \dfrac{q+1}{p}$ と置けばよい．

1.3． $\beta - \alpha > \dfrac{1}{p}$ を満たす整数 $p > 0$ と，$q \leqq p\alpha < q+1$ を満たす整数 q をとる．すると，$\dfrac{q}{p} \leqq \alpha < \dfrac{q+1}{p} \leqq \alpha + \dfrac{1}{p} < \beta$ となる．そこで，$h = \dfrac{q+1}{p}$ とおけばよい．

1.4． (1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする．定義 1.2 から，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても $|a_n - a| < 1$ を満たす．集合 $I = \{a_i \mid i < N\} \cup \{a \pm 1\}$ の最大値 M を上界，最小値 m を下界とすればよい．

(2) 定義 1.2 から，ある数 N があって「どんな $n \geqq N$ に対しても $|a_n - a| < \dfrac{a}{2}$」を満たす．ゆえに，$a_n > a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$ となる．

1.5． (1) 定義 1.2 から，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N_a, N_b があって，どんな $n \geqq N_a$ に対しても $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たし，どんな $n \geqq N_b$ に対しても $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす．$N = \max\{N_a, N_b\}$ と置けば，どんな $n \geqq N$ に対しても $|(a_n + b_n) - (a+b)| \leqq |a_n - a| + |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ を満たす．

(2) 演習 1.4 (1) から，どんな n に対しても $|a_n|, |b_n| < M$ を満たす数 M がある．(1) と同じようにすれば，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N が

あって，どんな $n \geqq N$ に対しても $|a_n - a|, |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ を満たす．だから，
$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leqq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| < 2\dfrac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon$
を満たす.

(3) ヒントのように $a_n = 1$ とする．演習 1.4 (2) から，どんな $n \geqq N'$ に対しても $|b_n| > \dfrac{|b|}{2}$ を満たす N' がある．また，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N'' があって，どんな $n \geqq N''$ に対しても $|b_n - b| < \dfrac{b^2\varepsilon}{2}$ を満たす. $N = \max\{N', N''\}$ と置けば，どんな $n \geqq N$ に対しても

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|bb_n|} < \frac{2b^2\varepsilon}{2|b|^2} = \varepsilon$$

を満たす.

1.6． (1) a の符号が $\pm$ と同じなら，$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \pm\infty$ は明らか．$a < 0$ とする．定義 1.3 から，任意の数 $M > 0$ に対して，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても $b_n > M - a + 1$ である．演習 1.4 の証明から，同じ N に対して，$n \geqq N$ なら $a_n > a - 1$ としてもよい．そのとき，$a_n + b_n > (a-1) + (M - a + 1) = M$ となる．$a > 0$ の時の $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$ も同様である.

積の場合，$a > 0$ のときに，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ を示す．演習 1.4 (2) と定義 1.3 から，任意の数 $M > 0$ に対して，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても，$a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ と $b_n > \dfrac{2M}{a}$ を満たすので，$a_n b_n > \dfrac{a}{2}\dfrac{2M}{a} = M$ を満たす.

商の場合．任意に $\varepsilon > 0$ を与える．$M > \dfrac{|a| + 1}{\varepsilon}$ となるほど大きく数 $M > 0$ をとると，演習 1.4 (2) と定義 1.3 から，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても，$|a_n| < |a| + 1$ と $b_n > M$ を満たすので，

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{|a| + 1}{M} < \varepsilon$$

となる.

(2) の評価は (1) より易しい.

1.7． (1) $\deg P = k$ として，$P(n) = an^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k$ と書くと，

$$P(n) = an^k \left(1 + \frac{a_1}{a}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a}\frac{1}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{a}\frac{1}{n^k}\right)$$

となる．それゆえ演習 1.5 と 1.6 から，$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} an^k = \mathrm{sgn}(a)\infty$ となる．

(2) $\deg P = h$, $\deg Q = k$ で，それぞれ最高次の係数を $a, b(\neq 0)$ とすると，(1) から $\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} an^h$, $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \lim_{n\to\infty} bn^k$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^h}{bn^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{b} n^{h-k}$$

となる．つまり，a, b の符号と k, h の大小によって，$\pm\infty$ か $\dfrac{a}{b}$ か 0 かになる．

第 2 章

定理 2.1． (2) を (1) と同じように数学的帰納法で示す．$n = 2$ のとき，両辺とも $(1+h)^2$ となって成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定して，

$$\begin{aligned}
(1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \\
&\geqq (1+h)\left(1+kh+\frac{(k-1)k}{2}h^2\right) \\
&= 1+(k+1)h+\left(k+\frac{(k-1)k}{2}\right)h^2+\frac{(k-1)k^2}{2}h^3 \\
&\geqq 1+(k+1)h+\frac{k(k+1)}{2}h^2
\end{aligned}$$

を導けばよい．

2.1． 例を少し挙げておこう．$n \geqq 1$ とする．

1. $a_n = 0 < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.
2. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n} < b_n = 1$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} b_n$.
3. $a_n = \dfrac{1}{2n} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.
4. $a_n = \dfrac{1}{n^2} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.
5. $a_n = \dfrac{1}{e^n} < b_n = \dfrac{1}{n}$ とすれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

定理 2.3 の証明． $n=0$ のとき両辺は 1 となって成り立つ．これでいいのだが，心配なら，$n=1$ のとき両辺は $x+y$ となって成り立つ，から始める．$n=k$ のとき成り立つとする．

$$
\begin{aligned}
& (x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \\
= \;& (x+y)\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\, x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_{k-1}\, x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
= \;& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} ({}_nC_{k-1} + {}_nC_k)\, x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\
= \;& y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}_{n+1}C_k\, x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} \\
= \;& \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k\, x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

ここで，境界値と漸化式 (2.1) を使っている．

2.2． $n=k+h$ に関する帰納法で示す．$n=2$ のときは $h=k=1$ で，左辺 $= a\cdot a$ と右辺 a^2 は，定義により等しい．n まで成り立っているとして，$k+h=n+1$ の場合に示す．$k=1$ のときは定義そのもの．$k>1$ とすると，

$$
\begin{aligned}
a^k \cdot a^h &= aa^{k-1}\cdot a^h = aa^{k-1+h} \\
&= a^{1+k-1+h} = a^{k+h} = a^{n+1}
\end{aligned}
$$

となる．2 番目の等式で帰納法の仮定を，3 番目では定義を使った．後は a が属する代数系の積の結合律と自然数の和の結合律と交換律を使っただけだから，ここまでは a が積に関して群であるような代数系に属していれば成り立つ．

2つ目の等式については，k に関する帰納法でおこなう．$k=1$ のときは，左辺 $=(a^h)^1=a^h=a^{h\cdot 1}=$ 右辺．$k>1$ のときは

$$(a^h)^{k+1}=(a^h)^k(a^h)^1=a^{hk}a^h=a^{hk+h}=a^{h(k+1)}$$

とすればよい．

定理 2.4． (1) h,k が整数であるとする．h,k が同符号の場合は演習 2.2 で済んでいる．異符号の場合は $n=h+k$ の正負に応じて，たとえば $h,n>0>k=-k'$ なら，

$$a^ha^k=a^h\frac{1}{a^{-k}}=\frac{a^{h-k'+k'}}{a^{k'}}=\frac{a^{h-k'}a^{k'}}{a^{k'}}=a^{h-k'}=a^n$$

とすればよい．

次に $(a^{\frac{q}{p}})^p=a^q$ を示す．$b=a^{1/p}$ とおくと，

$$(a^{\frac{q}{p}})^p=(b^q)^p=b^{qp}=b^{pq}=(b^p)^q=a^q$$

となる．次に $\alpha=\dfrac{q}{p}=\dfrac{qr}{pr}$ だったとする．$a^{qr/pr}$ は $c^{pr}=a$ を満たす $c>0$ をとって，c^{qr} としたものであり，これが b^q と一致することを示す必要がある．しかし，$a=c^{pr}=c^{rp}=(c^r)^p$ なのだから，$b=c^r$ でなければならない．したがって，$c^{qr}=c^{rq}=(c^r)^q=b^q$ となる．

そこで，$h=\dfrac{q}{p}$, $k=\dfrac{r}{s}$ であれば，$d>0$ を $d^{ps}=a$ を満たす（唯一の）数とすれば

$$\begin{aligned}a^ha^k &= a^{\frac{q}{p}}a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{qs}{ps}}a^{\frac{pr}{ps}}=d^{qs}d^{pr}\\ &= d^{qs+pr}=a^{\frac{qs+pr}{ps}}=a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}}=a^{h+k}\end{aligned}$$

となる．

(3) は (2) を使って $a^h(=a^{h-k+k}=a^{h-k}a^k)>a^k$ と変形すればよい．

2.3． $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=d$ の定義を書くと，任意の $\varepsilon>0$ に対して，2つの数列に対し共通の自然数 N が存在して，$n\geq N$ ならば，

$$|a_n-d|,|b_n-d|<\varepsilon$$

を満たす．したがって，同じ n に対して，

$$x_n-d\geqq a_n-d>-\varepsilon \text{ かつ } x_n-d\leqq b_n-d<\varepsilon$$

をみたすので，$|x_n - d| < \varepsilon$ となる．

2.4． これは既に分かっていることを $\succ$ を使って書いただけ．(3) は演習 2.8 の (2).

2.5． (1) $n^{\frac{1}{n}} > 1$ ゆえ，$a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ と置く．定理 2.1 (2) から，

$$n = (1 + a_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n} > a_n^2 > 0$$

となるので，$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ が得られ，$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ が得られる．(2) は本文にある．

2.6． ヒントを使えば，

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{2^n}{2^{n-1}} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

となる．真中の等号は演習 2.8(1) の公式を使っている．

2.7． (1) + の場合は定理 2.1 の証明と同じようにすればよい．− のときに数学的帰納法で証明する．$n = 1$ のとき，両辺は等しい．

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1}(1 - x_i) &= \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \cdot (1 - x_{n+1}) \\ &\geqq (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)(1 - x_{n+1}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i + x_{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\geqq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \end{aligned}$$

(2) は明らか．
(3) a_n の単調性の証明での一般項は，(1) によって

$$\frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \geqq \frac{1}{k!}(1 - \frac{1 + \cdots + (k-1)}{n})$$

$$= \frac{1}{k!}(1-\frac{(k-1)k}{2n})$$

となる．(2) を使うと，

$$\begin{aligned} a_n &> 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{(k-1)k}{2n}) \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} \\ &> \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=(1-\frac{1}{2n})c_n \end{aligned}$$

が得られる．

2.8． (1) $s_n=\sum_{k=0}^{n}ar^k$ と置くと， $rs_n=\sum_{k=1}^{n+1}ar^k$ だから，$(1-r)s_n=a-ar^{n+1}$ となる．

(2) $k=[a]+1$ と置くと，$n>k$ ならば

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &< \frac{k^n}{n!}=\frac{k^k}{k!}\prod_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i} \\ &< \frac{k^k}{k!}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

となる．k は止まっているので，事実 1 から，0 に収束する．

2.9． (1) a_n-a を考えれば，$a=0$ のときに示せばよいことが分かる．すると，無限小の定義から，どんな $\varepsilon>0$ に対してもある N があって，$n>N$ ならば $|a_n|<\varepsilon$ を満たす．そこで，

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}$$

と分けると，前者の分子は有限で一定の値，後者の絶対値は

$$\frac{|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|}{n}<\frac{(n-N)\varepsilon}{n}$$

で押さえられる．次の数列も，2 つに分けると，前者に対応する分子は $a_1 + 2a_1 + \cdots + Na_N$ でこれも有限値，分母は $n(n+1)/2$．後者の絶対値については

$$\frac{((N+1)+\cdots+n)\varepsilon}{n(n+1)/2} < \frac{(1+\cdots+n)\varepsilon}{n(n+1)/2} = \varepsilon$$

で押さえられる．

(3) $a \neq 0$ のときは，フライイングして log の連続性を使えば，(1) に帰着するが，定理 2.4(4) を使えば，直接 (1) と同じようにして示すこともできる．読者に残しておこう．

$a = 0$ のときは，(1) と同じ記号を使えば，$(a_1 \cdots a_N)^{1/n}$ と $\varepsilon^{(n-N)/n}$ で押さえられる項の積に分けられる．前者は定理 2.4 (4) から 1 に収束し，後者は ε で押さえられる．

