数学の教育の個人的側面と社会的側面

— 教育数学の構築に向けて —

三重大学名誉教授　蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)
Professor Emeritus, Mie University

鳥羽商船高等専門学校　佐波 学 (Manabu Sanami)
Toba National College of Maritime Technology

目 次

1　はじめに

1.1　教育の観点から数学を見る

1.1.1　数学者と数学教育

2008 年度から始まった「数学教師の数学能力の育成」を主題とする一連のＲＩＭＳ共同研究において，筆者たちが担当した課題は,「数学者が数学教育にかかわることの原理的な意味」を明らかにすることであった．

この課題に登場する「数学者」と「数学教育」という言葉であるが，その一般的なイメージは，おおむね，前者が大学に属する数学研究者であり，後者は小・中・高等学校における（いわゆる）学校数学のことだろう．しかし，そもそも，共同研究の趣旨は,「数学研究者」がこの意味での「学校数学」に直接的に関わることではなく,「学校教員の養成」という大学教育の範囲内における数学者の関与を課題とするものであったから，筆者たちに要請された“ 原論 ”においては,「数学教育」を「学校数学」より広く捉える必要があった．

そうした事情の下で，筆者たちは，この課題への取り組みを,「教育という観点から数学を見る」という作業から始めることとした．

1.1.2　研究集会における事例報告から

「教育を近代以降の西欧的な学校教育に限定せずに，教育との関係で数学を眺める」という試みのひとつに，歴史に材をとった事例の検討がある．本ＲＩＭＳ共同研究の集会における報告を振り返ってみると，次のようなものが挙げられる．

1. 近代西欧における解析学の創生期の話題から [1]

[1] 2011 年 RIMS 共同研究

- ヴィエト，デカルト，フェルマー，ニュートン，ライプニッツ，オイラーといった人物が，どのようにして，どのような数学を学んだか
- 出版された数学（教科）書類 — 特に，ラムス，クラヴィウス，ヴィエト，オートレッド，ファウルハーバー，デカルト，ニュートン，オイラー の代数的著作群 — の検討
- 「数学」を保持・発展させてきた社会集団の種別と性格

2. 結縄数学 — 素朴社会における数学の典型事例 — の話題から [2]

- インカ帝国における結縄数学について
- 明治期初頭における琉球の結縄数学について
- 台湾アミ族の結縄数学について

3. 古代中国の話題から [3]

- 隋・唐の数学専門官僚の養成機関である「算学」のシステムについて
- 標準的なテキスト群である算書十経 — 特に「孫子算経」について

4. イスラム世界の“ 算術 ”の話題から [4]

- 諸テキスト —：*Kitāb al-jabr wa al-Muqābala* (Al-Khwārizmī̄)，*Kitāb al Fuṣūl Fī̄ al-Ḥisāb al-Hindī̄* (Al-Uqlī̄didī̄), *Uṣūl Ḥisāb al-Hind* (Kashyār ibn Labbān) — について
- “ *The Arithmetic of Al-Uqlī̄disī̄* ”における A.S.Saidan のイスラム算術書の分類に関する所説の検討

5. 明治初頭期における洋算の導入の話題から [5]

- 専門職のための数学書（明治 10 年前後）— 特に，『数学三千題』（尾関正求），『算術教科書』（寺尾寿），『筆算通書』（順天堂塾，福田理軒）について
- 普通教育のための数学書（明治 10 年前後） — 特に,『小学教授書』（伊藤有隣，藤塚唯一編）『小学算術書』（師範学校）について
- パターンを見出す試み — 漢字文化依拠的（伝統的）， 欧米語依拠的（蘭学），欧米文化依拠的（幕末軍事技術＋留学）という類別
- 日本の中等普通教育における数学の設計者としての藤澤利喜太郎

[2] 2012 年度 RIMS 共同研究
[3] 2012 年度 RIMS 共同研究
[4] 2013 年度 RIMS 共同研究
[5] 2013 年度 RIMS 共同研究

いずれも，“ 試掘の針を刺してみた ” 程度ではあるが，教育という観点から見た際の「数学」の多様性を窺わせるには十分であり，そこから,「教育との関係の下で多様な様相をみせる数学」というものを，どう捉え，どう扱えば良いか，という課題が派生することとなった.

1.2　教育数学とは何か

1.2.1　「数学の教育」から「教育のなかの数学」へ

上述の課題に取り組む過程で，筆者たちは,「教育数学」と呼ぶ営みの必要性を提唱するようになった.

数学と教育の関係は，mathematics の原義を振り返ればわかるように，広くて深い．一方で,「数学教育 (mathematics education)」という言葉は — 先にも述べたが — 実際上，近代以降における西欧化された（初等・中等の）学校教育における数学の教育を意味するようになってしまっており，数学と教育との深淵な関係性を十全に表現することができないように感じられた．筆者たちが「教育数学 (educational mathematics)」という言葉を提唱した理由の一つに，数学と教育のありかたを「学校教育のなかの数学」から開放したいという思いがあった.

今,「学校教育のなかの数学」という言葉を使ったが，ここには，数学教育が「数学を — しかるべき目的を達成させるため — いかに教育するか」といった“ 教育 ”に力点をおく営みであるのに対し，教育数学は，いわば,「教育のなかの数学」とでもいうべき，あくまで“ 数学 ”に力点がある営みであるとの考えが反映している．もちろん,「“ 学校教育 ”のなかの数学」は,「“ 教育 ”のなかの数学」という，より大きな容器（うつわ）のなかにすっぽりと収まる.「“ 教育 ”のなかの数学」の“ 教育 ”を，各種の学校教育，さらには，学校教育に限定されない様々な“ 教育 ”にまで拡げることで，数学と教育に関する多様な知見— もちろん,「学校教育のなかの数学」を対象とする数学教育に役立つものも — を得ることが期待できる.

1.2.2　容器としての「教育数学」

ここで,「教育のなかの数学」という上述の意味合いの「教育数学」というものについて，若干定義ふうに述べるなら,「教育数学とは，教育に関係する数学的活動の総体」といったものになるだろう [6]．もちろん,「教育」を何と思うか,「関係する」とはどういう状態を指

[6] 教育数学を「教育に関係する数学的営みの総体」と述べたが，これは,「教育という領域で営まれる数学」と言い直すことができるかもしれない．フェリックス・クラインは，エアランゲン大学の就任講演のなかで「数学の応用」について論じ,「数学の応用」には,「天文学の予報計算」や「工学技術での業績」のような「学術的な見解の何がしかを他のいろいろな分野の面前に引き」出すような種類のものと,「物理学の要請から生まれ，物理学の用語を使うほうがふさわしい，数学の一分科としての，物理数学」のようなものがあるとしている（本稿の付録 C.1 を参照）．つまり,「出来上がった（静的な）数学を（数学の用語のままで）他の領域で利用する」という意味での「数学の応用」— “ 応用 ”に重心がある — と,「他の領域の用語で営まれる（動的な）数学」— 重心は“ 数学 ” — としての「応用数学」の区別である.

クラインのこの類別を援用するなら，— 「教育」の領域の場合は， 上の例の「天文学」や「物理」といった領域と異なり， 使用する用語が重なるため，両者の区別が難しいが —,「数学教育」が前者の「数学の応用」

すかによって，その内包は変化するだろう[7]．

いくつか，思いつくままに例を挙げてみよう．

まずは，高等教育も含めた学校教育に関連して,「教える立場」からは，数学の教科書の執筆という活動（あるいは執筆された教科書），試験問題や演習問題の作成という活動（あるいは作成された問題），授業や教科書作成を“ 意識 ”したしかるべき定理の別証の工夫等々は，上述の意味の教育数学に含まれる．また,「学ぶ立場」からは，課題として与えられた数学の問題を解いている過程（あるいは，解答）等も含まれるだろう．

「教育」の意味を，教育哲学者のジョン・デューイふうに「自身の経験を他者に伝達すること」と広くとれば，公衆向けに数学の啓蒙的な著作を執筆すること（あるいは出版された著作）や，数学研究者が自身の研究成果を数学者のコミュニティに公表するために論文を書く作業（あるいは書かれた論文）もまた，教育数学の一部とみなすことができる．

もちろん，何もかも教育数学だと主張しているわけではない．最後の例の場合 — そもそも「他者に伝達すること」を「教育」と呼ぶのは広義に過ぎると思われるが[8]—，数学研究者が自身の研究テーマに関する何らかの問題を解くため「他者に伝達すること」を意識せずに行っている“ 数学的活動 ”は，教育数学には含まれないだろう[9]．

この「教育のなかの数学」としての「教育数学」は，いわば，教育との関係で数学を考えるための“ 容器 ”を用意して，ラベルを貼ったということになるだろう．

1.2.3 「営みとしての教育数学」と「学としての教育数学」

前項の末尾で,「教育数学」は,「いわば，教育との関係で数学を考えるための“ 容器 ”を用意して，ラベルを貼った」ものだと述べたが,「容器を用意して，ラベルを貼ること」には，いろいろな効用がある．例を挙げれば — こうした文脈での一般論だが — ，別々の領

であるのに対し,「教育数学」は後者の「応用数学」の一種ということができるかもしれない．

この話題に関連して，ハイマン・バスが「数学教育を応用数学の一種と見なすことが有用となる」（本稿の第3.2.3 項に引用）と述べているが，彼の見解は，ここで規定した「数学教育」と「教育数学」が混合したものになっているように思われる．

[7] 「教育」を出来うる限り広義にとることで，いわば，普遍的（ユニヴァーサル）な「教育数学」を考えることができる.「教育」をより限定された種類のものにすることで，それに対応する — 「普遍的な教育数学」の部分クラスをなすような — 「教育数学」が得られることになる．ただ，こうした枠組みを実効的に働かせるためには,「教育」だけではなく，数学的活動を定義づける「数学」をどのように扱うのか，という問題がある．つまり,「普遍的な教育数学」だけでは議論の枠組みとしては十分ではなく，それの成立を担保するようなより大きな容器 —「普遍的な数学」とでも呼ぶべきもの — が必要となるだろう．

[8]むしろ,「他者への伝達」が定義として適切な何がしかの概念の名称を冠した数学があって，教育数学は，その部分クラスと思うのが自然だろう．ちなみに，教育数学を含むような，そうした「数学」を，第 5.1 節では,「共有数学 (communal mathematics)」と呼んでいる．

[9] もちろん，実際に研究活動を「他者に伝達すること」を意識しているかどうかで区別することは，“ 現実的 ”にはできないだろう．しかし,「教育数学」というものを，何がしかの実効性をもつ営みとして展開するためには，“ 現実的 ”に不可能なこうした区分を，どうにかして行うことが必要になる．今，著者たちの念頭にあるのは，“ 無限の多様性をもつ現実 ”から“ 実効性のある有限的な枠組み ”を取り出すための，マックス・ヴェーバーの方法論を適用することである．例えば，ここで挙げた「数学者が論文を書く行為を“ 教育数学（ないしは共有数学）”とみなす」ことは，ヴェーバーの用語でいう“ 理念型（Ideal Typus）”としてであれば可能となるだろう．

域で営まれていた事どもが，ひとつの容器に収まることで互いに関係していたことに気づかれ，そこから新たな知見が得られる，といった効能が期待できる．

しかし，そもそも当の容器が非常に大きなものの場合，同一のものが知らずに別箇のものとして含まれてしまうといった虞れもある．そうした失敗を回避し，さまざまな事どもを一つの容器に収集することの効用を十分に発揮させるためには，容器がしかるべき“ラベル付きの仕切り枠”によって区分け — より一般的に言えば，秩序化ないし構造化 — されている必要があるだろう．容器が区分けされることで，収容されている事どもの整理が可能となる[10]．また，整理を行うことで，重なりを解消し，あるいは，不足を知り，さらには，不足を埋めるという新たな方向性を見出すことも可能となるだろう．

