

解答 . (1) グラフ $G(f)$ は $G_+(f)$ の境界です .

(1) の条件は「グラフ $G(f)$ 上の 2 点 $C = (c, f(c))$ と $D = (d, f(d))$ を結ぶ線分が $G_+(f)$ に含まれる」ということであり , f が凸関数であるとは「領域 $G_+(f)$ の 2 点 P, Q を結ぶ線分が $G_+(f)$ に含まれる」ということでした .

(1) の条件から f が凸関数であることを導けばよいのです . つまり , $P, Q \notin G(f)$ のときにも , P, Q を結ぶ線分が $G_+(f)$ に含まれることを示せばよいのでした .

$P \in G(f)$ かつ $Q \notin G(f)$ とします . Q から y 軸に平行に直線を下ろして , グラフ $G(f)$ との交点を $D = (d, f(d))$ とします . $P, D \in G(f)$ なので , 線分 PD は $G_+(f)$ に含まれます . 線分 PQ の各点から y 軸に平行な線を引くと , グラフに交わる前に線分 PD と交わり , したがって , PQ は $G_+(f)$ に含まれます .

$P, Q \notin G(f)$ のときも , P から下方にグラフまで線分を下ろしていけばよいのです .

(2) $c < d$ とします . (i) $n = 2$ のときのテイラーの定理は ,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c + \theta(x - c))}{2!}(x - c)^2$$

となるので , $f'' \geq 0$ という仮定から , 求める不等式が得られます .

(ii) 不等式の両辺の差

$$g(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c) - f(x)$$

を考えると , $g(c) = g(d) = 0$ であり ,

$$g'(x) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(x), \quad g''(x) = -f''(x)$$

となります .

(i) は $g'(c) \geq 0$ を意味しています . ロルの定理 (定理 4.5) から , $g'(\xi) = 0$ となる点 ξ が c と d の間にあります .

仮定から $g''(x) = -f''(x) \leq 0$ なので、 $g'(x)$ は単調減少であり、 x が c から大きくなっていくにつれ、 $g'(x)$ は小さくなり、 ξ で 0 になって、 d では負になります。

$g(x)$ の変化を見ると、 x が c から大きくなるにつれ、 $g(c) = 0$ から大きくなっていき、 $x = \xi$ で減少に転じて、 $g(d) = 0$ に至ります。したがって、その途中ではずっと、 $g(x) \geq 0$ です。

増減表を書くなら

x	c		ξ		d
$g''(x)$	—	—	—	—	—
$g'(x)$	+	+	0	—	—
$g(x)$	0	↗	+	↘	0

となります。 $g''(x) \geq 0$ と $g(x)$ の両端の値から、 $g(x)$ の中間の値の符号を定めたということになっています。 $\square$



4.10. $f''(x) \leq 0$ のときは、曲がり方が (上下) 逆になる。 $f''(x) = 0$ を満たす点を変曲点と言います。

練習問題 4.11(2) から、 $f(x)$ が $x = c$ で極値を取るときは $f'(c) = 0$ となりますが、逆に $f'(c) = 0$ (停留点) であっても、 c で極値を取るとは限りませんでした。 $f(x) = x^3$ で、 $c = 0$ とすれば反例になります。このとき、0 は変曲点になっています。

停留点 c が変曲点でなく ($f''(c) \neq 0$)、 $f''(x)$ が c の近くで連続であれば、 $f(x)$ は c で極値をとることがわかります。

さらに、 $f''(c) > 0$ であれば $f(c)$ は極小点であり、 $f''(c) < 0$ であれば、 $f(c)$ は極大点であることも分かります。

増減表を書いてみると分かり易いでしょう。 $f''(c) > 0$ とする

と, c の近くで正であり,

x		c	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	$-(\nearrow)$	0	$+(\searrow)$
$f''(x)$	+	+	+

となって, $f(c)$ が極小値になります.