2.10． どの場合とも，すべての項は正で，極限があるとすれば非負になる．(1)–(3) では極限の候補が方程式を解くことで求まる．

(1) では $\alpha = \sqrt{\alpha + b}$ を解けばよく，非負の根は $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2} > 1$ となる．$b = \alpha^2 - \alpha$ を使うと，

$$a_{n+1}^2 - \alpha^2 = a_n + b - \alpha^2 = a_n - \alpha$$

となる．これを使ううまい方法があって

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \alpha| &= \left| \frac{a_{n+1}^2 - \alpha^2}{\sqrt{a_n + b} + \alpha} \right| < \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt{b} + \alpha} \\ &< \frac{|a_{n-1} - \alpha|}{(\sqrt{b} + \alpha)^2} < \cdots < \frac{|a - \alpha|}{(\sqrt{b} + \alpha)^n} \end{aligned}$$

が得られる．$\alpha > 1$ だからもちろん $\sqrt{b} + \alpha > 1$ であって，右辺は 0 に収束し，だから左辺も 0 に収束する．

別解として， 似たような方法だが，a_n の単調性を示し，その単調増加か減少かを決定するのは $a = a_1$ と a_2 の大小によることを示し，それがまた，a と α の大小によることを示すという手順を踏む方法もある．そちらの方が本格的で，それもできる方がよい．

注意． $b = 1$ ならば $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で黄金比になり，$b = 2$ ならば $\alpha = 2$ となる．

(2) では $\alpha = \dfrac{b}{1+\alpha}$ を解けばよく，これは $b = \alpha^2 + \alpha$ となって，非負の根は $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{1+4b}}{2} > 1$ となる．階差を見ると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{b}{1+a_n} - \frac{b}{1+a_{n-1}} \\ &= \frac{b(a_{n-1}-a_n)}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \\ &= \frac{a_n}{(1+a_n)}(a_{n-1}-a_n) \end{aligned}$$

となって，a_n から a_{n-1} への向き付けの距離の $\dfrac{a_n}{(1+a_n)} < 1$ 倍が a_n から a_{n+1} への向き付け距離になっている．大きくなることと小さくなることが交互に繰り返され，進む距離はだんだんと小さくなる，だから，偶数だけの部分列と奇数だけの部分列は共に単調で，互いに相手側の列の有界性を保証しているので，区間縮小法により，収束する．収束しさえすれば極限は α である．

もっと詳しく見てみる．a_2 と $a_1 = a$ を比べると，上と同じような計算で

$$a_2 - a_1 = \frac{1+a+\alpha}{1+a}(\alpha - a)$$

となり，$a < \alpha$ なら，奇数列は増大列で，偶数列は減少列になり，$a > \alpha$ ならその逆になる．$a = \alpha$ なら，すべての n で $a_n = \alpha$ である．さらに，同様な計算で

$$\alpha - a_{n+1} = \frac{\alpha}{1+a_n}(a_n - \alpha)$$

となって，a_n は α を中心に行ったり来たりを繰り返し，しかも歩幅を小さくしていくのである．

注意． $b = 1$ ならば $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で黄金比になり，$b = 2$ ならば $\alpha = 1$ となる．

(3) では $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\alpha + \dfrac{b}{\alpha}\right)$ を解けばよく，これは $b = \alpha^2$ となって，非負の根は $\alpha = \sqrt{b}$ となる．そこで差を見ると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha &= \frac{1}{2}\left(a_n - 2\sqrt{b} + \frac{b}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{b})^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

となり，$n \geqq 2$ ならば $a_n \geqq \sqrt{b}$ である．絶対値の評価なら $n \geqq 1$ に対して

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqq \frac{|a_n - \alpha|}{2} \leqq \frac{|a_{n-1} - \alpha|}{2^2} \leqq \cdots \leqq \frac{|a_1 - \alpha|}{2^n}$$

が得られ，2 項目からは単調減少で $\sqrt{b}$ に収束する．

注意． $b = 2$ のときは $\sqrt{2}$ への収束列で，$\sqrt{2}$ を近似していく非常によいアルゴリズムになっている．この計算が 4000 年ほど前のバビロニアの粘土板に残されている．

(4) $0 < b < a$ から相加・相乗平均の不等式を使えば,

$$b = \sqrt{b^2} < \sqrt{ab}(= b_2) < \frac{a+b}{2}(= a_2) < a$$

となる．一般の n でも，同じ計算で,

$$b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$$

となり，(2) のときと同じように単調増加する $\{b_n\}$ と単調減少する $\{a_n\}$ が得られている．さて区間の幅を計算しよう．

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \\ &< \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2} = \frac{a_n - b_n}{2} \\ &< \frac{a_{n-1} - b_{n-n}}{2^2} < \cdots < \frac{a_1 - b_1}{2^n} \end{aligned}$$

となり，これは 0 に収束する．

第 3 章

3.1． (1) は明らか．(2) は数学的帰納法で．$n = 1$ のときは，問題の不等式は $1 - x^2 < 1$ と同値．n まで成り立つとすると,

$$\begin{aligned} (1-x)^{n+1} &= (1-x)^n(1-x) < \frac{1-x}{1+nx} \\ &< \frac{1}{1+(n+1)x} \end{aligned}$$

となる．最後の不等式は

$$(1-x)(1+(n+1)x) = 1 + nx - (n+1)x^2 < 1 + nx$$

から．

3.2． $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なら，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となったのだから，$n, m \geqq N$ に対して

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる．

3.3． まずヒントを数学的帰納法で証明しよう．$n_1 \geqq 1$ は明らか．$n_k \geqq k$ を仮定すると，$n_{k+1} > n_k \geqq k$ となるので OK.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある K が存在して，どんな $k \geqq K$ に対しても $|a_k - a| < \varepsilon$ である．このとき，$n_k \geqq k \geqq K$ だから，$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ である．

3.4． $\{a_n\}$ はコーシー列だから，任意の数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 N があって，どんな $n, m \geqq N$ に対しても $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たしている．ある部分列 $\{a_{n_k}\}$ が a に収束するとすれば，ある K が存在して，どんな $k \geqq K$ に対しても $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす．そこで，$M = \max\{N, K\}$ とおけば，どんな $k \geqq M$ に対しても

$$|a_k - a| \leqq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる ($n_k \geqq k$ に注意).

3.5． (1) 集積点は $\left\{ \dfrac{i}{k} \mid 0 \leqq i < k \right\}$．　(2) は，問題の数列が $(0,1)$ 区間上のすべての有理数を表していることから．

(3) $n + \dfrac{1}{m}$ $(1 \leqq m, n)$ を $(n+m, m)$ に関する辞書式順序に並べた数列を考える．

(4) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2^m}$ $(1 \leqq m, n)$ を $(n+m, m)$ に関する辞書式順序に並べた数列を考える．

3.6． 有界だから，数列全体を 1 つの閉区間 I の中に閉じ込める．後はアイデアのように半分づつにして，無限個残っている方を選んでいけば，区間縮小法を使うことができる．

3.7. a_n を上に有界な単調増加列とすると，その上界と初項 a_1 との間に数列全体が入るので，要請 4 から集積点 α がある．つまり α に収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ がある．だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある K があって，どんな $k \geqq K$ に対しても $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ となる．単項増大列だったから，どんな $n \geqq n_K$ に対しても，$\alpha - a_n \leqq \alpha - a_{n_K} < \varepsilon$ となる．

どの a_n に対しても $a_n \leqq \alpha$ であることも示して置く必要があるが，意味から明らか.

3.8. 演習 1.4(1) のようにやってみる．$\{a_n\}$ がコーシー列だから，ある数 N があって，どんな $n \geqq N$ に対しても $|a_N - a_m| < 1$ を満たす．集合 $I = \{a_i \mid 1 < N\} \cup \{a_N \pm 1\}$ の最大最小値をとればよい.

3.9. (1) $\delta_n = \dfrac{1}{2^n} > 0$ とおく．演習 3.8 で取った N を N_1 とすれば，$I_1 = [a_{N_1} - 1, a_{N_1} + 1]$ にすべての a_n $(n > N_1)$ は含まれる．順に $N_n (> N_{n-1})$ が取れ，すべての a_m $(m > N_n)$ が含まれる閉区間 $I_n = [a_{N_n} - \delta_n, a_{N_n} + \delta_n] \cap I_{n-1} \subset I_{n-1}$ が得られたとする．$\delta_{n+1} > 0$ に対しても,，ある数 N_{n+1} があって，どんな $m \geqq N_{n+1}$ に対しても $|a_{N_{n+1}} - a_m| < \delta_{n+1}$ を満たす ($N_{n+1} < N_n$ となっていたら，$N_{n+1} = N_n$ とおく)．すると，$a_{N_n}, a_m \in I_{n+1} = [a_{N_{n+1}} - \delta_{n+1}, a_{N_{n+1}} + \delta_{n+1}] \cap I_n$ であり，縮小する閉区間列が取れる ($|I_n| \leqq \delta_n$)．こうして要請 2 から，すべての共通部分に 1 点 a が存在する．$a_{N_n} \in I_n$ だから，部分列 $\{a_{N_n}\}$ は a に収束し，演習 3.4 から数列 $\{a_n\}$ 自身も a に収束する.

(2) 閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ の減少列で，長さ $|I_n| = b_n - a_n$ が 0 に収束するとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある N があって，任意の $n \geqq N$ に対して $b_n - a_n < \varepsilon$ である．a_n は単調増加であるから，任意の $m > n \geqq N$ に対して，$b_N > a_m \geqq a_n \geqq a_N$ である．$a_m - a_n < b_N - a_N < \varepsilon$ となるので，a_n はコーシー列となり，収束する．同様に b_n も収束するが，$b_n - a_n$ が 0 に収束するので，2 つの極限は一致する．定理 2.2 からこの極限は，すべての $I_n = [a_n, b_n]$ に属する.

3.10. 部分和 s_n がコーシー列であるという条件を書き直しただけ.

3.11. 部分和 $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_k$ がコーシー列をなすことを言えばよい.

奇数 n に対し，$s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1} a_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$, $s_{n+2} = s_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = s_{n+1} - a_{n+2} < s_{n+1}$, さらに $s_{n+2} - s_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} + (-1)^{n+2} a_{n+2} = a_{n+1} - a_{n+2} \geqq 0$ となる．$s_{n+3} > s_{n+2}$ も同様に示され，任意

の $m > n$ に対し，$s_n < s_m < s_{n+1}$ となる．こうして，n の偶奇を問わず，$|s_m - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$ となる．a_n が 0 に収束するので，コーシー列をなすことがわかる．

定理 3.2． 定理 3.1 から，$b_n > 0$ としてよい．部分和の数列を考えれば，数列の比較定理（定理 2.2）から得られる．

3.12． (1) $\sum a_n$ が収束するので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となり，十分先では $a_n < 1$ で，したがって，$a_n^k < a_n$ である．

(2) $\sum(a_n+b_n)$ が収束するので，これを優級数としてとれる（$2\sqrt{a_n b_n} \leqq a_n + b_n$ を使う）．

3.13． (3) は本文にある．(1) は本文のヒント通りにやる．また，(1) と (2) の一般項を足すと

$$\frac{(n+1)(a_1 + \cdots + a_n)}{n} = \frac{n+1}{n} s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

となるので，(2) は (1) から従う．

定理 3.4． (2) 条件から，$(r >)\varepsilon > 0$ に対し，ある N が存在し，どんな $n \geqq N$ に対しても $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon$, つまり

$$(r-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (r+\varepsilon)a_n$$

をみたす．繰り返せば

$$a_n < (r+\varepsilon)a_{n-1} < \cdots < (r+\varepsilon)^{n-N} a_N$$

を，また同様にして

$$a_n > (r-\varepsilon)a_{n-1} > \cdots > (r-\varepsilon)^{n-N} a_N$$

を満たす．ここで，

$$L = \frac{a_N}{(r-\varepsilon)^N}, \quad M = \frac{a_N}{(r+\varepsilon)^N}$$

とおけば，

$$(r-\varepsilon)^n L < a_n < (r+\varepsilon)^n M,$$

$$(r-\varepsilon)L^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < (r+\varepsilon)M^{\frac{1}{n}}$$

となる．ところが定理 2.4(4) から $\lim_{n\to\infty} L^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$ である．任意の $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ に対し，ある N' があって，どんな $n \geqq N'$ に対しても

$$1-\varepsilon' < L^{\frac{1}{n}} \text{ と } M^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon''$$

が成り立つようにできる．$N'' = \max\{N, N'\}$ とし，$n \geqq N''$ をとれば,

$$\sqrt[n]{a_n} < (r+\varepsilon)M^{\frac{1}{n}} < (r+\varepsilon)(1+\varepsilon'')$$

となる．そこで（十分小さく）任意に与えた $\tilde{\varepsilon} > 0$ に対して,

$$(r+\varepsilon)(1+\varepsilon'') \leqq r+\tilde{\varepsilon}$$

を満たすように，$\varepsilon, \varepsilon'' > 0$ をとればよい．たとえば，$\varepsilon = \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ とおき，$\leqq$ を $=$ で置き換えた等式を解けば,

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{r+\varepsilon}$$

が得られる．同様に

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{r-\varepsilon}$$

とおけば,

$$r-\tilde{\varepsilon} < \sqrt[n]{a_n} < r+\tilde{\varepsilon}$$

となり，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ が示された.