我々は,「容器としての教育数学を何らかの方針で秩序化（構造化）する」という営みも，また，教育数学と呼びたい．そして，容器としての教育数学と秩序化する営みの方の教育数学を“理念的”に区分し，前者を「営みとしての教育数学」，後者を「学としての教育数学」と仮称することにしたい[11]．

1.2.4 教育数学とは何か

前項で，教育数学を「営みとしての教育数学」と「学としての教育数学」に区分したが，実のところ，両者は，相互に依存し合っている．

そもそも,「教育」であるとか「数学的活動」が何であるかが判然としなければ，— 脚注 9 のコメントでも少し触れたが — ,「教育数学」という容器（「営みとしての教育数学」）は，その境界を確定することもできない．あるいは，“容器の区分けの効用”の比喩でみたように，容器の内部を秩序化（「学としての教育数学」）することは，容器の内容物の変容を促すことを含意する．逆に，容器の内容の変化がある閾値を超えれば，既存の枠組で整理を行うことに不都合が生じ，構造の変容（再構造化） が必要となることもあるだろう．

結局のところ,「営みとしての教育数学」と「学としての教育数学」は，教育においてであれ，数学に関してであれ,「教育数学」というものが実践的に有意味であるために必要な，教育数学の二つの機能ということができる．

[10]容器の仕切り方は，もちろん，無前提に一意的に定まるものではない．目的に応じた複数の秩序（構造）があり得ることは，当然のことである．

[11] 数学発展の歴史を振り返ってみれば，そこで展開されているプロセスは，個別の課題を解決する作業を繰り返しながら，新たに開発された数学的概念なり計算方法なりを組織化・体系化していくことであったといっても良いだろう．前者が要素的な数学的活動であり，後者は秩序化する活動とみなすことができる．様々な問題を数値的に解くという数学的行為が“秩序化”され —「鶴亀算」,「植木算」等々といった類の — 「ラベルを貼った枠」が設けられると，しばしば，そうしたラベルの集積が「数学」と呼ばれるように，一般的には，秩序化の結果得られた体系が「数学」と呼ばれることも多い．“何々算”といったラベルを貼るという秩序化の枠組みが設定されてしまえば，新たに得られた問題解決の手法にラベルを貼り，既存の体系のなかに位置づけ直すような活動も，また，数学的活動と呼ばれることになる．しかし，そうしたプロセスの集積がある段階に達すると，方程式論であるとか，代数学であるとかといった，前提として設定されている秩序自体を変更するような再秩序化（トマス・クーンのいうパラダイムの変更）が行われることになる．単純化された図式ではあるが，数学発展の過程を以上のように捉えることもできるだろう．

なお，以上の言明は，ヴェーバーが自らの方法論を定立する最大の動機となった，“無限の多様性”をもつ現実的な歴史の過程から学的な扱いが可能となる“有限の機序”を取り出すという営みの一種であって，ひとことで述べれば,“理念型”としての主張である．

以上を，包括的な定義ふうにまとめれば,「教育数学とは，教育に関係する数学的な諸活動とそれらを秩序付けようとする諸活動の総体」といったふうになるだろう [12]．

1.3　本稿の内容

1.3.1　本稿の目的

前節で見たように,「教育数学」を，堅固で，汎用性に富み，実効性の高いものとして構築するためには,「営みとしての教育数学」を秩序づけるための枠組みを“しかるべき資材”で作ることが必要になる [13]．そして，その定礎には,「教育」と「数学」の定義が不可欠であろう．

本稿は,「学としての教育数学」の定礎のための準備作業を目的としている．そのため,「数学の教育」について，日常的な状況から始め，さまざまな疑問を提起し，関連する諸見解を紹介しながら,「数学」や「教育」をどのように捉えるのが相応しいかを追求する．

1.3.2　本稿の構成

第 2 章は,「学ぶ」や「教える」という言葉の拡がりについて,“個々の人間の営み”の範囲内で検討を行いながら，個人的側面から「教育」をどのように規定すればよいかに迫る．教育という営みは「言語」を最大の手段として利用する営みであるから，第 3 章では，数学の教育と言語との関係性について概観する．第 4 章は，社会という観点から数学の教育を眺め，そこから見えてくる事象のあれこれについて考察を行う．また，ある話題を論じる際に鍵となる参考文献からの引用が多量の場合は，資料という形態で，付録にまとめてある．

最後に，外国語の文献を引用する際，日本語訳が出版されている場合は，概ねそれを利用させて戴いたが，一部，手を加えたところもあることを付記しておく．

---

[12] この“定義”において,「教育」を，何がしか他の領域の名称に取りかえれば，脚注 6 で触れた「クラインの後者の意味での応用数学」が得られる．ただ，この意味の（教育数学をその一種とするような）応用数学は,「やがて応用されている領域の用語を離れ,“純粋数学”の一分科に転じることになる」というクラインの主張のように，時間発展の相の下でみれば，それぞれの領域で閉じているのではなく，より大きな「数学」という枠組のなかに含まれているとみなすべきだろう．

それでは，その大きな枠組みである「数学」は，どう“定義”すれば良いのだろうか．この文脈に沿うのであれば— 教育数学の“定義”から「教育」を除いて —,「数学とは，数学的な諸活動とそれらを秩序化する諸活動の総体である」という言明が考えられる．この“定義ふうの言明”は,「数学」の定義のなかに「数学的活動」が含まれているのだから，いわば,“数学の再帰的定義”といったものになっている．この“定義”は，脚注 11 で述べた「図式化された数学発展の過程」を表現していると思うこともできるし,「初期値としての始原数学の与え方」および「秩序化をどのようなものとするか」を“パラメーター”として,「多様な数学」が生成される機構を表現しているとみなすこともできる．

もちろん，ここで述べた内容を“言葉の遊び”以上のものとするためには，それなりの方法論に基づく必要がある．今，想定しているのは，ヴェーバーに倣って,「人間の行為」をすべての議論の基盤とするものである（第 5.2 節参照.）

[13] 脚注 7 の文脈で述べれば,「普遍的な教育数学」（ないし「普遍的な共有数学」）といった“包括的なクラス”の秩序で，部分クラスとして実現される種々の「教育数学」の秩序としても適合的なものである必要もある．

2　数学の教育の個人的側面

本章では,「学ぶ」や「教える」という言葉が適用される日常的な状況の検討から始めて，教育という観点から数学を眺めるときに見えてくる事象のあれこれについて考えてみたい．ただし，本章で扱う「学ぶ」や「教える」という言葉の使用は，原則として，個々の人間の営みという範囲に意味を限定しておく．したがって，本章の主題は,“ 個人的側面から見る数学の教育 ”ということになる．

2.1　「学ぶ」と「教える」の非対称性

「教育（education)」を,“ 個々の人間の営み ”という観点から眺めてみよう．このとき,「教育」には，少なくとも，教育を受ける側からの「学ぶ (learn)」という方向性と，教育を与える側からの「教える (teach)」という，双つの方向性があることが見て取れる．

教育とは「学ぶ〔学習者の立場〕」ことなのか,「教える〔教授者の立場〕」ことなのか，それとも，どちらとも異なる何かしら“ 特別 ”な過程（プロセス）なのだろうか．

2.1.1　日常生活における「教育」の事例

この「学ぶ」と「教える」を意識しながら,“ 教育 ”が含意する状況を，日常生活からいくつか取り上げてみよう．

1. 学校教育
   (a) 講　義
   教室で，多人数の学習者と一人の教師が対面で行う「教育」.
   (b) 演　習
   実験実習やゼミナール等を通じた「教育」.
   (c) 宿　題（ホームワーク）
   予習，復習，レポート作成等を通じた「教育」.
   (d) 通信教育
   内容的には，上述の「宿　題（ホームワーク）」と同様である.（いわゆるスクーリングを伴う場合，その内容は，先の「講義」や「演習」と同様.）したがって，ここでは，独立した要素的なものとは考えない．
2. 現任訓練 (*On the Job Training*)
   職業的な仕事の現場で，業務に必要な知識や技術を,「研修における訓練」を通じて習得させる「教育」.

3. 徒弟修業

   職業的な実務の場で，未熟練者が，熟練者との協働作業に従事することを通じて，業務に必要な知識や技術を「学ぶ（“ 盗む ”）」という形態の「教育」.

4. 独　学

   学習者が “ 出版物（電子的なものを含む）” 等で「学ぶ」ことによる「教育」.

2.1.2　学習者と教授者

前項に掲げた「教育が実践されている場」の諸例において,「学習者」と「教授者」がどのような形態でどのように存在しているかを概観しておこう.

まず，1-(a) と 2 番目は，学習者が「学ぶ」行為と教授者が「教える」行為が融合された状況において「教育」が成立している.

3 番目では，学習者が「その人物から学ぶ」という意味での「教授者」は存在するだろうが，その人物自身に「教える」という意図があるか，あるいは，あるとしてもその在り方が 1-(a) や 2 番目の例と同種のものと認定して良いかについては，疑問がある.

4 番目においては，学習者との “ 直接的接触 ” をもつという意味での「教授者」は存在しない．しかし，視（聴）覚媒体化された「作成者の意図」を想定するなら，この「意図」が「教える」というものであるかどうかについて，1-(a) や 2 番目の例と 3 番目の例の区別と同様な事情が成立するだろう.

なお，1-(a) 以外の学校教育の要素 (b), (c) について，上述のような見方をするなら，(b) の「演習」は 2 番目ないし 3 番目の例との，(c) の宿題（ホームワーク）は 4 番目の例との，それぞれ類似が見て取れる．また，1-(a) と 2 番目の例の差異を明らかにするためには,「教える」と「学ぶ」についてのより精密な議論が必要となる.

2.1.3　「学ぶ」と「教える」の非対称性

前項における簡単な予備的考察から見て取れることは,「学ぶ」と「教える」の，ある種の非対称性である．つまり,「A から B が学ぶ ⇔ B が A に教える」といった単純な “ 対称性 ” は成立しない．例えば，上の 3 番目の例のような場合，日常的な言葉の用法では,「教えてもらわないが，学んでいる」ということになるだろう．このように，少なくとも（比喩的ではない）慣用的な意味では,「教えても学ばない」こともあれば,「教えなくても学ぶ」こともあることになる.

もちろん,「教える」と「学ぶ」が独立しているわけではないだろう．例えば,「教える」を,「学習者に “ 学ばせる ” ことを目的とした意図的活動」と規定してみると,「教えても学ばない」のは，単に「教える」という行為の失敗に過ぎないということになる．つまりは, “ 論理的 ” には,「教える」は「学ぶ」に従属する概念ということになる.