3.14. (1) 比のテストにより収束．(2) 根のテストにより発散．(3) 比のテストにより，$a < 1$ のとき収束し，$a > 1$ のとき発散．$a = 1$ のときは, $\dfrac{1}{n+n^2} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ を使って収束が分かる.

(4) 答は $p < \dfrac{1}{2}$ のとき収束． $p \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき発散.

まず，ヒントにあるように括弧の中を変形する.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\end{aligned}$$

収束させたいときは上からの評価

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}$$

を使い，$p < \dfrac{1}{2}$ とすると，

$$n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{1}{2n}\frac{n^p}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}-p}}$$

となり，事実 3 から収束する優級数が得られたことになる．

発散させたいときは下からの評価

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > \frac{1}{2\sqrt{n}(n+1)}$$

を使って，$p = \dfrac{1}{2}$ のときに

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) > \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

と，発散する劣級数があることを示せばよい．

第 4 章

4.1． (1) $x \in (A\cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A\cap B \Leftrightarrow x \notin A$ または $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ または $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

$x \in (A\cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A\cup B \Leftrightarrow x \notin A$ かつ $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ かつ $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

(2) 最後の 2 つ以外は容易．2 つは同様なので，1 つだけ示す．

$x \in A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B\cup C \Leftrightarrow (x \in A$ かつ $x \in B)$ または $(x \in A$ かつ $x \in C) \Leftrightarrow x \in A\cap B$ または $x \in A\cap C \Leftrightarrow x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(3) 定義から明らか．

4.2． どれも似たようなものなので，最初のものだけ示す．

$x \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow x \notin A_\lambda$ となる λ がある $\Leftrightarrow a \in A_\lambda^c$ となる λ がある $\Leftrightarrow a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

4.3. (1) $y \in f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \Leftrightarrow y = f(x)$ となる $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$がある $\Leftrightarrow y = f(x), x \in A_\lambda$となる$\lambda \in \Lambda$がある $\Leftrightarrow y \in f(A_\lambda)$ となる$\lambda \in \Lambda$がある $\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$.

(2) 明らか. 反例はたとえば, $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ で, $A_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $A_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ とすればよい.

(3) は (1) と (4) の解答を見ればすぐに分かるので, (4) を示す.

$x \in f^{-1}(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) \Leftrightarrow f(x) \in (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) \Leftrightarrow$ すべての$\mu \in M$ に対して $f(x) \in B_\mu \Leftrightarrow$ すべての$\mu \in M$ に対して $x \in f^{-1}(B_\mu) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)$.

4.4. ほかにも解はあるが, 一番手軽なものとして,

(1) $y = \dfrac{(c-d)x + ad - bc}{a-b}$,

(2) $y = c - \dfrac{1}{b-a} + \dfrac{1}{b-x}$,

(3) $y = \dfrac{1}{b-x} - \dfrac{1}{x-a}$.

4.5. (1) (a) 明らか. [$\emptyset$ についても, 直観と違和感があるかも知れないが, 成り立つと考える習慣である. そうする理由を考えてみよう.

一般に集合 X の部分集合 A に関する命題 $P(A)$ が「A のすべての元 a に対して命題 $Q(a)$ が成り立つこと」という形をしていたとする. つまり, $P(A)$ が成り立つことは「$A = \{a \in A \mid Q(a)\}$」と定められているということである. ここで, $A = \emptyset$ のときに, A に属する元がないのだから, 真とも偽とも決められないような感じがする. しかし, 上の等式は「$\{a \in A \mid \neg Q(a)\} = \emptyset$」とも**同値**であるわけで, $A = \emptyset$ のとき, A の部分集合は $\emptyset$ しかないことから, 後者の等式は満たされる.

これで納得できないという人には, **同値**というのが排他律を仮定していることから来る不安があるのだろう. しかし今は, 排他律は認めることにしている.]

(b) $x \in U \cap V$ をとり, 内点であることを示す. まず $x \in U$ であり, U が開集合だから x は U の内点で $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ を満たす $\varepsilon_1 > 0$ がある. 同様にして, $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$ を満たす $\varepsilon_2 > 0$ がある. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ととれば, $B_\varepsilon(x) \subset U \cap V$ となる.

(c) $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ととると, $x \in U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ がある. U_λ が開集合だから, $B_\varepsilon(x) \subset U_\lambda \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある.

(2) は演習 4.1 から明らか.

(3) (a) 明らか. (b) $U = B_{\varepsilon_1}(x), V = B_{\varepsilon_2}(x)$ と書けば, $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ と取って, $W = B_\varepsilon(x)$ とおけばよい. (c) $U = B_\varepsilon(a)$ と書けば, $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ととって, $W = B_{\varepsilon'}(a)$ とおけばよい. $x \in W$ ならば, $|x-a| < \varepsilon'$ だから, ε'' を $\varepsilon'' < |x-a|$ をみたすようにとって, $V = B_{\varepsilon''}(x)$ とおけば条件を満たす.

4.6. (1) F が閉集合で,「$x_n \in F$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であっても $a \notin F$ である」ものがあったとして矛盾を導く（これで $\Rightarrow$ が言える）. そのとき, $a \in F^c$ であり, F^c は開集合だから, $B_\varepsilon(a) \subset F^c$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある. ところが, 収束することから, ある N があって, すべての $n \geqq N$ に対して $x_n \in B_\varepsilon(a) \subset F^c$ とならねばならず, $x_n \in F$ に矛盾する.

$\Leftarrow$ は, 対偶を示す. F が閉集合でないとする. F^c が開集合でないのだから, F^c には内点でない点 a がある. すると, どんな $n \geqq 1$ に対しても $B_{1/n}(a) \not\subset F^c$ となるので, $B_{1/n}(a) \cap F \neq \emptyset$ となる. この集合から 1 点 x_n を選べば, $x_n \in F$ かつ $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ となる. こうして, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となるが, $a \notin F$ なので,「」の中の命題は成り立たない.

(2) (a) は明らか. (b) は $a \in A$ に対し, $a_n = a$ という収束列を考えればよい.

(c) $a \in \overline{A \cup B}$ をとると, $x_n \in A \cup B$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となるものがある. 無限個の n に対して, $x_n \in A$ であるか, $x_n \in B$ であるかなので, A か B かの点列で a に収束するものがあることになり, $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$ となる. 逆は明らか.

(d) 対角論法を使う. (b) から, $\overline{\overline{A}} \supset \overline{A}$ は明らかなので, その逆を示す. $a \in \overline{\overline{A}}$ をとる. $x_n \in \overline{A}$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となるものがある. そしてさらに, $y_k^n \in A$ で $\lim_{k\to\infty} y_k^n = x_n$ となるものがある. そこで, $z_n = y_n^n$ とおくと, $z_n \in A$ である. そこで $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ が言えればことは簡単なのだが, そうはいかない. y_k^n の収束の速さが n が大きくなるにつれて遅くなるかもしれないのだ.

選び方を工夫する. 任意の m に対して, $|x_{n_m} - a| < \dfrac{1}{2m}$ を満たすような $x_{n_m} \in \overline{A}$ がとれる. それに対して, $|y_k^{n_m} - x_{n_m}| < \dfrac{1}{2m}$ を満たすような $y_k^{n_m} \in A$ がとれる. これを z_m とおけば, $|z_m - a| < \dfrac{1}{m}$ となる.

(3) (1) と (2-b) を使えば, $\Rightarrow$ は明らか. $\Leftarrow$ は, (1) と閉包の定義から, 明らか.

(4) $B = \cap\{F : \text{閉集合} \mid A \subset F\} \supset A$ とおくと, ド・モルガンの定理（演習 4.1(1)）と演習 4.5(1-c) から, B は閉集合になる. また, 上の (2-d) と (3)

から，$\overline{A}$ は閉集合であり，B の定義から，B を含む．こうして，$\overline{A} \supset B \supset A$ が得られ，全体に閉包演算を施せば，

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \supset \overline{B} = B \supset \overline{A}$$

が得られる．

ここで使った「$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$」は閉包の公理の (c) からわかる．

(5) 集積点の定義と閉包の定義から明らか．

(6) 第 1 回の演習 1.2 は，任意の実数のいくらでも近くに有理数があることを意味しており，$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ であることがわかる．$\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ を示すためには，任意の実数 α に対し，α に収束する無理数列があることを言えばよい．$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ であるから，α に収束する有理数列 $a_n \in \mathbb{Q}$ はある．

ところで，$\sqrt{2}, \pi$ など無理数が存在している．それを 1 つ選んで，ω とする．$h \in \mathbb{Q}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$h + \dfrac{\omega}{n} \notin \mathbb{Q}$ となる．だから，無理数 $a_n + \dfrac{\omega}{n}$ は $n \to \infty$ で，a_n と同じ値 α に収束する．

(7) 要請 4 と (1) を使えばよい．

4.7. (1) $x = a$ での連続性 $\Rightarrow$ (a): (a) が成り立たなかったとする．すると,「ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$\delta > 0$ に対して $|x - a| < \delta$ であっても $|f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となる x がある」ことになる．そこで，自然数 m に対して，$\delta = \dfrac{1}{m}$ とおいたときに得られる x を x_m と書く．$|x_m - a| < \dfrac{1}{m}$ だから，$\lim_{m\to\infty} x_m = a$ だが，$|f(x_m) - f(a)| \geqq \varepsilon$ なのだから，$f(x_m)$ は収束せず，$f(x)$ は $x = a$ で連続でなくなる．背理法により，(a) が成り立つ．

(a) $\Rightarrow$ $x = a$ での連続性: (a) が成り立っているので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ を満たす x に対しては $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ とすると，この δ に対して，ある N が存在して，$n \geqq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$ となる．従って，$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ となっている．

(b) $\Leftrightarrow$ (a): (b) は (a) を ε 近傍の言葉で言い換えただけ．

(b) $\Rightarrow$ (c): V を $f(a)$ の近傍とすると，$f(a)$ の開近傍 $V' \subset V$ があり，ある $\varepsilon > 0$ があって，$B_\varepsilon(f(a)) \subset V' \subset V$ となる．(b) から，ある $\delta > 0$ が存在して，$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ を満たす．

(c) $\Rightarrow$ (b): 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(f(a))$ は $f(a)$ の開近傍だから，a のある近傍 U が存在して，$f(U) \subset B_\varepsilon(f(a))$ を満たす．上と同様にして，$B_\delta(a) \subset U$ となる $\delta > 0$ が存在する．

(2) $f(x)$ の連続性 $\Rightarrow$ (a): 値域 Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が開集合であることをいう．$a \in f^{-1}(V)$ をとる．$f(a) \in V$ だから，$f(a)$ は V の内

点であり，ある $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ となる．f は $x = a$ で連続だから，(1-b) により，ある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset V$ となるから，$B_\delta(a) \subset f^{-1}(V)$ となる．つまり，任意の点 a が $f^{-1}(V)$ の内点なので，$f^{-1}(V)$ は開集合である．

(a) $\Rightarrow$ $f(x)$ の連続性: a を定義域の任意の点とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(f(a))$ は開集合だから，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \ni a$ は開集合である．a が内点だから，ある $\delta > 0$ が存在して，$B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ を満たす．従って，$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ を満たす．

(b) は演習 4.3 の直前の注意「$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$」によって，(a) と同値．

この注意の証明もしておこう．$x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c$

4.8． (1) 最後を除いて，各点での連続性は演習 1.5 から．最後の関数については，$x = a$ で，$f(a) > g(a)$ なら，a のある近傍 U 上で $f(x) > g(x)$ となるので，f の連続性から従う．$b = f(a) = g(a)$ とする．f と g が連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して，$f(B_{\delta_1}(a)) \subset B_\varepsilon(b)$, $g(B_{\delta_2}(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ となる．$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ の値は $f(x)$ か $g(x)$ のどちらかなので，$\delta = \min_i \delta_i$ とおけば $h(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ となる．

(2) は演習 4.7(2-a) を使えばよい．

4.9． (1) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ は，上の定義では，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$f(B_\delta(a) \cap (a, \infty)) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ かつ $f(B_\delta(a) \cap (-\infty, a)) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ を満たすことであり，まとめれば $f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\varepsilon(\alpha)$ となる．連続の定義では，$\alpha = f(a)$ とするのだから，条件「$\setminus\{a\}$」はあってもなくてもよい．後は，演習 4.7(1-b) を使えばよい．

(2) 相対位相の定義をじっと見る．

(3) (a) 図 12 を見る．左右の極限は存在するが一致しない．$x = 0$ での値は指定されていないけれど，どうとっても連続でないが，左連続か右連続にすることはできる．(b) $H(x)$ では左右の極限は存在するが一致しない．左連続である．$H(|x|)$ では左右の極限は存在して一致するが，$x = 0$ での値 0 とは一致しない．左連続でも右連続でもない．(c) 左右の極限は存在するが一致しない．左連続でも右連続でもない．(d) $h(x)$ は右極限も左極限も（振動することによって）存在しない．$xh(x)$ は連続．(e) $\dfrac{1}{x}$ の右極限は ∞，左極限は $-\infty$ に発散する．$\dfrac{1}{|x|}$ の左右極限は ∞.

4.10． (1) (a) $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ の不連続点は $0, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \ldots$ で，不連続点である原点（原点では $\pm\infty$）に収束．$\dfrac{1}{[1/x]}$ の不連続点は $0, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \ldots$ で，連続点である原点に収束．(b) 不連続点は $0, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{3}, \ldots$ で，不連続点である原点（原点では振動）に収束．

(c) 不連続点は $0, \pm\dfrac{1}{2n}(n \geqq 1)$ で，不連続点である原点（原点では振動）に収束．

(2) ディリクレの関数は任意の点で連続でないことと，修正ディリクレ関数が整数以外の有理数で連続でないことは演習 4.6(6) から．

修正ディリクレ関数が無理数では連続であることを示す．周期 1 なので，$(0,1)$ 上で考える．$x \in (0,1)$ を無理数とする．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．アルキメデスの公理（定理 1.1）により，$\varepsilon > \dfrac{1}{q}$ を満たす自然数 q が存在する．$A = \{\dfrac{n}{m} \mid 1 \leqq n < m < q\}$ は有限集合なので，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$B_\delta(x) \cap A = \emptyset$ に取れる．したがって，$B_\delta(x)$ に含まれる有理数の分母は q 以上であり，そこでの値は $\dfrac{1}{q}$ 以下になる．つまり，$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(0)$ となって連続であることが言える． 整数のときは $x=0$ で考えればよく，無理数の場合と同じような議論でよい．

第 5 章

5.2． 本文の証明で約束した議論をしておこう．(1) の証明で二分法を使う場合は区間縮小法を使うが，X でも Y でもその上限 c で $f(c)=0$ となることを示す必要があった．連続関数に関する議論での 1 つの典型例なので，書いておこう．$\xi = \sup X$ とし，$f(\xi) = 0$ を示す．f が ξ で連続であることを使う．$f(\xi) > 0$ であれば，$f|_{B_\varepsilon(\xi)} > 0$ となる正数 $\varepsilon > 0$ が存在するので，ξ が上限であることに反する．$f(\xi) < 0$ であれば，$f|_{B_\varepsilon(\xi)} < 0$ となる正数 $\varepsilon > 0$ が存在するので，ξ より小さい数で X に属せない数がべたーっとあり，ξ が X の上限であることに反する．

5.3． (2) は演習 5.2 の (1) から明らか．

(1) 演習 1.7(1) から，多項式 $P(x)$ に対して整数 $x = n$ で値の極限は，$\lim_{n\to\infty} P(n) = \mathrm{sgn}(a)\infty$ と，最高次 k の係数 a の符号で決まっている．しかし，それも n^k で決まっており，$n \leqq x < n+1$ なら $n^k \leqq x^k < (n+1)^k$ である

ことから，$\lim_{x\to\infty} P(x) = \mathrm{sgn}(a)\infty$ であることがわかる．したがって，任意の $M>0$ に対して $P(x)>M$ となる十分大きな x が存在する．k が奇数であれば，$(-x)^k = -x^k$ であるので，同様にして，$P(x') < -M$ となる，十分小さな（負で絶対値が大きな）x' が存在する．あとは多項式が連続であることを注意すればよい．

(3) $f(a) = a,\ f(b) = b$ であれば OK．そこで，$f(a) > a$ かつ $f(b) < b$ としてよい．そのとき関数 $g(x) = f(x) - x$ は連続で $g(a) > 0,\ g(b) < 0$ を満たすので，中間値の定理により $g(c) = 0$ を満たす $c \in [a,b]$ が存在する．このとき $f(c) = c$ となる．

5.4． (1) は線形代数の基本問題なので省略．(2) 条件 (1), (2) は明らか．(3) については右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引くと

$$\begin{aligned} &(||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \\ = &\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}^{\,2} + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}^{\,2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2}^{\,2} \\ = &2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} - \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) \end{aligned}$$

となる．2 で割って，前者の 2 乗から後者の 2 乗を引けば

$$(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2) - \sum_{i,j=1}^n x_i y_i x_j y_j = \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqq 0$$

となる．

5.5． (1) ノルムの公理のうち (3) 以外は明らか．ヒントに従って，まずシュワルツの不等式を示そう．t を実数とすると，

$$0 \leqq \|t\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (t\mathbf{x}+\mathbf{y}, t\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2t(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$$

となり，これがどんな t に対しても成り立たねばならないので，t に関する 2 次式の判別式が

$$\frac{1}{4}D = (\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leqq 0$$

となって，得られる．そこで，三角不等式の右辺の 2 乗から左辺の 2 乗を引くと

$$(||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
&= (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}||^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= 2(||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| - (\mathbf{x}, \mathbf{y})) \geqq 0
\end{aligned}
$$

となる．

(2) ノルムが内積から定義されると

$$
\begin{aligned}
& ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
= \ & ||\mathbf{x}||^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}||^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||^2 = 2(\|\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)
\end{aligned}
$$

となる．

(3) 反例は (5)．中線定理が成り立つと仮定する．内積の候補をヒントのように置く．

シュワルツの不等式の証明は，まず三角不等式の $\mathbf{x}$ に $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ を代入すれば $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}||\geqq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}||$ を得，さらには

$$
\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leqq \|\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leqq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}||
$$

を得る．$(\mathbf{x}, \mathbf{y})\geqq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{y}||^2 \\
&\leqq (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{y}||^2 \\
&= 2||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||
\end{aligned}
$$

が得られ，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})\leqq 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{y}||^2 \\
&\geqq (||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||)^2 - ||\mathbf{x}||^2 - ||\mathbf{y}||^2 \\
&= -2||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||
\end{aligned}
$$

が得られる．合わせると $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqq ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||$ となる．

対称性と正値性は明らか．加法性については

$$
\begin{aligned}
& 2(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\
= \ & ||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2 \\
& \quad - ||\mathbf{x}_1+\mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x}_2+\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}_1||^2 + ||\mathbf{x}_2||^2 \\
= \ & \frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+2\mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2\right) - ||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+2\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(||\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2||^2+||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2||^2\right)=0$$

となって成り立つ．$(\mathbf{x},\mathbf{0}) = \dfrac{\|\mathbf{x}+\mathbf{0}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{0}\|^2}{2} = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathbf{x}\|^2}{2} = 0$ と加法性から

$$(-\mathbf{x},\mathbf{y}) = -(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

が得られる．後は，自然数 n に対して

$$(n\mathbf{x},\mathbf{y}) = n(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

であることを帰納法で示す．$n=2$ は加法性で $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$ とおけばよい．帰納法の一般段階は，面倒だが一本道．内積はノルムに関して連続なので，$(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})$ は λ に関して連続である．シュワルツの不等式を使って

$$\begin{aligned}|(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mu\mathbf{x},\mathbf{y})| &= |((\lambda-\mu)\mathbf{x},\mathbf{y})| \\ &\leqq |\lambda-\mu|\,||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||\end{aligned}$$

とすればよりはっきりする．

そこで a^x を定義したときのように，まず有理数に対して示し，次に λ に関する連続性を使えば

$$(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

を示すことができる．

(4) 中線定理は

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2+||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2+\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^n x_i^2+2\sum_{i=1}^n y_i^2 = 2(||\mathbf{x}||^2+\|\mathbf{y}||^2)\end{aligned}$$

と示すことができ，また，内積は

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2-\|\mathbf{x}||^2-\|\mathbf{y}||^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2-\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^n x_iy_i\end{aligned}$$

となる．

(5) $C[a,b]$ がノルム空間になることについては，三角不等式以外は明らか．三角不等式 $\|f+g\| \leqq \|f\|+\|g\|$ も，最大値をとる点が一致しているときは，絶対値に対する三角不等式からしたがう．最大値をとる点が関数によって異なるときは明らか．

中線定理が成り立たないことを示す．$[a,b]=[0,1]$ の場合に書く．$f(x)=x,\ g(x)=1-x$ とすると，$f+g=1,\ f-g=2x-1$ となり，$\|f\|=f(1)=1$, $\|g\|=g(0)=1$, $\|f+g\|=1$, $\|f-g\|=(f-g)(1)=|(f-g)(0)|=1$ である．したがって，$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=1+1=2$, $2(\|f\|^2+\|g\|^2)=2\times 2=4$ となって一致しない．

5.6． (2) は明らか．(1) は容易．距離の公理の (3) は

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z},\mathbf{y}) &= ||\mathbf{x}-\mathbf{z}||+||\mathbf{z}-\mathbf{y}|| \\ &\geqq ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||=\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\end{aligned}$$

と示される．

5.7． (2) (a) $\Rightarrow$ (b) は，$n=1$ のときは演習 4.6(7) で示してある．有界だから座標面に平行な面を持つ直方体に入れておいて，第 1 座標について収束する部分列をとり，その部分列に対し第 2 座標について収束する部分列をとり,.... とやればよい．(b)$\Rightarrow$ (a) は対偶を考えれば容易．

(c) $\Rightarrow$ (a) は対偶を考えて,「有界でない」か「閉でない」ならば「コンパクトでない」ことを示せばよい．X が有界でないとする．原点を中心とする開球（n 近傍） $B_n(\mathbf{0})$ を考えると，$\{X\cap B_n(\mathbf{0}) \mid n\geqq 1\}$ は X の開被覆だが,有限個では被覆にならない．もしなれば，有界になるから．

X が閉集合でないとする．点列 $\mathbf{a}_n\in X$ で，収束するが，極限 $\mathbf{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{a}_n$ が X の元でないものがある．$U_i=\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{a}-\mathbf{x}\|>\dfrac{1}{i}\}$ を考えると，$\{X\cap U_i \mid i\geqq 1\}$ は X の開被覆だが，有限個では被覆にならない．もしなれば，$\mathbf{a}_n$ は $\mathbf{a}$ に収束できないから．

(a) $\Rightarrow$ (c) は二分法を少し拡張して，2^n 分法でやる．X を有界閉集合とし，$X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ を開被覆とする．背理法の仮定として，有限の部分被覆が存在しないとする．有界な X を大きな立方体 $I_0=[a_0^1,b_0^1]\times\cdots\times[a_0^n,b_0^n]$ で包んでおき，各座標に関して半分ずつに超平面で分割すると， I_0 に相似な 2^n 個の直方体 J_i に分かれる．すべての i に対して $X\cap J_i$ が有限個の U_λ で覆われ

ることはないので，ある i に対し， $X\cap J_i$ を覆うには無限個の U_λ が必要になる．この J_i を I_1 とする．I_1 の各辺の長さは I_0 の対応する辺の長さの半分で，直径である対角線の長さも半分になる．I_1 に対しても同様のことを行い，I_2 を作る．この操作は無限に続けられ，直方体の列

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$$

が得られ，どの I_m も，$X\cap I_m$ を覆うには無限個の U_λ が必要になる．ここで，各座標に関して区間縮小法が適用できるので，$\bigcap_m I_m$ は1点 $\{c\}$ となる．I_m に対する条件から，$X\cap I_m\neq\emptyset$ となるので，$c_m\in X\cap I_m$ を取ることができる．c_m の第 i 座標を c_m^i とおくと，$|c_m^i-c^i|=\dfrac{a_0^i-b_0^i}{2^m}$ を満たすので，$\lim_{m\to\infty} c_m=c$ となる．X は閉集合なので，$c\in X$ である．したがって $c\in U_\lambda$ となる λ がある．U_λ は開集合なので，$B_\varepsilon(c)\subset U_\lambda$ となる $\varepsilon>0$ がある．この ε に対して，I_m の直径が $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さく，$\rho(c,c_m)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となる m がある．すると，$I_m\subset B_\varepsilon(c)\subset U_\lambda$ となって，I_m が1つの U_λ に含まれることになり，I_m の取り方に矛盾する．

(3) コンパクト集合 K の連続写像 f による像 $f(K)$ の開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ があったとする．f が連続なので，$\{f^{-1}(U_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ は K の開被覆になる．K がコンパクトだから有限の部分被覆 $\{f^{-1}(U_{\lambda_i})\mid 1\leqq i\leqq N\}$ があるが，その像 $\{U_{\lambda_i}\mid 1\leqq i\leqq N\}$ は $f(K)$ の開被覆になっている．