しかし,「教える」についてのこの“ 規定 ”は，3 番目の例にはうまく適合しない．もし，3 番目の状況についても「教える」という言葉を適用するのであれば,「教える」ことを「その結果として学習者が“ 何がしか ”を学ぶ活動」とでもすることになるのかもしれない．

あるいは,「教える」だけに“ 意図的 ”を課すのではなく,「学ぶ」についても，意図的なものとそうでないものを区別することが有効であるかもしれない．

本章では，次節以降で「数学の教育で何を学ぶ／教えるのか」ということについての検討を行っていくのだが,「学ぶ」や「教える」の規定については，議論が進んでから振り返ることとし，当面は，曖昧さを残したままにしておきたい．

2.2 「知識」と「能力」

ここで,「数学の教育によって学習者は何を“ 獲得[14] ”するのか」ということについて考えてみよう．検討作業の叩き台として，数学の教育の成果として期待されることを，“ **知識** (*knowledge*) ”と“ **能力** (*faculty*) ”に二分する．

簡単な例として，1 次方程式を取り上げてみよう．

1 次方程式について,「移項という操作で $ax = b$ の形に変形し，両辺を x の係数 a で割って，$\cdots$ 」といった，“ 言語された手順 ”としての「1 次方程式の解法」は，数学の「知識」と見なしている．他方，実際に与えられた方程式から計算によって解を得ることを可能とするものは,「能力」であると考えることにする．

2.2.1 数学の「知識」と「能力」

まずは，天下り的ではあるが，数学の教育で「学ぶ」べき“ 知識 ”と“ 能力 ”を，仮に，次のように規定することから始めたい．なお,「知識」と「能力」を以下のように規定することの意味合いについては，後で触れることにする．

1. 知　識

   数学的な概念や定型化された技法を“ 言語[15] ”化したもので，記憶や記録の対象となるもの．

2. 能　力

   (a) 課題解決型

   “ 所与の状況（コンテクスト）の下で，所与の課題を，解決する ”能力で，次の二種に類別される．

---

[14] 当面は,「学ぶ」,「習う」,「習得する」,「身につける」等々と言い換えても良い．

[15] この“ 言語 ”化の“ 言語 ”は，声音という聴覚媒体を用いる通常の意味での言語（第 3.1.3 項に掲げたマルティネによる言語の定義を参照）に限定されるものではなく，視覚媒体 (文字) 等の使用も含む“ 一般的な言語 ”を想定している.（より詳しくは，共示される内容に“ 操作（ピアジェの意味でのシェム）”を含むような，ソシュールの意味でのシーニョや，プリエートの意味でのインストゥルメントといったものである.）

i. **知識適用型**

既存の「数学的知識」を利用して解決するもの．

さらに，状況（コンテクスト），課題，解決の方法や結果の表示法，等々が，それぞれ，“言語”化されているか，あるいは，定型化されているかといった観点から，下位の種別に分類できる（以下の類型についても同様）．

ii. **技法開発型**

既存の「数学的知識」だけを利用するのではなく，新たな技法や概念の開発を伴うもの．

(b) **知識創出型**

(a)-ii) において創出された概念や技法を，定型化もしくは“言語”化することで，新たな“知識”を創出する能力．

2.2.2 知識と能力の相互依存性

前項で述べた「知識」と「能力」は，独立した概念ではない．「知識」と「能力」を，個々の人間なり，人間集団において，時間発展の相の下 — つまり，通時的 — に観察すれば，相互に依存し合っていることが見て取れる．

その様子を概観すれば，知識と能力は，知識適用型課題解決能力 ⇒ 技法開発型課題解決能力 ⇒ 知識創出という順に“発達”することになる．こうして，知識と能力は，既存の知識を利用した能力から新たな知識が産出され，さらにこの知識を利用して…といった種類の“相互依存的”な関係を成立させながら，共存していると見なすことができる．

2.2.3 学校数学の場合

本項では，前項に規定した数学の「知識」と「能力」について，学校数学〔初等中等教育における数学〕の場合について，簡単な説明を与えておきたい．

通常の学校教育で供給される数学の教育の特徴は，“（脚注 15 の意味で）言語化された数学の世界”を対象としていることである．そこで学ぶのは，(１）数学的概念と定式化された技法という“知識”と，(２）定式化された状況（コンテクスト）と課題において（１）の知識を適用する能力，が基本である[16]．これは，現代日本の学校数学に特有なものではなく，古代メソポタミアの書記数学をはじめ，数学史で知られる多くの数学の教育に共通なものである．

難易度の高い入学試験で験されるのは，(あくまで言語化された学校数学世界の中で）未定型的な状況（コンテクスト）において既習の知識を適用して課題を解決することになる．そうした状況や解法が新たに“知識化”されることによって，“学校数学”は時間発展をしていくとみなすこともできる．

[16] この文脈では，「知識」が先にあり，その後にそれを適用する「能力」を学ぶということになる．しかし，「知識」と「能力」の関係性は，実のところ，そのように単純に把握することのできるものではないのだが，その点については，これから議論していくことになる．

ところで，学校数学で扱われる能力が“定型化”されたものであることを問題視する趣旨の見解が，しばしば主張されることがある．その是非をここで論じることはしないが，現実社会の実務で必要とされる数学的能力の圧倒的多数が定型的なものであることには注意を促しておきたい．

2.3　検証可能性を問う

2.3.1　「数学がわかる」ことについて

“数学の教育”を受けた結果として達成されるべき状態を表わす日常的な表現を，上述の“知識と能力”の枠組みで位置づけてみよう．

「数学を知っている」と言われるのは，おおむね，“知識”を,「数学ができる」や「数学を使える」は“能力”を，それぞれ想定していると見なすことが，少なくとも言葉の日常的な使い方としては，自然だろう．

それでは,「数学がわかる」というのはどうであろうか.「数学がわかる」ことを,「知識（用語や公式)」を“暗記”しているだけの状態とは見なさず，そうした知識を“課題解決”に適用できること，つまり「(知識活用型）課題解決能力」を身につけていることと見なすことは，数学の教育に関心を抱く者の間では珍しくない．ここには，数学のもつ“道具性”という性格が色濃く反映していると言って良いかもしれない[17]．

ここで，少し原理的な考察を行ってみよう．数学を学んだ成果をいかに“検証”するかという問題である.「自分の感じている痛みを他人に伝えることが可能か」という哲学の古典的な問題があるが，数学 — もちろん数学に限らないが — が「わかる」ことも,「痛み」と同種の個人の内的経験に関わる感覚であるとみなせば，原理的には，他者が直接的に感受することはできないだろう．

そして，そうであれば，数学の教育の目的を「数学がわかる」に設定してしまうと，他者による成果の直接的な検証が不可能になってしまう．そもそも，第 2.2 節において，“知識”を「記憶や記録が可能なもの」と規定したのは，この“検証”の実効性を意識した上でのことである．

2.3.2　“知識”と“能力”を教える

この“検証”の問題をより鮮明に捉えるため，第 2.1 節で述べた「教える」という観点を取り上げてみよう．つまり，“知識”や“能力”を「教える」ということは，どういうことを意味しているのかについて検討してみる．

まず，“知識”について考えてみよう．我々は“知識”を「記憶や記録が可能なもの」と規定していたから，数学的知識を“教える”ことは何かという問いには,「学習者にそうした知識を記憶もしくは記録させること[18]」とすれば良いだろう．この場合，教授の結果の検

[17]「文化としての数学」という言い方があるが，“文化”に道具性を認めないのなら“知識”に入るだろうし,「伝統芸」といったものを“文化”と思うのなら“能力”も入るかもしれない．つまりは，“文化”の定義に依存する二次的なものということになる．

[18]例えば,「学習者にノートを取らせること」を,「教える」の様態の一つとみなすということ．

証〔試験〕も，既習の知識を「記憶もしくは記録」していることの確認という形態で，“実効的”に実施できるだろう．

それでは，“能力”についてはどうだろう．状況や課題の提示は，それが言語化されたものであれば容易であるかもしれないが，その課題を学習者が「解いている」状態は，どのようにすれば検証できるのだろうか．

問題を解く過程や解いた結果を“言語化”させれば，検証の対象と出来るかもしれない．しかし,「数学的な問題を解決するための営み」と「その営みを言語化すること」は，異なる事柄ではないのか.「言語化する」ということも“能力”の一種とすることは構わないが，言語化できないことをもって「数学の問題を解けていない」と判断することは行き過ぎではないだろうか[19]．

2.3.3 「数学的に考える」ことについて

「数学的に考えること」や「数学的な考え方を知る」という表現がある．“数学の教育で学ぶもの”として広く人口に膾炙したものである．素直に考えれば，前者は“能力”であり，後者は“知識”のように思える．

それでは,「数学的に考える」と「数学的な考え方」の違いは何であるのか．前者は人間の行為を表わす表現と思うべきであろうが，後者は，いったいどういうものを意味しているのだろうか．我々は「考える」は“能力”に,「考え方」は“知識”に同定することを想定しているのだが，実は，この「考える」と「考え方」の差異を明確にすることは，“能力”と“知識”を区別するための鍵となると考えている．次節では,「数学的に考える」ことが何を意味しているのかについて深く追求した，先人の取り組みを参照してみたい．

2.4 「数学的に考える」こと — フロイデンタールの見解

現代の数学教育に大きな影響を与えた数学研究者の一人であるハンス・フロイデンタールは，数学の教育の世界の探求を,「考えることをどう教えるか」という疑問に取り組むことから出発した．この疑問が数学教育にもたらしたものを，フロイデンタール自身の回想を交えながら，瞥見しておこう[20]．

2.4.1 考えることをどうやって教えるか

第2次世界大戦中，ナチスのオランダ占領によって大学を追われたフロイデンタールは，その余暇に自身の子供の教育にかかわる中で，数学を教えることへの関心を深めていった．1945年8月に開催された数学教育関係の会合において，フロイデンタールは，戦時中の思索を振り返ってこう述べている．

[19]さらに，検証の実効性の問題として,「学習者の主体的な行為としての解答の過程の言語化」と「他者によって言語化された解答の過程の単なる記憶」を区別し得るような判定が，はたして原理的に可能であるかという問題もある．

[20]以下，本節におけるフロイデンタールの見解については，文献 [12] とその参考文献を参照のこと．

> 考える教育（Education in thinking） — 実に美しい響きと魅力的な言葉の組み合せではないか．何という魅惑的な課題だろう．… 仕事のできない何年間かを過ごした後，私は，今，この課題へと立ち返ることになった．この課題について，私は，もうこれで良しと感じたことは一度もない．読むこと，書くこと，算術やフランス語，数学，体育であれ，何であれ，何かを教える者は，誰であっても，それをどう教えればよいかは正確には知らなくとも，教えているものが何であるかは知っている．考えるということは，技法（skill） ではない．私は，しばしば，長時間にわたり，私が教えたい，そして教えるべきだと思う，この奇妙な「考えるということ」について，思索にふけった．しかし,「考えるということ（thinking）」についての思索は，堂々めぐりを繰り返すばかりだった．徐々に，私は,「考えるということを教える」という問題は，理論的な方法ではなく，むしろ，もっと実践的な方法で扱うべきだということを学んだ．

2.4.2 教えるべき数学とは何か

その後，教育の実践の場に立って試行錯誤を重ねたフロイデンタールは，数学の教育で何を教えるべきかという主題について，独自の見解を深化させていく．

1980 年開催の ICMI(International Commission on Mathematics Instruction) の招待講演では，ハンス・フロイデンタールは聴衆にこう問いかけた．

> おそらく皆さんは，ここのところまで，私が教材 (subject matter) やその教授法 (didactics) についてほとんど注意を払っていないことにご不満をおもちでしょう．教材というものが仮に教科書の一章を意味するのであれば，皆さんは失望することになります．それは，主要な問題ではないのです．ですが，教えるということは常に何か (something) を教えることだ，ということには私も同意します．何でも (anything)，ではなく，何かしかるべきものをです．教える価値のある何かをです．しかし，いったい何が教える価値のあるものなのでしょうか？

数学の教育において，教材や教授法以前に検討すべきは,「教える価値のあるものは何か」という問いである．このフロイデンタールの主張は，数学の教育で教えるべきことは，教科書に書かれているような " 知識 " ではないということを強く含意している．