(4) コンパクト集合 K 上の連続写像 f を考えると，任意の点 $\mathbf{a}\in K$ に対して,「任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，$f(B_\delta(a))\subset B_\varepsilon(f(a))$」となっている．$\varepsilon>0$ を固定する．

各点 $\mathbf{a}\in K$ に対して上で定まる δ を $\delta_\mathbf{a}$ と書こう．開集合

$$U_\mathbf{a}=B_{\delta_\mathbf{a}/2}(\mathbf{a})$$

を考えると，$\{U_\mathbf{a}\mid \mathbf{a}\in K\}$ は K の開被覆を与えており，K はコンパクトだから、有限個の $U_{\mathbf{a}_1},\dots,U_{\mathbf{a}_N}$ だけで集合 K を覆う。数

$$\delta=\min\bigl\{\delta_{\mathbf{a}_1},\delta_{\mathbf{a}_2},\dots,\delta_{\mathbf{a}_N}\bigr\}/2$$

をとれば，$d(\mathbf{x},\mathbf{y})<\delta$ を満たす任意の2点 $\mathbf{x},\,\mathbf{y}\in K$ に対して，$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))<2\varepsilon$ であることが示される．

実際，$\mathbf{x}\in K$ なので $\mathbf{x}\in U_{\mathbf{a}_i}$ を満たす添字 i がある．条件と三角不等式から $\mathbf{y}\in B_{\delta_{\mathbf{a}_i}}(\mathbf{a}_i)$ が得られる．従って，

$$d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y}))\leqq d(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{a}_i))+d(f(\mathbf{a}_i),f(\mathbf{y}))\leqq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

が得られる．

5.8． (1) (a), (b), (d) は明らか．(c) 球面はすべての点を赤道に結び，赤道が 1 次元低い球面であることからその赤道に結び，それを繰り返せば，1 点と結ばれることがわかる．球体と ε 近傍はすべて中心と結ぶ．

(2) 連続写像と連続写像の合成が連続になることから．

(3) (a) $\Rightarrow$ (b): 弧状連結な X が連結でなかったとする．$X = U \cup V$ で，$U \cap V = \emptyset$, $U, V \neq \emptyset$ を満たし，U, V が開集合であるものがある．点 $u \in U$, $v \in V$ を選べば，それを結ぶ曲線 $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v$ を満たすものがある．$K = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in U\}$ を考えると，$0 \in K, 1 \notin K$ であり，$\xi = \sup K$ が存在する．$\gamma(\xi) \in X$ であるが，$\gamma(\xi) \in U$ としても，$\gamma(\xi) \in V$ としても矛盾が出て，$X = U \cup V$ に反する．

(b) $\Rightarrow$ (a): X は連結であるとする．点 $x \in X$ を固定し，$A = \{a \in X \mid x$ と a は X 内の曲線で結べる$\}$ とおく．$B = X \setminus A$ とおくと，$X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ である．$x \in A$ ゆえ，$A \neq \emptyset$ である．A, B が開集合であることを示せば，X が連結であることから $B = \emptyset$ となり，$X = A$ となって証明が終わる．

点 $a \in X$ をとる．X は開集合だから，$B_\varepsilon(a) \subset X$ を満たす $\varepsilon > 0$ がある．

$a \in A$ のとき，$B_\varepsilon(a)$ が弧状連結なことから，$B_\varepsilon(a) \subset A$ となり，a は A の内点になって，A は開集合になる．

$a \in B$ のとき，$B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ を満たすので，$B_\varepsilon(a) \subset B$ となる．実際，もし $B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ なら，$B_\varepsilon(a)$ の中に x と曲線で結ぶことのできる点があることになるが，そのときは a 自身が x と結ぶことができ，$a \in B$ に矛盾する．

5.9． S^1 の内部の点はすべていったん中心と結ぶ．S^1 の外部の点は，半径に沿っていったん半径 2 の円周上の点と結べばよい．S^1 の内部の点 P と外部の点 Q を結ぶ曲線 γ が存在したとする．$f(t) = \rho(\gamma(t), \mathbf{0})$ とおけば，$f(t)$ は連続で，$f(0) < 1$, $f(1) > 1$ となる．中間値の定理により $f(s) = 1$ となる s が存在するが，$\gamma(s)$ は S^1 上の点である．

5.10． $g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - f(-\mathbf{p})$ とおく．$g(\mathbf{p}) = 0$ となる点があればおしまい．$g(\mathbf{p}) \neq 0$ でも，$g(-\mathbf{p}) = -g(\mathbf{p})$ に注意して中間値の定理を使えばよい．$\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ の連続性は読者に任す．

第 6 章

定理 6.1． (1) 単射だから，$[a,b]$ の中の任意の 2 点 $x<y$ に対して，$f(x)<f(y)$ となるか $f(x)>f(y)$ になるかである．$f(x)<f(y)$ としよう．$x<w<y$ に対しては $f(x)<f(w)<f(y)$ となることを示す．$f(w)>f(y)$ とすれば，区間 $[x,w]$ 上に中間値 $f(y)$ をとる点があることになり，単射性に矛盾する．$f(w)<f(x)$ とすれば，区間 $[w,y]$ 上に中間値 $f(x)$ をとる点があることになり，単射性に矛盾する．

$f(x)>f(y)$ の場合も同様に，$x<w<y$ に対しては $f(x)>f(w)>f(y)$ となる．

このことから，$f(a)<f(b)$ であれば，任意の $u<v\in(a,b)$ に対し，

$$f(a)<f(u)<f(v)<f(b)$$

となることがわかる．$f(a)>f(b)$ の場合も同様.

(2) $[c,d]$ の収束点列 $\{y_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$ を考える．全単射だから，$x_n=f^{-1}(y_n)\in[a,b]$ とおく．演習 5.7(2) から，$[a,b]$ は点列コンパクトだから，$\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ を持つ．極限 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ も $[a,b]$ の点で，x_0 でも連続だから

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=y_0$$

となり，$f^{-1}(y_0)=x_0$ となる．

$\{x_n\}$ の集積点がもしほかにあったとしても，その像は y_0 になり，単射性から x_0 と一致する．

集積点を 1 つしか持たない有界数列は収束するので，$x_n\longrightarrow x_0$ であり，f^{-1} の連続性が示される．

6.1． (1) $x=0$ とおけば，$f(y)=f(0)$ となり，すべての点での値が $f(0)$ と一致する．つまり，定数関数になる．

(2) $x=y=0$ とおけば，

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

となり，これから $f(0)=0$ が得られる．任意の数 α に対し，$f(n\alpha)=nf(\alpha)$ であることが n に関する帰納法で得られる．

そこで，$a=f(1)$ とおくと，$f(n)=f(n\cdot 1)=na=an$ が得られ，$x=\dfrac{1}{p}$ に対しては，$a=f(1)=f(px)=pf(x)$ となって，$f(\dfrac{1}{p})=\dfrac{a}{p}$ が得られる．これから，x が有理数のときは $f(x)=ax$ が得られるので，連続性からすべての実数 x に対しても $f(x)=ax$ が得られる．

(3) $x = y = 0$ とおくと，$f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$ となり，

$$f(0)(f(0) - 1) = 0$$

となるので，$f(0) = 0$ となるか $f(0) = 1$ となるかである．

$f(0) = 0$ のときは $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \cdot 0 = 0$ となり，恒等的に 0 である．

$f(0) = 1$ のときを考える．任意の数 α に対し，$f(n\alpha) = f(\alpha)^n$ であることが n に関する帰納法で得られる．また，

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \geqq 0$$

である．

$a = f(1) \geqq 0$ とおくと，$f(n) = f(n \cdot 1) = a^n$ が得られ，$x = \dfrac{1}{p}$ に対しては，$a = f(1) = f(px) = f(x)^p$ となって，$f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \sqrt[p]{a}$ が得られる．これから，x が有理数のときは $f(x) = a^x$ が得られる．定理 2.4(4) から，$a > 0$ なら $f(0) = 1$ になる．$a = 0$ のときは $f(0) = 0$ の場合になる．後は，連続性からすべての実数 x に対しても $f(x) = a^x$ が得られる．

6.3． 存在を示す．$n < m$ のときは，$U(x) = 0,\ V(x) = P(x)$ とおけばよい．

$n \geqq m$ とする．そのために,「$U(x)$ が存在して，$\deg(P(x) - U(x)Q(x)) < n$ となる」ことを示す．

$P(x)$ の最高次が ax^n で，$Q(x)$ の最高次が bx^m のとき，$U(x) = \dfrac{b}{a}x^{n-m}$ とおけばよい．

あとは，$P(x) - U(x)Q(x)$ を改めて $P(x)$ とおき，その次数 $n'(< n)$ と m とを比べ，$n' < m$ なら終わりで，$n' \geqq m$ ならもう一度やればよい．

一意性については，別の

$$P(x) = U'(x)Q(x) + V'(x) \quad (\deg V'(x) < m)$$

という割り算が出来たと仮定する．すると，

$$(U(x) - U'(x))Q(x) = V'(x) - V(x)$$

となる．左辺は 0 でなければ次数は $\geqq m$ であり，右辺の次数は $< m$ であるから，0 でなければならない．

6.4．
$y' = y - 4.643115$ に関して展開し直すと，

	1	-30	300	-3000	10000
$(y = 4.643115)$		4.643115	-117.734933	846.277667	-9999.980470
	1	-25.356885	182.265067	-2153.722333	$\vert\, 0.019530$
$(y = 4.643115)$		4.643115	-96.176416	399.719507	
	1	-20.713770	86.088651	$\vert -1754.002826$	

$$h'(y') \sim -1754.002826y' + 0.019530 = 0$$

となり，$y' = 0.019530/1754.002826 = 1.11345316612392 \cdot 10^{-5}$ という近似解が得られる．y に戻せば，$y = 4.643115 + 0.0000111345316612392 = 4.6431261345316612392$ となる．x にすれば，$x = -1 + \dfrac{y}{10} = -0.53568738654683387608$ となって，$h(4.643115)$ の桁落ちにも関わらず，精度はかなりあがっている．ちなみに $g(-0.53568738654683387608) = -4.29799126 \cdot 10^{-10}$ となっている．

第 7 章

7.3．(1) 微分可能性の定義式

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$$

で，$\varphi(x)$ は $x = a$ で連続で，$f'(a) = \varphi(a) > 0$ であるから，十分小さな $\delta > 0$ があって，

$$\varphi(x) > 0(x \in (a - \delta, a + \delta))$$

となる．

(2) 演習 7.10(3) の $h(x)$ が反例になっている．

(3) 定義域全体で最大でなくても，極大（局所的に最大）であれば主張は成り立つ．そのとき，十分小さな $\delta > 0$ があって，

$$f(a) \geqq f(x) \qquad (x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta))$$

となっている．このため，(1) により，$f'(a) > 0$ となることも $f'(a) < 0$ となることもできない．

(4) 次回の平均値の定理を使うとすぐ．直接示すこともできるが，結局は同じような議論をしなければならない．

7.4． 仮定から，

$$f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad x-a=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)}$$

であり，逆関数の言葉に書き換えると

$$f^{-1}(f(x))-f^{-1}(b)=\frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(f(x)-b)$$

となる．$f'(a)=\varphi(f^{-1}(b))\neq 0$ だから，$\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ は $y=b$ で連続である．

7.5． 連続性の議論から，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

を示せばよい．収束性は演習 3.1 の後の議論をまねればよい．そこで，

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \;=\; \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

を示せばよいが．これも演習 3.1(1) から，

$$1>\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}>1-\frac{n}{n^2}=1-\frac{1}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

となることから分かる．

7.8． (1) $y=\sqrt[n]{x}$ とおけば，$x=y^n$ であり，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{y}{ny^n}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

(2) $y=x^{q/p}$ とおけば，$y^p=x^q$ であり，

$$py^{p-1}\frac{dy}{dx}=qx^{q-1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{q}{p}x^{q-1}(x^{q/p})^{1-p}=\frac{q}{p}x^{q-1+(1-p)q/p}=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1}.$$

(3) $x>0$ のとき，$y=\log x$ と置けば，$x=e^y$ となり，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}.$$

$x < 0$ のとき，$y = \log -x$ と置けば，$-x = e^y$ となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-e^y} = \frac{1}{x}.$$

(4) $y = \log_a x$ と置けば $x = a^y = (e^{\log a})^y = e^{y \log a}$ となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\log a)e^y} = \frac{1}{x \log a}.$$

(5) $y = x^a$ と置けば $\log y = a \log x$ となり，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

7.9． (1) は実際にグラフを描けば，容易に確認される．

(2) $y = \operatorname{arcsinh} x$ と置くと，$x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ となり，$e^y > 0$ に関する方程式

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

を解けば,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

が得られる．$\operatorname{arccosh} x$ の場合も同様.

(3) $y = \arcsin x$ と置くと，$x = \sin y$ となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\arccos x$ も同様. $y = \arctan x$ と置くと，$x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$ となり，

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y,$$

となる．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(4) $y = \operatorname{arcsinh} x$ と置くと，$x = \sinh y$ となり，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

他も，(3) と同様.

7.10． (1) は本文のグラフを見れば分かる．$|x^n|$ は $x=0$ 以外では微分可能．$x=0$ では，$n=1$ のとき，左右微分可能で，$f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. $n \geqq 2$ のときは微分可能で，微係数は 0.

(2) $a_1, \ldots, a_k$ 以外では微分可能．a_i が単根なら，$x=a_i$ で微分可能でないが，a_i が重根なら，$x=a_i$ で微分可能で，微係数は 0 になる．

(3) $f(x)$ については，0 では微分不能で，左右微分可能でなく，連続．それ以外では微分可能.

$|f(x)|$ については，$x=1/n\pi$（$n \in \mathbb{Z}$）では微分不能で，左右微分可能で，連続．0 では微分不能で，左右微分可能でなく，連続．それ以外では微分可能.

$g(x)$ については，$x=1/n\pi$（$n \in \mathbb{Z}$）では微分不能で，左右微分可能で，連続．0 では微分可能で，微係数は 0．それ以外では微分可能.

$h(x)$ については，$x=1/\sqrt{n\pi}$（$n \in \mathbb{Z}$）では微分不能で，左右微分可能で，連続．0 では微分可能で，微係数は 1．それ以外では微分可能．しかし，単調増加ではない.

(4) 整数以外の有理数で連続でなく，無理数で連続だが微分可能でない．整数では微分可能で，微係数は 0.

第 8 章

8.1． (i) (1) の前半：$f(x) = x - \sin x$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x) = 1-\cos x \geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ だから，定理 8.2(2) を使うと，$f(x) > 0$ がわかる.

(2) の後半：$f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ とおくと，(1) の前半から，$f(0)=0$ かつ $f'(x) = -\sin x + x \geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから.

(1) の後半：$f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ とおくと，(2) の後半から，$f(0)=0$ かつ $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから.

(2) の前半：$f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos x$ とおくと，(1) の後半から，$f(0)=0$ かつ $f'(x) = -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x \geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから.

(3) $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\geqq 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}-1\right)$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから．

(4) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とおくと，$\lim_{x\to\infty} f(x)=e$ は既に知っており，$f'(x)=f(x)(\log(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{1+x})=-f(x)(\log(1-\dfrac{1}{1+x})+\dfrac{1}{1+x})>0$ で，$x>0$ で単調増加であるから．最後の不等式は $z=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと，$x>0$ は $0<z<1$ に対応し，その範囲で $g(z)=\log(1-z)+z<0$ であればよい．そのことは，$g(0)=0$ かつ $g'(z)=\dfrac{-1}{1-z}+1=\dfrac{-z}{1-z}<0$ であることから．

(5) $f(x)=e^x-(1+x+\dfrac{x^2}{2})$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=e^x-(1+x)$ で，$f'(0)=0$ かつ $f''(x)=e^x-1\geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ のときゆえ，$f'(x)>0$ となるから．

(6) の前半: $f(x)=x-\log(1+x)$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}\geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから．

(6) の後半: $f(x)=\log(1+x)-(x-\dfrac{x^2}{2})$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0$ だから．

(7) の前半: $f(x)=\sinh x-x$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\cosh x-1\geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから．

(7) の後半: $f(x)=x-\tanh x$ とおくと，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=1-\dfrac{1}{\cosh^2 x}\geqq 0$ で，$=0$ となるのは $x=0$ だから．

(ii) $a^x b^{1-x}$, $ax+b(1-x)>0$ だから，$a^x b^{1-x}<ax+b(1-x)$ を示すには，対数をとって，$f(x)=\log(ax+b(1-x))-\log a^x b^{1-x}=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b>0$ であることを示せばよい．

$f(0)=f(1)=0$ であり，$(0,1)$ 上で $f(x)$ は微分可能だから，ロルの定理によって

$$f'(c)=\frac{a-b}{ac+b(1-c)}-(\log a-\log b)=0$$

となる $c\in(0,1)$ がある．ところで，

$$f''(x)=\frac{-(a-b)^2}{(ax+b(1-x))^2}<0\quad(0<x<1)$$

だから，$f'(x)$ はこの範囲で単調減少なので，$f'(c)=0$ となる c は1点しかない．従って，$f(x)$ は，$0<x<c$ で単調増加で，$c<x<1$ で単調減少である．増減表を書けば，$(0,1)$ 上で $f(x)>0$ であることがわかる．

8.2． (1) 題意により，直線の傾きは負ゆえ、それを $-m$ $(m>0)$ とおけば，直線は $Y=-m(X-a)+b$ と表され，$x=a+\dfrac{b}{m}, y=b+ma$ であることがわかる．線分 AB の長さ $f(m)$ の2乗は

$$g(m)=f(m)^2=(b+ma)^2+(a+\frac{b}{m})^2$$

となり，

$$\frac{d}{dm}g(m)=\frac{2}{m^3}(am^3-b)(am+b)$$

となる．$m=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ の前後で，負から正に符号が変わり，それ以外で変わらないので，このとき極小かつ最小になる．また，$m\to 0$ または ∞ のとき，$f(m)$ は ∞ になる．また最小値では

$$x=a^{1/3}(a^{2/3}+b^{2/3}),\quad y=b^{1/3}(a^{2/3}+b^{2/3})$$

となり，

$$\begin{aligned} f(m) &= \sqrt{a^{2/3}(a^{2/3}+b^{2/3})^2+b^{2/3}(a^{2/3}+b^{2/3})^2} \\ &= \sqrt{(a^{2/3}+b^{2/3})^3}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \end{aligned}$$

となる．

(2) 長方形の辺は座標軸と平行にとってもよく，縦の辺の座標を x とすると，面積 $S(x)$ は

$$S(x)^2=(2x\times 2\sqrt{r^2-x^2})^2=2^4(x^2(r^2-x^2))$$

を満たす．括弧の中を微分すると

$$2x(r^2-x^2)+x^2(-2x)=2x(r^2-2x^2)$$

だから，これが $=0$ となる $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ のとき，つまり正方形のとき最大である．最小はなく，$x\to 0$ または r のとき，限りなく0に近づく．

(3) 1辺の長さを x とすると，面積 $S(x)$ は

$$S(x) = x \times (\frac{L}{2} - x)\,\text{だから},\, S'(x) = \frac{L}{2} - 2x$$

となり，これが $=0$ となる $x = \dfrac{L}{4}$ のとき，つまり正方形のとき最大である．最小はなく，$x \to 0$ または $L/2$ のとき，限りなく 0 に近づく．

(4) 点 (x_0, y_0) での接線が

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

であることは，演習 9.3(5) にあり，今はこれを認めておこう．従って，x 切片の x 座標は $\dfrac{a^2}{x_0}$ で，y 切片の y 座標は $\dfrac{b^2}{y_0}$ であることがわかり，面積 $S(x_0)$ は $S(x_0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2b^2}{x_0y_0}$ なので $f(x_0) = x_0y_0 = \dfrac{b}{a}x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}$ の最大最小問題を考えればよい．微分すると，

$$f'(x_0) = \frac{b}{a}\frac{a^2 - 2x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

となる．これが $=0$ となる $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ のとき $f(x_0)$ は最大で，面積 $S(x_0)$ は最小になる．最大はなく，$x \to 0$ または 1 のとき，限りなく ∞ に近づく．

8.3． この 3 問題での共通の設定を述べておく．力が働いていなければ等速直線運動をすると考え，重力によって下方に引き下げられると考えている．投げ出した点の水平面上への垂線の足を原点とし，上方に y 軸をとる．初速を与えるベクトルの水平成分方向に x 軸をとれば，運動は x, y 平面の中で起きる．投げた瞬間の時刻を原点として，時間 t を経過したときの，物体の位置を $x(t), y(t)$ と書くことにする．

(1) 初速度ベクトルの水平面からの仰角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ とすると，

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \quad y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

となる．物体が落ちるとは $y(t) = 0$ となることで，その時刻 $t_1 (> 0)$ を代入すると到達距離は

$$x(t_1) = x\left(\frac{2v_0 \sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

となり，微分するまでもなく，$\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}$ のとき最小で，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大になる．

(2) 斜面からの仰角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} - \alpha)$ とすると，

$$x(t) = v_0 t\cos(\theta+\alpha), \quad y(t) = v_0 t\sin(\theta+\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

となる（真上 $(\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha)$ に投げると $x(t) = 0$ なのは明らか．斜面の上の方に向かって投げる場合の計算を示す．下の方に向かって投げた方が遠くまで行くが，計算は似たようなものなので，その場合については読者に残しておく）．物体が斜面に落ちるとは $y(t) = x(t)\tan\alpha$ となることで，その時刻 $t_1 (> 0)$ を代入すると（$t_1 = \dfrac{2v_0}{g}\{\sin(\theta+\alpha) - \cos(\theta+\alpha)\tan\alpha\}$）

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= \frac{2v_0^2}{g}\cos(\theta+\alpha)\{\sin(\theta+\alpha) - \cos(\theta+\alpha)\tan\alpha\} \\
&= \frac{v_0^2}{g}\{\sin 2(\theta+\alpha) - (\cos 2(\theta+\alpha)+1)\tan\alpha\} \\
&= \frac{v_0^2}{g}\left\{\frac{\sin(2\theta+\alpha)\cos\alpha - \cos 2(\theta+\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right\} \\
&= \frac{v_0^2}{g}\left\{\frac{\sin(2\theta+\alpha)}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right\}
\end{aligned}$$

となる．(1) と同じように微分するまでもなく

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad \text{のとき最大で,} \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{のとき最小}$$

となる．最大到達距離は $\dfrac{x(t_1)}{\cos\alpha}$ と得られるので，$\dfrac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$ となる．$\alpha = 0$ のときは (1) の結果と一致する．水平面からの角は $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$ であり，(1) でより高く投げる必要がある．

(3) 水平面からの仰角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2})$ とすると（投げ下げる $(\theta < 0)$ と到達距離が小さくなるので），

$$x(t) = v_0 t\cos\theta, \quad y(t) = h + v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

となる．物体が落ちるとは $y(t) = 0$ となることで，その時刻

$$t_1 = \frac{v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}}{g} \quad (> 0)$$

を代入すると到達距離は

$$x(t_1) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} + \frac{v_0 \cos\theta \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g}$$

となり，これを $X(\theta)$ とおき，$\dfrac{dX}{d\theta} = 0$ を計算すると，

$$v_0 \cos 2\theta \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh} = \sin\theta (v_0^2 \cos 2\theta - 2gh)$$

となって、両辺を 2 乗すれば

$$v_0^2 \cos^2 2\theta (v_0^2 \sin^2\theta + 2gh) = \sin^2\theta (v_0^4 \cos^2 2\theta - 4ghv_0^2 \cos 2\theta + 4g^2h^2)$$

$$2ghv_0^2 \cos^2 2\theta = \sin^2\theta (-4ghv_0^2 \cos 2\theta + 4g^2h^2)$$

$$v_0^2 \cos^2 2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} (-2v_0^2 \cos 2\theta + 2gh)$$

$$\cos 2\theta = \frac{gh}{v_0^2 + gh}$$

が得られ，左辺を $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ として，$\sin\theta$ に関する 2 次方程式を解けば

$$\sin\theta = \frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2 + gh)}}$$

が得られる．このときが最大で，$h = 0$ に当たる (1) でのときより，少し低く投げる必要がある．到達距離はこの θ を $x(t_1)$ の式に入れればよい．

8.4. 言い換えは読者に任せる．(4) 以外の証明は易しい．(4) だけ簡単に示しておこう．ε–δ 論法の有効さを味わってほしい．さて，

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \gamma$$

が存在すると仮定すると，任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \gamma \right| < \varepsilon \qquad (a < c < a + \delta)$$

となる．そこで，

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \text{ かつ } \lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$$

という仮定から，

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(a+\delta)}{f(x)}=0 \text{ かつ } \lim_{x\to a+}\frac{g(a+\delta)}{g(x)}=0$$

であるので，ある $\delta'>0$ が存在して，

$$\left|\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right|,\ \left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right|<\varepsilon \qquad (a<x<a+\delta')$$