そして，この問いにフロイデンタール自身が与えた答は,「教えるべきものであるためには，適用可能（applicable）でなければならない．ある意味で，あるいは，何らかの意味で」であった．つまり，教えるべき数学は，現実的（レアリスティック）な状況のなかで課題の解決を可能とするようなもののことであり，先の文脈でいえば，まさに「数学的に考える」ことであるといっても良いだろう．

2.4.3　フロイデンタールの「数学化」

「教えるべき数学とは何か」という問いに対して，フロイデンタールが最終的に到達した答の鍵となる概念は，「数学化（mathematising）」である．彼にとって，「数学化」の過程（プロセス）こそ数学の本質であり，その過程の追体験が数学教育の本質であった．

それでは，数学化とは何か．

フロイデンタールによれば，数学化とは，「フォーム（form）とコンテント（content）が相互作用（interplay）」している状況において，何かを発見したり組織化したりする活動であるという．

“動物の骨に刻みをつけて数を記録”しているような素朴社会を例にとれば，「フォーム＝動物の骨に刻まれることで表象される“数”概念，コンテント＝家畜の群れ，相互作用＝数える（家畜と刻み目の対応を与える）という行為」が，数学化が実現される対象領域を形成しているひとつの状況となる．家畜の群れというコンテント上で生じる — あるいは，生じさせたい — 組み分けや増減といった事象が，数えるという相互作用を通じて骨の刻み目というフォームの世界に反映されるとき，記数法や演算の原初形態の形成が始まる．こうした営みが，数学化のひとつの姿である．

なお，フロイデンタールは，ある対象を数学化した結果生じたものどもを新たな対象とし，さらなる数学化を行なうことを「垂直方向の数学化」，未だ数学化のなされていない対象の数学化を「水平方向の数学化」と呼んでいる．

2.4.4　「数学的に考える」ことを学ぶ

フロイデンタールにとっての数学は，公式の集まりや公理系で記述される集合といった「静的な体系」ではなく，人間が営む動的な知的活動の一種，詳しくは，ある種の対象を数学化するという過程を繰り返す不断の営みであった．

結局のところ，この「数学化」を実行している過程（プロセス）こそ，「数学的に考え」ている状態そのものであるということになる．したがって，「数学的に考える」ことを学ぶとは — フロイデンタールにとっては，それこそが「数学」を学ぶことであったのだが — 「しかるべき対象領域において数学化を実現すること」ができるようになることに他ならない．そして，それは，もちろん，用語や公式のように，記憶することではない．

「数学的に考えること」 — 我々はそれを「能力（faculty）」に区分した — を学ぶということは，どういうことか．フロイデンタールが到達した結論を，筆者たちなりにまとめると，次のようなものになる．

> 「数学的に考えること」を学ぶとは，学習者が，数学化を実現する過程を指導者に誘導されながら追体験し，かつ，その追体験の過程を内観することで，内在化することに他ならない．

フロイデンタールは，以上のような“追体験”を，“誘導された再発見（guided reinvention）”と呼んでいる．本章の文脈に沿って「教える」を「学ぶ」と区別して用いるなら，「数学を

教える」ということは「教授者が“学習者の数学化の実現過程の追体験（再発見）”を誘導すること」になるのだろう．

2.4.5 数学化と知識

もちろん，本節で述べたことは，フロイデンタールの抱いたひとつの見解である．それでは，第 2.2 節で仮設した“数学で学ぶ知識と能力”という枠組みから見るとき，フロイデンタールの“数学化”は，知識なのかそれとも能力に分類されるのだろうか．

この問いは，フロイデンタール自身の問題意識からは遠いものだろう．そもそも，フロイデンタールは，知識か能力かといった二分的な考え方はしていない．あえて，本章の文脈にひきつけて解釈すれば，フロイデンタールは,「数学を学ぶことが知識を覚えることである」といった見解には反対であって,「知識は，学習者が数学化の過程を追体験した結果として副次的に習得するもの」といった捉え方であったように思われる．
しかし，フロイデンタールの提唱する「教授者によって誘導された追体験」による数学の教育も，“最初の知識”である幼児が数を覚える過程のような — フロイデンタールの言葉を用いれば「水平方向の数学化」 — は別にして，ある段階から次の段階に進む過程 — つまり「垂直方向の数学化」 — で用いられる場合には，その前提状態には何がしかの数学的な“知識”の記憶や記録が伴っていることは当然のようにも思える．
この「数学化」という考えと「知識と能力」の関係については，次節でさらなる検討を加えてみたい．

なお，フロイデンタールの提唱する教授法については，少なくとも学校数学においては，その要請の大半を占める「定型化・文字化された世界における知識適用型課題解決能力」の習得に関して，限られた時間内での実行が要請されるという学校教育の特性の下での有効性という観点から，疑問を呈する論もあることを付記しておく．

2.5 「教育」の“個人的側面”を規定する

第 2.1 節の冒頭で,「教育とは学ぶことなのか，教えることなのか，それとも，どちらとも異なる特別な過程（プロセス）なのか」と問いかけた．本節では，前節で紹介したフロイデンタールの見解を敷衍することで，第 2.1.3 節で触れた「学ぶと教えるの非対称性」の再検討をおこない,「学ぶ」,「教える」，そして,「教育」を規定することについて考えてみたい．

2.5.1 フロイデンタールの主張を敷衍する

前節で紹介したフロイデンタールの主張は，次の 2 点に要約できる．

1. 数学の中核には,「数学化」という個々の人間に固有な — つまり， 個人的な — 営みがある．

2. 数学の教育の本質は，学習者に「数学化」の過程を「追体験＝再発見」させることにある．

ここで，２つ目の主張に登場する“ 追体験 ”という言葉に着目してみよう．“ 追 ”であるということは，この“ 体験 ”が，他者によって既に体験されたものであることが前提されていると考えて良いだろう．それでは，“ 追体験 ”ではない「数学化」については，どうなのだろう．追体験ではない「数学化」とは，教育の対象ではなく，“ 新しい ”数学を産み出す営みと考えるべきかもしれない[21]．

もっとも，何をもって体験が“ 新しい ”とするかについては —我々の文脈では当然ながら — 数学研究史上における先取権ではない．教育という観点から見て“ 新しい ”か否かは，その「数学化」を実行している個人の主観において，他者の経験の追体験であるという意識があるかどうかにかかっている．

2.5.2 「学ぶ」の規定を試みる

我々は，ここに,「学ぶ」という営みの本質をみたい．つまり，ある人間が何がしかを“ 学ぶ ”ということは,「他者の経験ということを意識した模倣的な営み」のことであると規定したい．このことを，端的に,「学びの本質は意図的な追体験である」ということにする．慣用的な言い方をすれば,「“ 学ぶ ”は“ まねる ”」ということといってもよい．

それでは,“ 追 ”体験ではなく，自身の新しい体験から「学ぶ」ということはないのだろうか．もちろん，日常的な言葉の用法として,「自らの体験から学ぶ」という表現は存在する．しかし，そもそも人間の生(ライフ)というものは，経験を通じて自身を変容していく過程に他ならないから，そうした変容の中のある特定の形態のものを限定して「学ぶ」と呼ぶのであれば，議論の明確化のためにも，上述のように規定した「意図的な追体験」によるものに限定しておくべきであろうと考える．そして，それ以外の場合に「学ぶ」という言葉を用いるのは，比喩的な表現と捉えることにしたい．

「学ぶ」の本質を「意図的な追体験」と規定したことにより，第 2.1.1 節で論じた「日常的な教育の事例」についても，見通しが良くなる．

実際,“ 徒弟修業 ”において,「学習者に対して意図的に学ばせようとする教授者」は存在しなくとも，未熟練者が熟練者の営みを「意図的に追体験」すれば，そこに「学び」という行為が成立していることになる．

また，追体験は，必ずしも，人間同士の直接的接触を通じたものに限る必要はないだろうから，教室での学習の記憶や記録にもとづく学校教育の場の宿題(ホームワーク)も,“ 独学 ”の場合の“ テクスト ”の読解も,「意図的な追体験」であれば「学ぶ」が成立していることになる．特に，後者の“ テクスト ”については，作成者の意図が「意図的に学びを引き起こさせる」た

[21]追体験であろうがなかろうが，個人的な経験である「数学化」と，それが産み出す「数学」の間には，架けるべき橋が必要であろう．これは，もちろん,「数学」とは何かという問題に関連するのであるが,「数学」という言葉は，単なる個人の経験の集合に還元できない何らかの意味を感じさせるのではないだろうか．それは，本節の主題である「数学の教育の個人的側面」からはみ出る部分であると思うべきかもしれない．

めのものであろうが，そうでなかろうが，学習者の立場からは,「学んでいる」ことに相違はないことになる[22].

2.5.3 「学ぶ」と「教える」の非対称性 — 再論

結局のところ，我々は,「学ぶ」を学習者の主体的な営みとして，教授者の直接的な関与と切り離す形態で規定した．しかし，その結果として,「学ぶ」と「教える」の非対称性が,より深刻に露呈することになる．

フロイデンタール的に「教授者の誘導による学習者の追体験」を「教える」とみなすことにして，それでは，教授者の誘導が学習者に自身の体験が追体験であることを意識させないような形態のものであった場合は,「教えること」にならないのだろうか．後者の場合も「教える」と呼ぶことにすると，この場合，教授者の「教え」が成功しても，学習者が「学んでいない」ことになる[23].

もちろん，これは，学びを「意図的な追体験」と規定したことから導かれることであるが，この「学び」の規定の，上述のようなさまざま場面での適合性を勘案すれば，こちらの非対称の歪みについては受け入れざるを得ないと考えている．つまりは，第 2.1.3 節で「学ぶと教えるの非対称性」に触れた際,「教える」ことを「学習者に“学ばせる”ことを目的とした意図的活動」とする規定を考えてみたが，この規定では事態を十分に把握できていないことになる．

それでは,「教える」という行為を，どのようなものと規定すればよいのだろうか．この問いに答えるためには，まず,「学ぶ」という行為と，学びの結果として達成される状態を区別することが必要になる．

2.5.4 知識と能力の統合化 — 「学ぶ」から見る

先にも述べたが，人間が「学ぶ」という行為で達成する状態は，あくまで，意図的でない場合も含む“体験”によって達成される状態と同様の，人間としての変容である．

一般に，人間の生は，自らを取り囲む環境との相互作用の過程の連続的な継起と見なすことができる．この相互作用は，人間という内部世界と環境という外部世界の間で生じるのだが，これを，フロイデンタールのフォームの世界とコンテントの世界と解すれば，両者の関係を“組織化”するという「数学化」の役割 (第 2.4.3 項) は，この相互作用を媒介する機能を果たしているといっても良いだろう．つまり，数学の本質を，人間の内部世界と環境という外部世界の相互作用を媒介する機能に求めることができる．

人間は，内部と外部の相互作用 — 外部からの刺激を内部でどのような形態で把握するか，あるいは，逆に，内的な欲求をどのような形態で外部で実現するかといった類の事象

[22]テクストの読解を通じた“追経験”と，直接的接触を通じた“追体験”を区別する立場も考えられるだろう．ただ，テクストを“一般化された言語”によって作成された記録物とするなら，両者を実効的に区別することは，必ずしも容易なものではないと思われる．

[23]この立論は，あくまで,“個人的側面”からのものである．教育の社会的側面から見れば，こうした場合について，異なる解釈をとることができる．

— の“ 媒介 ”は，自らの経験を組織化することで同種の状況における作用の形態を“ 定型化 ”する志向性をもつ．結果として，種々の“ 媒介 ”の集まりは，ある種の構造を備えるように“ 発達 ”する．こうして，人間の内部と外部の相互作用を媒介する“ 機構 ” を考えることができるようになる．