を満たす．後は

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\frac{1-\frac{g(a+\delta)}{g(x)}}{1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}}$$

に注意して，定理 8.4 を使って，定理**??**の証明を真似ればよい．

8.5． (1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{a^ne^{ax}}{n!}=\infty.$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a-b^x\log b}{1}=\log a-\log b.$$

(4) $y=x^x>0$ とおき，$\log y$ を考える．

$$\lim_{x\to 0+}\log y=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{\log y}=e^0=1.$$

(5) $y=\sqrt[x]{x}>0$ とおき，$\log y$ を考える．

$$\lim_{x\to 0+}\log y=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x}=-\infty$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to 0+}e^{\log y}=e^{-\infty}=0.$$

(6) $y=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x>0$ とおき，$\log y$ を考える．

$$\lim_{x\to\infty}\log y=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1-\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}=-1$$

となるので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\log y}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

(7)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

(8)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

(9)

$$\lim_{x\to 0+}\log x\log(1+x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+x)}{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+x}\frac{1}{\frac{-1}{x(\log x)^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-(\log x)^2}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{-2(\log x)\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\log x}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-2x)=0.$$

(10) $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}>0$ とおき，$\log y$ を考える．

$$\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^2}=2$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\log y}=e^2.$$

(11)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}\frac{\sin(1/x)}{1/x}=1\cdot 0=0.$$

(12) $y=(\sin x)^{\sin x}>0$ とおき，$\log y$ を考える．

$$\lim_{x\to 0+}\log y=\lim_{x\to 0+}\frac{\log\sin x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0+}(-\sin x)=0$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0+}(\sin x)^{\sin x}=\lim_{x\to 0+}e^{\log y}=e^0=1.$$

第 9 章

9.1． 演習 5.9 と同じようにして，中間値の定理を使え．

9.2． 本文にあるように，(7) 以外は接線である．(9) は，原点以外の有理数では不連続だが，原点では連続でかつ微分可能であり，微係数は 0 である．これを接線と言うのは，幾何的には少し抵抗があるが，本書の定義では立派な接線である．

9.3． 概形は省略．(1) 接線 $y=0$, 法線 $x=a$. (2) 接線 $y=2ax-a^2$, 法線 $y=-\dfrac{x}{2a}+\dfrac{1}{2}+a^2$.

(3) 接線 $y=3a^2x-2a^3$, 法線 $y=-\frac{1}{3a^2}x+\frac{1}{3a}+a^3$.

(4) 接線 $y=-\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{2}{a}$, 法線 $y=a^2x-a^3+\dfrac{1}{a}$.

(5) 接線 $b\alpha^2(y-b)+a\beta^2(x-a)=0$,
法線 $a\beta^2(y-b)=b\alpha^2(x-a)$.

(6) 接線 $y=x\sinh a-a\sinh a+\cosh a$,
法線 $y=-\dfrac{1}{\sinh a}x+\dfrac{a}{\sinh a}+\cosh a$.

(7) 接線 $y=\dfrac{x}{a}+\log a-1$, 法線 $y=-ax+a^2+\log a$.

(8) $a=x(d)=d-\sin d, b=y(d)=1-\cos d$ として，接線 $y=\dfrac{\sin d}{1-\cos d}(x-d)+2$, 法線 $y\sin d=(\cos d-1)(x-d)$.

(9) $a=x(d)=c\cos^3 d, b=y(d)=c\sin^3 d$ として，接線 $y=-x\tan d+c\sin d$,
法線 $y=x\cot d-\dfrac{c(1-2\sin^2 d)}{\sin d}$.

9.4. (1) ヒントに従い，$f'(x), f''(x)$ を表わすと，

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad f''(x) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^3}$$

となり，これを代入すれば，

$$\begin{aligned}
\xi - x(a) &= -\frac{f'(a)(f'(a)^2+1)}{f''(a)} = \frac{\frac{y'(a)}{x'(a)}\left(\frac{y'(a)^2}{x'(a)^2}+1\right)}{\frac{x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)}{x'(a)^3}} \\
&= -\frac{y'(a)(x'(a)^2+y'(a)^2)}{x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)}, \\
\eta - y(a) &= \frac{f'(a)^2+1}{f''(a)} = \frac{\frac{y'(a)^2}{x'(a)^2}+1}{\frac{x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)}{x'(a)^3}} \\
&= \frac{x'(a)(x'(a)^2+y'(a)^2)}{x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)}, \\
r(a) &= \frac{(f'(a)^2+1)^{3/2}}{|f''(a)|} = \frac{(x'(a)^2+y'(a)^2)^{3/2}}{|x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)|}
\end{aligned}$$

となる．

(2) 以下の番号は演習 9.3 の曲線の番号を表わす．

曲線 (1) 曲率中心は常に無限遠点で，曲率は定数で $\kappa(a) = 0$.

曲線 (2) $\xi = -4a^3, \quad \eta = 3a^2 + \frac{1}{2}; \quad 27\xi^2 = 2(2\eta - 1)^3,$

$$\kappa(a) = \frac{2}{(1+4a^2)^{3/2}} \quad \text{の最大値は } 2(a=0 \text{ のとき})\text{，下限} = 0.$$

曲線 (3) $$\xi = \frac{a - 9a^5}{2}, \quad \eta = \frac{5}{2}a^3 + \frac{1}{6a},$$

$$\kappa(a) = \frac{6|a|}{(1+9a^4)^{3/2}} \quad \text{の最小値} = 0(a = 0 \text{ のとき}),$$

$$\text{最大値は}\frac{5\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{2}} \quad \left(|a| = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[4]{5}}\text{のとき}\right).$$

曲線 (4) $$\xi = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2a^3}, \quad \eta = \frac{3}{2a} + \frac{a^3}{2}, \quad (a > 0)$$

$$\kappa(a) = \frac{2|a|^3}{(1+a^4)^{3/2}} \quad \text{の下限} = 0(a \to 0, \pm\infty \text{ のとき}),$$

$$最大値は\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (|a|=1 のとき).$$

曲線 (5) $\alpha>\beta$, $x=\alpha\cos\theta, y=\beta\sin\theta$ とおく.

$$\xi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\cos^3\theta, \quad \eta=-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta}\sin^3\theta; (\alpha\xi)^{2/3}+(\beta\eta)^{2/3}=(\alpha^2-\beta^2)^{2/3},$$

$\kappa(a) = \frac{\alpha\beta}{((\alpha^2-\beta^2)\sin^2\theta+\beta^2)^{3/2}}$ の 最大値は $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ $(\theta = n\pi のとき)$, 最小値は $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ $(\theta=(n+\frac{1}{2})\pi のとき)$.

曲線 (6) $y=\cosh x$ だから, $y'=\sinh x$, $y''=\cosh x=y$.

$$\xi=a-\sinh a\cosh a,\ \eta=2\cosh a; \quad 16(\xi-a)^2=\eta^2(\eta^2-4)$$

$\kappa(a)=\frac{1}{\cosh^2 a}$ の最大値は 1 $(a=0 のとき)$, 下限は 0 $(a\to\pm\infty のとき)$.

曲線 (7) $y'=-\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$ だから

$$\xi=2a+\frac{1}{a},\ \eta=\log a-1-a^2 \quad (a>0)$$

$$\kappa(a)=\frac{a}{(1+a^2)^{3/2}} \quad の$$

$$最大値は\frac{2}{3\sqrt{3}} \ \ (a=\frac{1}{\sqrt{2}}のとき), 下限は 0 \ \ (a\to 0+ のとき).$$

曲線 (8) $x'(t)=1-\cos t$, $x''(t)=\sin x$, $y'(t)=\sin t$, $y''(t)=\cos t$ だから

$$x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)=\cos a-1,\ x'(a)^2+y'(a)^2=2(1-\cos a)$$

$$\xi=a+\sin a,\ \eta=\cos a-1$$
$$\kappa(a)=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos a}} \quad の$$

$$上限は\infty \ \ (a\to 0+, 2\pi- のとき), 最小値は\frac{1}{4} \ \ (a\to\pi のとき).$$

縮閉線が元のサイクロイドと合同であることは, $X=\xi+\pi, Y=\eta+2, T=a+\pi$ とおけば,

$$\xi+\pi=a+\sin a+\pi=T-\sin T, \quad Y=\cos a-1+2=1-\cos T$$

となることから.

曲線 (9) $x'(t)=-3c\cos^2 t\sin t,\ x''(t)=-3c(-2\cos t\sin^2 t+\cos^3 t)$, $y'(t)=3c\sin^2 t\cos t,\ y''(t)=3c(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)$ だから

$$x'(a)y''(a)-x''(a)y'(a)=-9c^2\sin^2 a\cos^2 a,$$

$$x'(a)^2+y'(a)^2=9c^2\sin^2 a\cos^2 a$$

$$\xi=c\cos a(3-2\cos^2 a),\ \eta=c\sin a(3-2\sin^2 a)$$

$$\kappa(a)=\frac{1}{3c|\sin a\cos a|}=\frac{2}{3c|\sin 2a|}\quad \text{の}$$

$$\text{上限は}\infty\ \ (a\to 0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi),\text{最小値は}\frac{2}{3c}\ \ (a=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}\text{のとき}).$$

9.5. (1) まず，$G_+(f)$ は $I\times\mathbb{R}$ の中で開集合であり，$G_+(f)$ が凸であることと，$\overline{G_+(f)}$ が凸であることが同値であることに注意する（f が連続関数であることは仮定してある．まじめにやると，$\Leftarrow$ は少し面倒）．

(1) の条件は,「グラフ $G(f)$ 上の 2 点 $C=(c,f(c))$ と $D=(d,f(d))$ を結ぶ線分が $\overline{G_+(f)}$ に含まれることを意味する．したがって，上の注意から，f が凸関数なら (1) の条件を満たすことが分かる．

さて，(1) の条件を仮定して，$\overline{G_+(f)}$ が凸であることを示そう．2 点 $P,Q\in\overline{G_+(f)}$ をとる．線分 PQ が $\overline{G_+(f)}$ に含まれることを言えばよい．$P,Q\in\partial\overline{G_+(f)}=G(f)$ のときは (1) の条件そのものである．

$P,Q\notin\partial\overline{G_+(f)}$ とするとき，線分 PQ を延長した直線 ℓ が $G(f)$ と 2 点 P',Q' で交われば，(1) の条件から $PQ\subset P'R'\subset\overline{G_+(f)}$ となる．

もし交わらないようなら，I が無限区間か有限区間かによって少し扱いが変わるが，線分 $\ell\cap G_+(f)$ を y 軸に関して下方に平行移動して，最初にグラフ $G(f)$ にぶつかる時点で同様の議論をすればよい．

(2) $c<d$ としておく．(i) $n=2$ のとき，

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c+\theta(x-c))}{2!}(x-c)^2$$

となるので，$f''\geqq 0$ ならば，問題の不等式が得られる．

(ii) 不等式の両辺の差

$$g(x)=f(c)+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)-f(x)$$

を考えると，$g(c)=g(d)=0$ で，

$$g'(x)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}-f'(x),\ g''(x)=-f''(x)$$

となり，(i) とロルの定理（定理8.1）から，$g'(c)\geqq 0\geqq g'(d)$ であり，また $x>c$ で $g'(x)$ は単調減少であるから，$g(x)$ は $g(c)=0$ から大きくなり，途中で減少に転じて，$g(d)=0$ に至る．したがって，その途中ではずっと，$g(x)\geqq 0$ である．

第10章

10.2，10.3． 番号は3つの演習での通し番号．答は，出来るだけ一般の n に対して与えるが，読者はまず，$n=2$ の場合に行ない，余裕があるときに一般の場合を考えればよい．

(1) $f(\mathbf{x})=1-x_1^2-x_2^2=1-\|\mathbf{x}\|^2$.

$$f_{x_i}=-2x_i,\quad f_{x_ix_j}=-2\delta_{ij}.$$

(2) $f(\mathbf{x})=\pm\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}$. 以下 $1>\|\mathbf{x}\|^2$ とする．$f_{x_i}=\mp\dfrac{x_i}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}}$.

$$f_{x_ix_i}=\mp\frac{1+x_i^2-\|\mathbf{x}\|^2}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}^3},\quad f_{x_ix_j}=\mp\frac{x_ix_j}{\sqrt{1-\|\mathbf{x}\|^2}^3}\ (i\neq j).$$

(3) $f(\mathbf{x})=\pm\sqrt{1+\|\mathbf{x}\|^2}$. $f_{x_i}=\pm\dfrac{x_i}{\sqrt{1+\|\mathbf{x}\|^2}}$.

$$f_{x_ix_i}=\pm\frac{1+\|\mathbf{x}\|^2-x_i^2}{\sqrt{1+\|\mathbf{x}\|^2}^3},\quad f_{x_ix_j}=\mp\frac{x_ix_j}{\sqrt{1+\|\mathbf{x}\|^2}^3}\ (i\neq j).$$

(4) $f(\mathbf{x})=1-x_1-x_2$, $f_{x_i}=-1$, $f_{x_ix_j}=0$.