我々は，数学の教育という文脈で語られる「経験によって人間に生じる変容」とは，この相互作用をつかさどる“ 媒介機構 ”の構造変化であると規定したいと考えている[24]．こうすれば — 例えばであるが — 学習の深浅は，構造変化の（適当な指標の下での）順序として捉えることが可能となる．

この“ 機構 ” — 我々は，仮に，言語機構と数学機構からなる操具機構と呼んでいる— に関する詳細な検討は別稿に譲るが，ここでは，本稿の文脈に沿って,「知識と能力」について簡単に触れておきたい．

原理的には，人間の内部と外部の相互作用の形態の“ 定型化 ”には,“ 行為 ”としての行うものと，何らかのシンボル (イメージ，記号) でもって表象化するものに区分することができる．ジャン・ピアジェ（[20]）の用語を借用すれば，シェム (sheme) とシェマ (shema) と呼んでも良い．そして，前者が「能力」であり，後者が「知識」に対応するという考え方が成り立ちうる．

第 2.2.2 項でも知識と能力の相互依存性について触れたが，いずれにしろ，能力と知識は，数学的な活動をおこなう個々の人間にあって，実体的には，相互に切り離せない形態で共存していることになる．

2.5.5 「教える」の規定を試みる

第 2.5.3 項で述べた,「教える」をどう規定するかという問題にもどろう．

先に,「教える」ことを「学習者に“ 学ばせる ”ことを目的とした意図的活動」とする第 2.1.3 節の規定が不十分であることに触れた．問題は,「学ぶ」ことを「学習者の意図的追体験」と規定したため，学習者が，仮に，教授者が“ 学ばせたい ”と想定している状態が達成されたとしても，その状態が学習者の意図的でない体験によって達成されたのであれば,「教える」という行為が不成功であったと判定せざるを得なくなるところにあった．

この問題は,“ 学ばせる ”ことを目的とするのではなく,“ 学ぶことにより達成させたい状態〔媒介機構の構造変化〕”を生じさせることを目的とすれば — そして,“ 学ぶ ”こと以外の手段で達成することも可とすれば — ，とりあえず，解消する．ただ，このように考えれば,“ 学ぶことにより達成させたい状態 ”という表現は，いかにも無駄であり，むしろ，教授者が「教えたいこと」と言うべきであろう．

以上をまとめれば,「教える」とは,「教授者が“ 教えたいこと ”を学習者に習得させる〔媒介機構の構造変化を生じさせる〕こと」と規定するということになる．そして，学習者の立場から見れば,「学ぶ」と「教える」は，最終的に達成されるべき事象（個人の媒介機構

[24]「この規定の有効性が高い」といった意味である．

の変容）は共通であるが，その手段が「追体験（模倣)」と限定されているのに対して,「教える」では限定されていないことになる．

結局のところ,「学ぶこと・学びたいこと」と「教えること・教えたいこと」の分離がなされたことになる．その本質において，前者が主として個人的な営みに関係することであるのに対し，後者は，少なくとも教授者と学習者という二人の人間の関係性 — 「個人的」に対するという意味で「社会的」な — の下で成立することである [25].

2.5.6 「教育」を規定するために

ところで,「教育」の辞書的な意味は，次のように，二種に大別することができる．

一方は,「教え育てること」といった字解的なものや,「教授 (teaching, instruction) によって能力を開発 (develope) すること」など,「何かしら意図的な働きかけを行うことにより，“ 教育を受ける人間 ” を変化させること」といった種類のものである．この場合，教育の目的・結果が「個々の人間の変化」にあるという意味で，ここでは仮に,「**個人型**」と呼ぶことにする．

もう一方は,「教授や訓練を通じて，人間集団のもつ知識や技能，慣習や文化を，次世代へ継承すること」といった種類のもので，目的が「人間集団の変化」にあるから,「**集団型**」と呼ぶことにする [26].

個人型と集団型は，独立したものではない．両者の関係を，手段と目的という枠組で大雑把に比較してみると，個人型の目的であった「個人の変化」が,「集団型」では手段になっていることが，ただちに見て取れる．

それでは,「教授」という手段が教育に必須であるかどうか，検討してみよう．つまり,「教授」という手段によらずに「個人の変化」をひき起こすことを「教育」と呼んでも良いか，ということである．

この問題を，個人型の — つまり，個人と個人の関係として— 立場から考えてみる．

例えば,「個人の変化を生じさせることを支援する営み」として，学習を可能とするような環境を整えるための経済的援助を「教育」と呼んでよいのか，ということである．親権者が，学習者が「しかるべき教師や学校で教授を受ける機会を提供すること」や「独学できる環境を提供すること」を,「教育を与える」という言い方をすることはあるが,「教育をする」ということはないのではないだろうか．

結局のところ,「教育」という言葉が個人型として含意する内容には,「教授」という要素が含まれていると考えることは，必ずしも事態を限定しすぎることにはならないであろう．教育の規定に「教授」を含意させるとするなら，そして，第 2.5.5 項で論じた「教える」の

[25] もちろん,「学ぶ」という営みも，追体験であることを意識すべき “ 他者 ” の存在が前提されている以上，広義には，社会的な関係の一種とみなすべきものである．

[26] 集団型の教育の規定に「社会規範の押しつけ」を感じ,「個人の能力の開発の支援」に教育の主要な役割を担わせることを主張する立場があるが，前者は「集団型」の教育の捉え方であり，後者は「個人型」のそれであるということができるだろう．本稿での議論は，価値判断に立ちいるつもりはない — ヴェーバーの価値自由的立場による—ので，両者の立場を，二つの型として提示しておく．

規定をみれば，個人型の教育とは,「教える」ことそのものとなる．つまり，あくまで,「個人と個人の間の関係性」に限定する限りであるが，教育とは「教えること」となる．

ところで，第 2.5.5 項でも指摘したが,「教えること」には，社会的な関係性が本質的なかかわりをもってくる．個人が「学ぶ」ことと異なり,「教える」行為には，教授者が「何を教えるか（何を教えないか)」という，何らかの価値判断にもとづく選択が前提されることになる．この価値判断が拠って立つところの根拠を見つめることは，教育の社会的側面に照明をあてることに他ならない．

実際，徒弟修業（未熟練者の熟練者の模倣による学び）は，そうした学びを促す社会的な“ 強制力 ”(学びの動機）の存在を無視するなら — つまり個人型として捉えるなら — 教育の一種ではないことになる．徒弟の修業を教育の一種と認めるためには，社会的な側面から，つまり，集団型の教育を規程することが必要となるだろう [27]．

まとめよう．本章は数学の教育の個人的な側面を追求してきたのだが，これを「個人型の教育」と捉えれば，その規定は「教授者が学習者に教える」 ことになる．そして，同時に,「教育」という営みの追求のために，教育のもつ社会的な側面からの検討という課題を避けることができない地点にいきついたことになる [28]．

3　数学の教育と言語

第 2.2 節で提示した数学の“ 知識 ”と“ 能力 ”の話題にもどろう．

そこでは，数学的な“ 知識 ”は，記憶や記録が可能なように“ 言語 ”化されたものであった．また,“ 能力 ”についても，学校数学が典型であるように，その過程の多くの部分は“ 言語 ”化されている．“ 言語 ”化されたものは“ 言語 ”の一部だと考えるなら,「数学で学ぶことの多くは，実は，言語である」ということになるのではないか．確かに,「数学は言語である」と，しばしば表現される．これは，比喩なのか，それとも，数学は言語の一部なのだろうか．

いずれにしろ,「教える」という人間の営みは，通常,“ 言語 ”を手段として実行される．数学と言語の関係について明らかにすることは，数学の教育を考察するに際して，避けることのできない段階のひとつであろう．本節では，この“ 数学と言語の関係性 ”について，予備的な考察を試みておきたい．

---

[27] もちろん，これは，理念的な規定であり,「個人型」と「集団型」を，現実に明確に判別することは困難である．

[28] 我々の基本的な立場は,「教育」を一意的に定義しようとするものではない．むしろ，それぞれの状況ごとに，目的に適合的な「教育」の定義を選択しようという立場である．したがって — 例えば，ここまでの議論を前提にするなら — 「教育」を「学ぶこと」とする立場,「教えること」とする立場，あるいは，以上二通りの場合よりも狭義になるが,「教えるという意図をもった教授者の行為と，学ぼうという意図をもった学習者がその行為を受容している行為」といったものとする立場がありえることになる．

3.1 数学は言語か

3.1.1 数学は言語である

まず,「数学は言語である」という主張を取り上げよう．この主張の典型として，ガリレオ・ガリレイの著名な文章を引用してみよう[29]．

> 哲学は，眼の前にたえず開かれているこの最も巨大な書〔すなわち，宇宙〕のなかに，書かれているのです．しかし，まずその言語を理解し，そこに書かれている文字を解読することを学ばないかぎり，理解できません．その書は数学の言語で書かれており，その文字は三角形，円その他の幾何学的図形であって，これらの手段がなければ，人間の力では，その言葉を理解できないのです．それなしには，暗い迷宮を虚(むな)しくさまようだけなのです．

ガリレイの主張に登場する「数学の言語」の原語は“lingua matematica”であるから．むしろ,「ラテン語」や「日本語」いった言葉と同様に「数学語」と訳した方が良いかもしれない．それでは，この「数学語」という“言語”は，我々が日常で用いている“言語”と同じものなのか，それとも，単なる比喩なのだろうか．

答えは，もちろん，言語の定義によるだろう．その議論は後述することにして，次に，反対の立場を採る主張を眺めてみたい．

3.1.2 数学は言語ではない

今，日本で用いられている「数学」という言葉は，大雑把に述べれば，明治初頭の西洋文明摂取期に，“mathematics”の訳語として選び出されたものである．この“mathematics”（及び対応する主要な西欧諸語）がギリシア語の“manthanō (学ぶ)”に由来し，そこに“数(number)”の含意がないことは周知であろう．

この“mathematics”という語の由来について，ラオディケアの司教アナトリウスによるという伝承を取り上げてみよう[30]．

> なぜ，数学(マテマティケー)〔mathēmatikē〕はこういう名で呼ばれたのか？ 逍遥学派は説く．修辞〔rētorikēs〕や詩文〔poiētikēs〕や民衆音楽〔dēmōdous mousikēs〕は教え〔mathonta〕を受けることなく理解が可能である．しかし，この数学(マテマティケー)という特別な名で呼ばれる学的領域〔mathēmata〕は，教育〔mathēsei〕を通ぜずしては何人も修得能わざるものであると．かかる由来により，こうした学的領域の講究が数学(マテマティケー)と呼ばれることとなった．幾何学(ゲオメトリア)〔geōmetria〕と整数学(アリトメティケー)

[29][5, p.13，日本語訳 p.57]．［原文］La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola ; questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

[30]ヘロンの『定義集』より．[24, p.2]．

〔arithmētikē〕のみに数学(マテマティケー)という特別な名称を与えたのは，ピュタゴラス派の者どもであるという．それ以前は，各々は別々の名で呼ばれており，両者に共通の名はなかった

ここに見られるのは，修辞や詩文といった「言語」に関係する学と,「数学」と呼ばれる学が,「教育」との関係性において分別されるという図式である．つまり，そこに表明されているのは，習得における“ 教えを受けること ”の必要性の有無で,「数学」と「言語」を峻別する立場であるといっても良いだろう．

3.1.3 「言語」の定義を仮設して論じる

数学と言語の関係性について論じたいのだが，両者が共に曖昧なままでは，論を進めることが難しい．そこで，まず,「言語」の定義を仮設することで，議論の道筋を明らかにすることを試みよう．

ここで採用する「言語」の定義は，近代言語学の祖とされるフェルディナン・ソシュールの系統で機能派の代表であるアンドレ・マルティネによるものである．

> 言語とは，コミュニケーションの道具で，それによって人間の経験が，意味内容と音表現とを備えた単位，すなわち記号素に，共同体ごとに違うやりかたで，おのずから分析されるものである．この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う[31]．

「言語」をこのように定義すれば，逍遥学派のいう修辞や詩文・民衆音楽をこの「言語」に関する学とすることに問題はないだろう．

他方，ガリレイの「言語」については，大きく二つの問題がある．ひとつは,“ コミュニケーション ”を人と人の間の成立する相互作用と解すれば,“ 宇宙との交信 ”はコミュニケーションとは見なされないこと．もう一点は，ガリレイの「言語」が“ 音表現 ”によるものと考えることの妥当性，である．

後者については，ガリレイ的な「言語」を脚注 15 で述べたような — 文字のような視覚媒体を用いるもの等々を含む —“ 一般的な言語 ”と解すれば，問題は解消される[32]．しか

[31] [16, 日本語訳 pp.23–24]． ［原文］Une langue est un instrument de communication selon lequel l'expérience humaine s'analyse, différemment dans chaque communauté, en unités douées d'un contenu sémantique et d'une expression phonique, les monèmes ; cette expression phonique s'articule à son tour en unités distinctives et successives, les phonèmes, en nombre déterminé dans chaque langue, dont la nature et les rapports mutuels diffèrent eux aussi d'une langue à une autre.

[32] 例えばだが，次のように定義することが考えられる.「言語とは，コミュニケーションの道具で，それによって人間の経験が，意味内容と“ 聴覚媒体や視覚媒体等の物理的表現 ”とを備えた単位，すなわち“ 記号 (signe) ”に，共同体ごとに違うやりかたで，おのずから分析されるものである.」つまり，ソシュールの意味での“ 記号系 ”と，ほぼ同義となる．なお，マルティネの定義の後段（「この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う」）は，この記号系が，いわゆる有限生成の二次分節をもつものであることと解釈することができる．結局のところ，ここでいう“ 一般的な言語 ”とは,「二次分節をもつ記号系」ということになるだろう．

し，前者の問題は，より本質的な問題だと考えている．実際，言語と数学の同質性と差異は，この“ 相互作用 ”の性質の同等性と対象の差異に由来するということが，我々の構想する教育数学の最も基本的なアイデアのひとつである．つまり，我々は，言語をマルティネの定義よりは一般的なものとして捉えるが，数学とは区別すべきものと考える．したがって，数学をガリレオ的に“ 言語 ”と呼ぶのは，あくまで比喩ということになる．

3.1.4 教育からみた「数学」と「言語」

ところで，第 3.1.2 項では，習得方法の差異にもとづいて「数学」と「言語」の区分をする逍遥学派の立場を紹介したが，実は，ここにも,「教育」という言葉の — 特に「学ぶ」という言葉の — 多義性を見ることができる．

今，我々は,「習得」という言葉を用いた．これは,「言語を“ 習得する (acquire) ”—“ 学ぶ (learn) ”のではなく—」という言い方に倣ったものである．

言語習得理論では，言語の習得方法として，“ 自然習得 (natural acquisition) ”と“ 教室習得 (classroom acquisition) ”を区別することがある[33]．第一言語（母語）の習得方法が典型的な“ 自然習得 ”であり，第二言語については“ 自然習得 ”と“ 教室習得 ” — あくまでその名称を典型とするような種類の方法のことだが — の二種類の習得方法が存在するとされる．

ところで,「学ぶ」という言葉と，この“ 自然習得 ”も含意する「習得」という言葉を同一視して良いのだろうか．筆者たちの個人的な語感としては，第 2.5 節で論じたように,「学ぶ」という言葉には，赤ん坊が言葉を覚えることよりも，もう少し学習者の意志を伴う主体性とでもいうべきものの存在を感じてしまう．

もちろん，それも「学ぶ」という言葉の多義性の顕われであろうが，数学の教育について論じるとき，この多義性を放置したままでは，重大な論点を看過することになる．実際，前節の逍遥学派による「言語」と「数学」の区分は,「言語は“ 自然習得 ”が可能だが，数学は“ 教室習得（もちろん本当に教室という意味ではなく）”によってしか習得できない」と言い直すことができるだろう．

はたして「数学」は，習得しようという“ 意図をもった学び ”でしか身につかないのか，それとも，子供が遊びながら言葉を覚えるように習得することが可能なのだろうか[34]．

3.2 数学の基盤としての言語 — ハイマン・バスの見解

数学と言語の関係性について考察するため，20 世紀後半の指導的数学者のひとりであったハイマン・バスが，数学の教育の現場から見出したものを参照してみたい．

[33]例えば，文献 [23] を参照．

[34]この問いを，“ 心理的な発達過程と教育内容との関連性 ”と捉えれば，教育心理学の課題となるだろう．しかし，我々の考える“ 教育数学 ”では，この問題をそうしたふうに課題化するのではなく，“ 数学と教育 ”というきわめて複合的な事象を把握するために設ける種々の観点のひとつとして課題化することになる．

3.2.1　数学教育の現場から

ハイマン・バスが数学の教育に関する自らの見解を得るにあたり，重要な機会を提供したのは，数学教育の研究者デボラ・ボールが小学校で行った 1 年間の授業の記録であった．ボールと共に，この記録を繰り返し精査するなかから，バスの考えは熟成していったものと思われる.（詳細は，文献 [11] を参照のこと.）

この 3 年生（8 歳）を対象とする一連に授業のうち，特にバスが注目するのは,「ショーン数の発見」に関するものである．これは，整数の偶奇に関連する授業の一場面で，ショーンという男子生徒が「6 は偶数かつ奇数だ」と主張するところから始まる．ショーンの誤りを本人自身に気づかせようとする教師やクラスの他の生徒たちとの問答を経て，ショーンの主張が「10 や 14 も，6 と同じく偶数かつ奇数であるし，そういった数は他にもいくらもある」と一般化され，他の生徒によって，ショーンが「偶数かつ奇数」と主張している数が「2 個づつ組にしたものが奇数個できるような数」であることが解き明かされる．そして,「偶数かつ奇数」は不適切だから，ショーンが ” 発見した ” こうした数を「ショーン数」と呼ぶことがクラスで合意される，といった内容の授業であった．

本節では，この「ショーン数」をめぐる授業の一場面を例として取り上げ，それに対する，そして，そこから展開されたバスの見解についてまとめてみたい．

3.2.2　「ショーン数」の授業に対するバスのコメント

まず，本節では，問題の授業についての，バスのコメントのいくつかを取り上げてみる．なお，関連する授業の場面の記録については，付録 A.2 節にまとめてあるので，参照願いたい．

メイの主張について

付録の A.2.7 項で述べられている ” メイの主張 ” についての，バスのコメントから始めよう．そこには，子供たちのやりとりに「数学」の営みを感受しているバスのさまが見て取れるだろう．

バスによれば，メイの主張は次のようにまとめられる．

> メイは何をしたのか？　最初にショーンの考えについて理解し，次いで明快な公的表現（clear public expression）を与えた．そして，その考えには彼女自身が不同意であることを述べ，ショーンの論法の誤りを指摘した.（「グループが何個あるかは無関係である.」）メイの活動は．単なる批評 (critique) では終わらない．巧妙にも彼女は，ショーンに「自身の用語で，自身の誤りを理解せざるを得ない」論法を構成した

ということになる．

そして，バスは，メイが構成した論法の本質を，“リーゾニング[35]”という概念を用いて，次のように整理する．

> そう，彼女は，ショーンの“リーゾニングの原理”— 6 は奇数個の 2 のグループから構成される —を一般化し，その基準が新しい奇かつ偶の数を際限なく供給することを見出した．
>
> ショーンは，6 についてのみ考えていた．しかし，メイは，ショーンの 6 に関する論法が一般化できることを認識し，ショーンに自身の主張からの退却を促すものと想定して，より射程の大きい可能性への扉を開いたのだ．

数学者の役割

数学教育の現場に向かい合うことに関して，バスは，次のように問いかける．

> こうした数学教育のいくつかの場面において，そこで行われている数学について，我々は何を観察することができるだろうか？

表層的に見れば,「子供たちが行い，学んでいる」数学は,「あるレベルにおいて，偶数と奇数の諸側面についての探求」である．

> しかし，おそらく，より重要なことは，子供たちが本質的に**数学の話法とリーゾニング** (mathematical discourse and reasoning) に従って活動しているということだろう．子供たちは，数学的な主張や反訴を為し, 互いの見解を批判的 (critically) に検討する．子供たちには，心に留め互いに説明責任を負っている自分たちの主張を，正当化 (justification) しようとする責務 (imperative) が存在している．このような数学的訓練は，どれほど口で唱えようが，教えられ，実践されることなしに身につけることは叶わない．

結局のところ，

> 子供たちが授業を通じて学んだことは，単なるショーン数の性質を越え，数学的な探求やリーゾニング，一般化，数学的定義の使用の技能 (the skills of mathematical exploration and reasoning, generalization, use of mathematical definitions) 等々であった

ということになる．

[35]“reasonimg”という言葉は，バスの見解の鍵となる重要な概念であるため，本稿では,「リーゾニング」と音訳しておく．

数学者の眼

一般論として，授業の実践例を活かすためには,「どの場面で，どういうことを，どのようにすべきであったのかといった，批評や助言」が必要だが，バスによれば,「そのような批評・助言の前提として，その授業で演じられている数学劇の内容を，数学的に分析し，教師が理解できる形で示す必要がある．そして，そのためには,“数学者の眼”が必要であって，それこそが「数学者の第一の役割」なのだという．— 先に取り上げた授業の一場面の“観察”などは,“バスという数学者の眼”を通すことで見えてきたものだということだろう．

以下に，バスの眼を通した“観察”のいくつかを，さらなる例として，拾いあげておこう．

1. 数学的な語彙

   まず，数学的な状況を，その数学的営みを実行している集団で共有するために，適切な“語彙”が必要であることについて．

   > ショーンは数学用語としての「偶数」と「奇数」を誤用しているが，にもかかわらず，6 に対する明白な**数学的なアイデア**をもっている．彼は,「偶数であるものの奇数的なありかた (an odd way of being even)」に気づいているのだ．
   >
   > しかし，この状況に名前をつけるための語彙を欠いているため，ショーンは,「偶数かつ奇数」という，誤った理解へと導いてしまう名称を選んでしまっている．

   先にも述べたが，教師のボールは，次の授業時ではあるが，ショーンの発見した性質をもつ数を「ショーン数」と呼びことを提案し，クラスで受け入れるよう指導している．これは，新しい“語彙”を導入するひとつの方式であろう．

   なお，ここでいう“語彙”は，新たな数学的状況を共有するための手段 – つまりは言語 – としてのものであり，数学的な“定義”以前のものであることに留意されたい．

2. 数学的リーゾニングと定義

   数学的な“定義”の必要性や重要性は，数学的なリーゾニングとの関係性の下で，次のように説かれる．

   > 数学的リーゾニングは，数学的な定義を共通に理解していることへの注意深い配慮なしには，実行し得ない．しかるべき予想（例えば，奇数＋奇数＝偶数）を証明するということは，定義を使用することに依存していることを忘れてはいけないのだ．
   >
   > 数学上の不一致を調停するために，教師は，そこで使われる数学用語の定義の必要性を認識している必要がある．本例の場合，偶数の定義として，暗