(5) $f(\mathbf{x})=\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}-1$, $f_{x_i}=\dfrac{-2x_i}{\|\mathbf{x}\|^4}$,

$$f_{x_ix_i}=\frac{8x_i^2-2\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^6},\quad f_{x_ix_j}=\frac{8x_ix_j}{\|\mathbf{x}\|^6}\ (i\neq j).$$

(6) $f=\sin\dfrac{y}{x}$. $x\neq 0$ で偏微分可能.

$f_x=-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$, $f_y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}$,

$f_{xx} = -\dfrac{y^2}{x^4}\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{2y}{x^3}\cos\dfrac{y}{x}$, $f_{yy} = -\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}$, $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{y}{x^3}\sin\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$.

(7) $f = e^x \log y$. $y > 0$ が定義域で，偏微分可能．$f_x = f$, $f_{xx} = f_x = f$, $f_{xy} = f_y = \dfrac{e^x}{y} = f_{yx}$, $f_{yy} = -\dfrac{e^x}{y^2}$.

(8) $f = \log(x^2+y^2) = \log\|x\|^2$. 原点以外で偏微分可能．$f_{x_i} = \dfrac{2x_i}{\|x\|^2}$,

$$f_{x_ix_i} = \frac{2(\|\mathbf{x}\|^2 - 2x_i^2)}{\|\mathbf{x}\|^4}, \quad f_{x_ix_j} = \frac{-4x_ix_j}{\|\mathbf{x}\|^4}\ (i \neq j).$$

(9) $f = x^3 - 2xy + y^3$. $f_x = 3x^2 - 2y$, $f_y = -2x + 3y^2$. $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = f_{yx} = -2, f_{yy} = 6y$,

(10)
$$f = \begin{cases} 1 & x = y \text{ かつ } (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases},$$

「それ以外」のところで偏微分可能で，$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yxx} = f_{yy} = 0$.

(11)
$$f = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき}. \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ のとき偏微分可能．$f_x = \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xx} = \dfrac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy} = \dfrac{2xy^3 - 6x^3y}{(x^2+y^2)^3}$.

$(x,y) = (0,0)$ のとき，f_{xy}, f_{yx} は存在しないが，f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} は存在して，値は 0 である．

(12) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ では，$f_x = \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = \dfrac{y^6 + 6x^2y^4 - 3x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}$ となる．

$f_x(0,y) = y\ (y \neq 0)$, $f_x(0,0) = 0$ だから，$f_{xy}(\mathbf{0}) = 1$. $f_y(x,0) = 0\ (x \neq 0)$, $f_y(0,0) = 0$ だから，$f_{yx}(\mathbf{0}) = 0 \neq f_{xy}(\mathbf{0})$. これ以外の場合は，(11) と同様．

10.4． $f(x,y)-f(x,b)$ に対し，変数 x に関して平均値の定理を使うと $\Delta=(f(x,y)-f(x,b))-(f(a,y)-f(a,b))=(f_x(\eta,y)-f_x(\eta,b))(x-a)$ を満たす $\eta=a+\theta_x(x-a)$, $0<\theta_x<1$ が存在する．

$f_x(\eta,y)$ を y の関数と考えて，平均値の定理を使うと $f_x(\eta,y)-f_x(\eta,b)=f_{xy}(\eta,\zeta)(y-b)$ を満たす $\zeta=b+\theta_y(y-b)$, $0<\theta_y<1$ が存在する．こうして,

$$\Delta=f_{xy}(\eta,\zeta)(x-a)(y-b),\ f_{xy}(\eta,\zeta)=\frac{\Delta}{(x-a)(y-b)}$$

が得られる．演習の後半だけなら，x と y の役割を交換すればよい．

演習自体を示してみよう．$f(x,y)-f(a,y)$ に対し, 変数 y に関して平均値の定理を使うと $\Delta=(f(x,y)-f(a,y))-(f(x,b)-f(a,b))=(f_y(x,\zeta')-f_y(a,\zeta'))(y-b)$ を満たす $\zeta'=b+\theta'_y(y-b)$, $0<\theta'_y<1$ が存在する．

さて，点 (a,b) における $f_y(x,y)$ の x に関する偏微分可能性だが,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_y(x,b)-f_y(a,b)}{x-a}$$

が収束すれば，これが $f_{yx}(a,b)$ になる．f が C^1 級なので，これは，存在すれば,

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}\frac{f_y(x,y)-f_y(a,y)}{x-a}$$

と一致するが，$y\to b$ のとき $\zeta'=b+\theta'_y(y-b)\to b$ となるので,

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}\frac{f_y(x,\zeta')-f_y(a,\zeta')}{x-a}=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}\frac{\Delta}{(x-a)(y-b)}$$

とも一致する．そしてこれは，証明の前半部により収束する．さらに

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f_{xy}(\eta,\zeta)=f_{xy}(a,b)$$

となる．

10.5． 右辺は,

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\lambda^\alpha=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)\lambda^{\alpha-m}=m!\begin{pmatrix}\alpha\\ m\end{pmatrix}\lambda^{\alpha-m}$$

となるから．むしろ，α が任意の場合の 2 項係数を

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ m\end{pmatrix}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}$$

で定義するといった方がよい．

左辺に対しては少し注意が必要である．類書にはこの形で出ているが，$m>1$ の場合には，このままでは誤解を生むかもしれない．微分の $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial y$ は関数 f の第 1 変数と第 2 変数に関する偏微分という意味で，x,y という変数を微分するわけではない．微分は λ でするのだから，x,y は定数と考えているのである．

10.6． 演習の直前の注意により，$\operatorname{grad} f(\mathbf{a})\neq 0$ であれば，値が大きくなる方向（も小さくなる方向）があることから．1 変数のときの演習 7.3(3) と同じである．

10.7． $\mathbf{a}=(a,b)$，$\mathbf{x}=(a+h,b+k)$ とおいて，テイラーの公式（定理 10.4(2)）を $m=2$ で使うと，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=$$

$$\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}(a',b')+2hkf_{xy}(a',b')+k^2f_{yy}(a',b')\right)$$

となる，ここで，$a'=a+\theta h, b'=b+\theta k$ である．そこで，

$$A=f_{xx}(a,b),\ B=f_{xy}(a,b),\ C=f_{yy}(a,b)$$

とおく．仮定は $A>0$ かつ $AC-B^2>0$ であり，そのとき絶対値が十分小さな h,k に対して，$f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$ を示せばよい．f が C^2 級であることから，

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)-\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$$

は，高次の無限小であり，$Ah^2+2Bhk+Ck^2>0$ を示せばよい．このことは線形代数の 2 次形式の問題であり，だから多変数の場合にも拡張して示すことができるが，$m=2$ のこの場合なら，

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=A\left((h+\frac{B}{A}k)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}k^2\right)$$

と平方完成すればよい．

10.8． (1) 最大．(2)+ のとき最大で，$-$ のとき最小．(3) $-$ のとき最大で，+ のとき最小．(9) 最大でも最小でも，鞍点でもない．(13) 鞍点．

10.9． $F = f - \lambda\, g$ とおく．$F_\lambda = 0$ は $g = 0$ と同じ．
(1)

$$F_x = -(s-y)(s-z) - \lambda,\ F_y = -(s-x)(s-z) - \lambda,$$

$$F_z = -(s-x)(s-y) - \lambda,\ F_\lambda = -(x+y+z-2s)$$

となる．$x = 0$ と置けば，$2s = y + z \leqq s + s = 2s$ となって，$s = y = z$ となる．また単に $x = s$ とおいたとしても $f = 0$ となり，条件から $f \geqq 0$ なので，$x = 0, y = 0, z = 0, s = x, s = y, s = z$ のうちどれを仮定しても，$f = 0$ と，最小値になる．そこで，それらの条件を除外すれば，λ を消去することで容易に $x = y = z$ が得られる．後は演習の前の議論と同じ．

(2)
$$F_x = y - 2x\lambda,\ F_y = x - 2y\lambda$$

となるから，$y = 2x\lambda,\ x = 2y\lambda$ となる．$xy \neq 0$ とすれば，両辺をかけることによって得られる $xy = 4xy\lambda^2$ から，$4\lambda^2 = 1$ となる．また，2 乗すれば $y^2 = 4x^2\lambda^2 = x^2$ が得られ，$g = 0$ から $x^2 = y^2 = \dfrac{r^2}{2}$ が得られる．それゆえ，$x, y = \pm\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ となり，最大値は $x = y$ の時で $\dfrac{r^2}{2}$ となり，最小値は $x + y = 0$ の時で $-\dfrac{r^2}{2}$ となる．$xy = 0$ の時は $f = 0$ となり，極値にならない．

(3)
$$F_x = \frac{-x + 2\lambda}{x^3},\ F_y = \frac{-y + 2\lambda}{y^3}$$

となるから，$xy \neq 0$ に注意すると，$x = y$ となり，$g = 0$ に代入すると $x^2 = 2r^2$ が得られ，$x = y = \pm\sqrt{2}r$ となる．最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{r}$ で，最小値は $-\dfrac{\sqrt{2}}{r}$ である．

(4)
$$F_x = mx^{m-1} - 2\lambda,\ F_y = my^{m-1} - 2\lambda$$

となるから，$x^{m-1} = y^{m-1}$ となり，$|x|^{m-1} = |y|^{m-1}$ となって，$|x|, |y| \geqq 0$ だから，$|x| = |y|$ が得られる．$x + y = 0$ の場合は $g = 0$ を満たさないので，$x = y = 1$ となり，これだけが極値点の候補である．最大値はなく，最小値は 2 である．

(5)
$$F_x = 1 - 2\lambda b^2 x,\ F_y = 1 - 2\lambda a^2 y$$

となるから，$b^2 x = a^2 y$ が得られ，$x = \pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$（複合同順）となり，最大値は $\sqrt{a^2+b^2}$ で，最小値は $-\sqrt{a^2+b^2}$ である．

10.9 の追加問題． $f = xyz,\ g = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 \quad (a, b, c > 0)$

解答：$F = f - \lambda g$ とおくと，

$$F_x = yz - \lambda\frac{2x}{a^2},\ F_y = xz - \lambda\frac{2y}{a^2},\ F_z = xy - \lambda\frac{2x}{a^2}$$

となり，$F_x = F_y = F_z = 0$ とおくと，

$$xF_x = yF_y = zF_z = 0 \quad \Rightarrow \quad xyz = 2\lambda\frac{x^2}{a^2} = 2\lambda\frac{y^2}{b^2} = 2\lambda\frac{z^2}{c^2}$$

$$xF_x + yF_y + zF_z = 3xyz - 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 3xyz - 2\lambda = 0$$

であるから，

$$\lambda\frac{x^2}{a^2} = \lambda\frac{y^2}{b^2} = \lambda\frac{z^2}{c^2} = \frac{\lambda}{3}$$

となり，

$$x^2 = \frac{a^2}{3}, \quad y^2 = \frac{b^2}{3}, \quad z^2 = \frac{c^2}{3}$$

となるので，

$$x^2y^2z^2 = \frac{(abc)^2}{27} \quad \Rightarrow \quad xyz = \pm\frac{abc}{3\sqrt{3}}$$

だけが極値の候補となり，最大値は $\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ で，最小値は $-\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ となる．それを取る値は $|x| = |y| = |z| = a/\sqrt{3}$ で，負の値が 1 個と 3 個になる 4 点で最小値，0 個と 2 個になる 4 点で最大値を取る．

第 11 章

11.3． (1) I の任意の点 x で，I に含まれる x の有界閉な近傍をとれば，その上で極限関数は連続になり，特に x で連続になる．

(2)　(1) と (6) は広義一様収束し，(2) と (3) は広義一様収束しない．

11.4． (6) と (7) は ∞ で，(8) と (9) は 1 である．

11.5． $g'(x) = \dfrac{1}{2x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, 同様に $g^{(n)}(x)$ は $Q(x)$ を有理関数として，$Q(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ という形をしている．

第 12 章

12.1. (1) 平均値の定理から．(2) 一様連続性の定義で，δ に対して，$\varepsilon = \dfrac{\delta}{K}$ とおけばよい．(3) $[0,1]$ 上でリプシッツ連続だとすれば，任意の $0 < x < 1$ に対して，$|x|^{\alpha} < K|x|$ が成り立つ．したがって，$1 < K|x|^{1-\alpha}$ となるが，x が 0 に近づくとこれは成り立たなくなる．