黙のうちに三種類のものが使われている[36]．いずれも明示的には述べられておらず，また，数学的に同値であることも示されていない．もっとも，そうであることは，暗黙に仮定されている．この授業では，教師は定義の必要性を理解しており，クラスに「ここでの私たちの定義 (working definition)」を明確にすることを要求している．

さらに定義に関して教師が知っておくべき重要事項には，子供たちのリーゾニングにおけるこうした異なる定義の存在に気づいていること，そうした状況を調停することの必要性を理解していること，そして，そのために複数の定義の同値性の確立が必要なこと，がある．

3. **数学が営まれる領域の性格**

さらに，バスは，“定義”に関連して，次のようにも述べている．

> もちろん，**小学校の三年生にとって**，数学的に適切で，かつ，使用に適した偶数と奇数の定義が何であるかを知っておくこも，教師にとって重要である．

ここで提示されているのは，数学的な活動が営まれている集団の — 今の場合なら年齢（発達状況）という — 性格との適合性という主題である．

3.2.3 応用数学と数学教育

ここで，ショーン数をめぐる授業を離れ，上述のような経験を通じて培われたバスの見解について探ることにしてみたい．

まずは，前項の最後のコメントに含まれる主題を敷衍したよう見える，次の引用を取り上げてみよう．

> 数学教育は，数学ではない．数学教育は，高度に専門的な数学の知識を基本的に使用する，専門分野のひとつである．この意味において，私の思うに，数学教育を応用数学の一種と見なすことが有用となる．そして，数学者が「応用数学としての数学教育」への貢献を望むのなら，最初の課題は，他の応用数学の場合と同様，応用の対象領域における数学的な問題の性質，そして，この領域で有用ないし利用可能な数学的知識の形式を，感覚的（sensitively）に理解することである．([3], p418.)

[36] 本稿では省略した生徒たちの議論に現れるもので,「**公平な分配**（*fair share*; 数は，二つの等しいグループに分けられるとき，偶数である），**対**（*pair*; 数は，二個からなるグループによって構成されているとき，偶数である），**交互性**（*alternating*; 偶数は，奇数と，ゼロは偶数として，数直線上に交互に現われる）の三種類」とされる．詳細は，文献 [11] を参照．

こうして，バスは，“ 教えるための数学的知識 (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT と略称される) ”という概念[37] を導入し，さらに，この MKT を，一般的な数学的知識 (Common mathematical knowkedge)，特殊専門的な数学的知識 (Specialized mathematical knowkedge)，数学と生徒に関する知識 (Knowkedge of mathematics and students)，数学と教授法に関する知識 (Knowkedge of mathematics and teaching) の 4 つのカテゴリーに分類する[38].

また，バスの

> 特殊専門的な数学的知識は，熟練した教師が必要とする（生徒についてではなく，教授法についてでもない）「厳密な意味での数学的な知識」である．しかし，数学的な訓練を受けた多くの専門家，例えば数学研究者，には未だに知られていない「知識」なのだ．つまり，一般に信じられているのとは反対に,「MKT の純粋に数学的な部分は，数学者が知っている知識の真に小さな部分集合なのではない」のだ.
>
> ……
>
> 実務 (practice) に基づいた MKT へのアプローチによって明らかになったことは，学校のカリキュラムの**深層**には，それを**超えたところ**と同様に，豊かな数学が存在しているということである

といった主張も，同工異曲といえるかもしれない.

3.2.4 鍵概念としての数学的リーゾニング

ここで，本節の主題である「数学と言語」との関係に話を進めたい．この主題に関するハイマン・バスの主張においては，“ 数学的リーゾニング (mathematical reasoning) ”という概念が鍵となる[39] .

まず，この数学的リーゾニングについての，バスの総括的な見解から見てみよう.

> 現役の数学者の視点から観るとき，リーゾニングは，数学的な合意を形成し，あるいは，新しい数学的知識を構成するための，主要な手段のひとつである.

第 2.2 節の文脈では，リーゾニングを実行することは「能力」に区分すべきであろうが，バスは，これを「手段」として「数学的知識」が構成されると述べている．さらに，バスは，こうした「数学的知識」と「リーゾニング」の関係について，次のように述べている.

---

[37] ここで,「教えること (teaching)」というのは，おおむね，教師が学校で授業をすることが想定されている．また,「知識 (knowledge)」とは，今の日本語の語感よりは幅の広いもので，授業の準備や，授業後の評価活動も含む「教えるという仕事に実際に従事するために必要な, 数学に関係する知識 (knowledges)，技能 (skills)，思考法の特性 (habits of mind)，感覚 (sensibilities) 」等を総称させているという.

[38] 各カテゴリーの内容については，[11] を参照されたい.

[39] これは，第 2.4 節で述べた「数学的に考えること」のひとつの表現であり，したがって，また，フロイデンタールの数学化と同種のものと思うこともできる．こうした文脈で述べれば，バスにとっての数学とは，数学的リーゾニングという人間の営みの総体であるという言い方もできるかもしれない.

> このリーゾニングは，二つの基盤の上に載っている．一つは，公有の知識の集積体 (a body of public knowledge) である．出発点として方向性を定めるためのものであり，しかるべき情況や共同体 (community) の内部において許容され得る数学的リーゾニングの「粒度（granularity）」を定めるものである．

こうして，能力の発現であるリーゾニングによって得られた知識が，新たなリーゾニングの基盤となることが示唆されている．つまり — フロイデンタールと同様な見解であるが — 知識と能力は，数学的営みのなかで動的な相互依存関係にあることになる [40]．

一方で，ここには，知識の「公有 (public)」性と，その前提として「共同体 (community)」への言及が見られる．つまり,「個人的営み」であるリーゾニングの背後に拡がる「社会的」なものが視野に入ってきている．この傾向は，次の主張において，より明確になる．バスは，こう続ける．

> 数学的リーゾニングの二つ目の基盤は，言語 (language) — 記号，術語その他の表現（presentation），そして種々の定義 — と，諸々の主張を定式化し，その正当化を慣習化するような関係性のネットワークにおける使用法の有意味性を定めるための，論理法則および統語法，である [41] ．

ここで,「言語」が登場する．この「言語」は，前節までの議論との関係では，どう捉えれば良いのだろうか．

---

[40] フロイデンタールの数学化と同様，バスのリーゾニングも，第 2.2 節で展開した「知識と能力」の枠組みで捉えることは難しいかもしれない．本節で題材とした「ショーン数」をめぐる授業を,「知識と能力」の枠組みで捉えるなら，例えばであるが，

（１）前提とされる「知識」: 偶数と奇数.
（２）課題の提示 : 自然数の偶奇を検討.
（３） 知識適用型課題解決「能力」の適用 : 偶数・奇数の決定.
（４）新たな課題の提示（ショーン）: 「偶数かつ奇数」である数の “ 発見 ”.
（５）新たな技法の開発 :「２つずつ組にすると，奇数個の組ができること」の “ 図示 ”.
（６）別の数系統の発見 : 6, 10, 14, 18, ⋯
（７）知識創出型「能力」の適用 :
- 新技法の（例えば)「２つずつ組にすると，奇数個の組ができる」といった “ 言語化 ”.
-「ショーン数」という名称の付与という “ 言語化 ”.

といったふうになる．

ただ，ここで展開されているような数学の授業は，少なくとも今の日本の学校教育の現場で実施されている数学の授業において標準的なものとはいえないだろうというのが，筆者たちの感想である．もちろん，この感想は，バスのいう「数学の話法とリーゾニング」を主題とする数学教育の新たな可能性を拓くことを否定するものではない．

[41] 本項におけるここまでの引用の原文は，次の通り： Viewed from the perspective of the practicing mathematician, reasoning is one of the principal instruments for developing mathematical understanding and for the construction of new mathematical knowledge. Such reasoning rests on two foundations. One is a body of public knowledge on which to stand as a point of departure, and which defines the "granularity" of acceptable mathematical reasoning within a given context or community. The second foundation of mathematical reasoning is language — symbols, terms and other presentations, and their definitions — and rules of logic and syntax for their meaningful use in formulating claims and the networks of relationships that are used to justify them.

3.2.5 数学の基盤としての言語

最後の引用には,「共同体」への直接的な言及はないが，文脈を考えれば,「知識」が“公有”されている共同体に“固有”な言語であるとみなすことは当然であろう．

あくまで，その言語によって“表現”されている「知識」(これは，静的に捉えた「数学」の中核的要素）とは区別された“言語”であり，ガリレオ的な漠然とした数学語に比べれば，マルティネ的な言語に近いかもしれないが，単なる共同体の成員間のコミュニケーションの手段におさまらず，共同体の性格をより強く拘束する性質が感じられる．

そういう意味では，日本語やラテン語といった「特有言語 (ソシュールの用語での idiome)」の一種であり，その特有性も，その共同体において「正当化 (justufy)」されうる数学を規定するという意味で，数学を構成する（「知識」とは別種の）要素のひとつとみなすことができるだろう[42].

4 数学の教育の社会的側面

本章では，再び，今の日本の日常的な数学教育の場にもどり，そこから議論を出発させて，数学の教育の社会的な側面について論じてみたい．

4.1 学校数学不要論

4.1.1 数学を学ぶ動機

現在の「日本における数学の教育」が抱える様々な問題を解決するために，多様なアプローチが試みられているが，その多くは，教材や教授法の改善，あるいは，教育課程や評価方法の工夫を目指すものといっても良いのではないだろうか．しかし，日本の数学教育が抱える困難の底流には，数学を学ぼうとする“動機”の希薄化という現象が横たわっているように感じている．この見立てが正しければ,「馬に水を飲ませる」譬えではないが,「数学を学びたい」という意欲の喚起が第一に優先されるべきことになる．

この“数学を学ぶ動機”については，次の二種を，大きく，区別する必要があるだろう．ひとつは,「子供〔社会の正規構成員の候補者〕が数学を学びたい」という意味での動機であり，他方は,「大人〔社会の正規構成員〕が子供に数学を学ばせたい」という意味での動機である．前者を「個人的動機」，後者を「社会的動機」と呼ぶことにしよう．もちろん，一般に，個人的動機と社会的動機は独立したものではない．個々の学習者が「学びたい」と思う“個人的”動機の構成要素には,“内容に対する興味”や“わかることの喜び”といった本来の意味での個人的なもの以外にも，学習によって得られる様々な“効用”といったものもあるだろう．そうした“効用”の多くは，社会的動機と高い相関をもつことになる．

学校の現場における教育課程や教授法の工夫は，本質的には,「個人的動機」の改善を目標とするものであり，直接的に「社会的動機」に影響を与えることは難しいのではないか．

[42] より正確には，第 5.1 節で言及する「共有数学」の一種とみなすことができるかもしれない．

しばしば教育の現場で与えられる「こんなに社会で役に立つ」という動機強化策は，それが，その時代のその社会における“社会的動機”と適合的でなければ，十分な効果をもつことは期待できないだろう[43].

第 2.5.6 節では,「教育」について，個々の人間の内面の変容を引き起こす“個人型”と，社会の構成員を（再）生産する“集団型”の二種類を区別した．近代以降の学校教育は，本質的には，後者の制度化と見なしてよいだろう．したがって，少なくとも学校教育をその典型とする「制度的教育」を問題とする限り，上述の“社会的動機”は，その在り方に重要な影響を与えることになる.

数学の教育について論じる際には，その基層にある“社会的”なものへの眼差しを忘れてはならないだろう.

4.1.2　制度的教育と社会的期待

“社会的動機”が制度的教育に与える影響には，きわめて大きなものがある．例えば,「コミュニケーション能力重視の英語教育」なるものが小学校の教育課程にまで拡げられていく最近の傾向は，1970 年代の数学教育の現代化運動を髣髴とさせるが，こうした潮流の源には,“「英語」という言葉（シンボル）で表象されるもの”に対するある種の“社会的期待”が存在していると見るべきだろう．実際上，現実の教育問題への関与は，社会的動機の背後に存在する“社会的期待”に向き合うことなくして，十分な実効性をもつことはできないのではないだろうか.

もちろん,「学ぶことへの動機」の希薄化，ひいては「学ぶことへの意欲」の低下は，数学に限ったことではないという意見もあるだろう．ここで例に引いた英語教育も，関連する各種産業の振興という“社会的効果”は確かにあるだろうが，個々の子供の個人的動機に内在化されている程度については定かではない．しかし,「学ぶことへの意欲」の低下が生じる領域が社会的期待の重心移動に伴って変化し得るものとみなせば，少なくとも相対的には,「数学」においてそれを問題視することは十分に意味をもつだろう.

なお，公的な学校教育全般における「学ぶ意欲の低下」が認められるとしても，それが社会全体におけるものを意味しているとは限らない．国民の多数が科学技術立国という“表象（イメージ）”を共有し“総中流社会”とも称された高度成長期の日本社会と，成長の方向性を見失い“格差社会”と呼ばれる近年の日本社会とでは，公教育の社会的機能に相違があると見ることは当然であろう．教育について論じる際には，そうした社会構造の変化を射程に入れることが必要となる.

先に述べた「コミュニケーション重視の英語」なるものは — 数学教育の現代化における「現代数学」も同様だが —，その内実が必ずしも明快なものではない．それにもかかわらず（あるいは，むしろ，それゆえ）“言葉（シンボル）のもつイメージ喚起力”のために，より広範な社会的影響力を“一時的”に獲得しているかのように感じられる．そもそも，日本の国家のような，さまざまな部分社会を多層的に含む巨大な規模の社会にあっては，社会の構成員

[43]「世のため人のためになる」という動機よりは,「進学に必要」という動機の方が効果的であるかもしれない.

の全体が共有し得る“イメージ”が，いわゆる“共同幻想”以外にあり得るのかという問いすら成り立つかもしれない．

しかし，少なくとも“公教育”において，そうした“雰囲気（ムード）”に基づいて[44]，税金その他の貴重な社会的資本を費やし，重要な社会的基盤である教育制度を改変してしまうことは，かなりの危険性を孕む行為といえるのではないだろうか．“公教育”を社会（国家と言った方が良いかもしれない）において正当化された意思決定のシステムの下にある教育制度と解すれば，それは，そうした“社会的意思”によって制御（コントロール）されたものであるべきだろう．つまり，制度的教育の背景にある“社会的期待”は，“政策[45]”によって制御されるべきだということになる．

教育のもつこうした意味での社会的側面へのアプローチなしに，今の日本の数学教育の抱える困難の本質的な解決を図ることは可能なのだろうか．これが，我々の基本的な問題意識である．そして，こうした課題の解決に資することも，“教育数学”のもつ可能性のひとつであるべきだろうと考えている[46]．

4.1.3 社会的期待の零点

数学の教育についての議論にもどることにしよう．

一般的な傾向として，数学の教育に関する議論は，学習者〔今教育を受けつつある者〕と教授者〔学習者に教育を施している者〕の立場からなされるものが多いように思われる．しかし，前述の“社会的動機”や“社会的期待”についての考察に必要なものは，学習者の視点ではなく，むしろ，“既習者〔既に学習を終えた者〕”の視点であろう[47]．

そもそも“教育”というものがもつ“社会的”な性格を考慮に入れるなら，数学の教育について論じるとき，個々の学習者の学習の現場だけに焦点を合わるのでは不十分であり，その前提として，数学と社会との関係についての，根本的な検討が必要になる．この課題に答えるための営みが必要であり，その責を負うのが“教育数学”であるというのが，我々の考えである．

“社会的期待”と“制度的教育”の関係性の基本は，前者なくしては後者が存在しえないということであろう．これは，数学に限ったことではない．いずれの学科目であっても，

[44]もちろん，“曖昧な言葉のもつイメージの喚起力”だけでなく，非常に現実的な各種の利益集団の関与もあるだろうが．

[45]“社会における正当化された意思決定のシステム”は，狭義には政治的なものであるが，一般には，各種メディアの活動を含むより広範なものであろう．したがって，ここでいう“政策”も，広義に解すべきものである．

[46]ここで論じた意味での“社会的側面”にアプローチするといっても，政策決定に直接的な影響を与えるための政治活動を行おうというのでない．政策目的を実現するための選択肢の提示や，選択された内容を表現するための教科目の設計（デザイン）といった面での活動が念頭にある．

[47]集団型の「教育」は，社会の構成員の（再）生産の機能をもつと述べた．この（再）生産は，社会の継続という相から見れば「再生産」であるが，社会の変革という相においてみれば「（新たな）生産」と見なすことができる．

本節での論は，社会を継続の相で捉えた場合，つまり，「かつての構成員が受けたのものと“同様”の教育が継続して行われている」場合を想定している．もちろん，この“同様”の程度は，実際には，社会の構成員の“再生産”と“新たな生産”の間に連続的に分布することになる．

社会的動機が存在しなければ制度的教育の対象となることはなく，あるいは，社会的動機が消滅すればそうした教育の対象ではなくなるというのが自然であろう[48].

ここで，数学に対する“ 社会的期待 ”について，社会的に制度化された教育の典型である“ 学校教育 ”を取り上げて，もう少し具体的な検討を行ってみたい．つまり「学校で教えられる数学に何が期待されるか」という問いについて考えたいのだが，ここでは，その最も“ 極端な ”解答である,「何も期待しない」，つまり「学校で教える数学は不要である」という論を取り上げてみよう．

こうした論を「無意味」と切り捨ててもしかたがない．先述したように，我々が相手をする必要があるのは，ある種の漠然とした“ 社会的雰囲気 ”ですらあり得るのだから．したがって，また，この種の学校数学不要論への対抗にしても,「あなたの役には立たないかもしれないが，他の人の役に立っている」といった型の言説では「それなら必要な人だけやれば良い」と反論されるであろうし,「文化としての数学」論も，多様な文化的営み — 茶道でも華道でも良いが — の中からなぜ「数学」がカルチャースクールではなく公教育で取り上げられるのかという問いの前には無力であろう．

4.1.4　二種類の学校数学不要論

日本の現状として，確かに,「学校で教える数学は不要である」という主張が，学校教育の“ 既習者 ”の口から語られることがある．この種の主張を,「学校数学」不要論と総称することにしよう．

筆者らが身近に見聞したこうした主張は，大きく，次の二種類の数学教育不要論としてまとめることができる．

1. 日常型の「学校数学」不要論

   「学校で習う数学は，社会へ出てから／日常生活では，必要ない」といった類の言説に代表される主張．日常生活で必要と論者が認める“ 小学校の算数で習う一部の内容 ”は，除外されることが通例である．

2. 専門型の「数学教育」不要論

   「大学の共通教育で数学者が教える数学は，我々の専門分野では不要である」といった言説に代表される主張．

1 番目の“ 日常型 ”は，より広範な「数学不要論」ないし「学校教育不要論」の部分的主張といっても良いだろう．前者は，日常生活においては“ 初等的な数学 ”以外の「数学は不要」という主張と捉えるものである．なお,「学校教育不要論」としては，“ 初等的な数学 ”が除外される分については，まだ微温的な不要論といえるかもしれない．

[48]もちろん，原理的，というか，理念的な話である．

見方によってより深刻なのは，2 番目の型の「数学不要論」である．これは,「数学自体が不要である」という論ではなく，学校教育で“ 標準的に ”教えられている“ 特定 ”の「数学」が，既習者に対するある種の社会的期待を満たしていないと主張するものである．

言語の比喩で述べれば,「現代の日本で生活するのに，源氏物語を読むための日本語は必要ない」であるとか,「大阪でビジネスをするのに，標準語を勉強しても時間の無駄」といった言説と同種の主張と見なすことができるだろう．つまり，ここには,「どのような集団でどのように数学が使われているのか」という,“ 数学の多様性 ”の問題が含意されていることに留意しておきたい．

4.1.5 「学校数学不要論」における出現の歴史的背景

前節で述べた「学校数学不要論」は，近代西欧的な“ 学校 ”というものの発達と深く関係していることを注意しておこう．

そもそも，明治期以前の日本社会において，社会の全構成員が共有していた「数学」は，高々「簡単な暦日や度量衡を扱える程度の“ 記数法 ”の知識と，指算で実行可能な程度の“ 加減の演算 ”」であったのではないかと思われる．もちろん，こうした状況は，日本に限るわけではない．人類の歴史を概観すると，素朴社会はもとより，農耕を主たる生産手段とする集団であれ，遊牧集団であれ，いわゆる“ 日常生活 ”で必要とする「数学」は，同様なものであっただろう．

歴史的に見れば,“ 数学 ”的な知識や技法は，土木や建築，作暦，交易等々の職能集団において開発・保持されており，その“ 教育 ”についても，各々の職能集団の内部で，職能に適合した形態で継承されるのが基本的な姿であった．つまり，通常我々がイメージする「数学」は，歴史の圧倒的大部分において，各種の職能集団のなかにしか存在しなかったことになる．

そうした状況下にあっては,「数学」を学ぶことへの疑念は，少なくとも職能を有した構成員として生きていくことが選択されている限り，生じようもなかったであろうことが想像される．もちろん，このことは,「数学」が独立した体系であるという意識の希薄さと表裏一体であったのだろうが[49]．

ところが，近代西欧的な“ 学校 ”が，こうした職能集団からの独立性の高い“ 組織体[50] ”として形成されるにつれ,「専門型の数学教育不要論」が出現することになる[51]．

[49] 何をもって「数学」を独立した体系と見るかについては，多様な立場がありうるだろう．例えば，いわゆる「純粋数学」と呼ばれる学問分野の形成に，近代における中等学校の教員養成を生業とする職能集団（近代西欧的な高等教育機関の源流のひとつ）の成立との相関関係を見る立場があるが，本共同研究の主題の背景として興味深い見方であろう.（文献 [10] を参照されたい.）

[50] ここでいう“ 学校という組織体 ”は，学習者と教授者だけでなく,“ 卒業者 ”も包含するものとして捉えた方が良い．もちろん，教授者の職能集団とは，構成員が包含されてはいるものの，区別すべきものである．

[51] 20 世紀初頭のいわゆる“ 数学教育改造運動 ”に例をとれば，ジョン・ペリーの運動も，フェリックス・クラインの運動も，エンジニア集団の要求する数学の教育と一般的な学校教育との相克に由来するものである．ペリーの運動が「エンジニアのための新しい数学教育」を学校教育全体へ広めようとする方向性をもっていたのに対して，クラインの運動は「従前の学校数学教育」をエンジニア教育への適合性の高いものに再編することを志向するものとして出発した．

また,「日常型の学校数学不要論」の方は，初等的な“（職能と直接的な関係をもたない）普通教育”の拡がりを背景としている．前節でも述べたが，この型の主張は，より一般的な「学校教育不要論」において，不要とされる教科目に「数学」が含まれる特殊な場合と捉えた方が良いと思われる．

なお，こうした“初等普通教育で必要な教科目”をめぐる多様な主張については，ヨーロッパの事例より,“機会の平等性”に対する意識の高い社会であるアメリカ合衆国の例が参考になる（例えば，文献 [21] を参照のこと）．

4.2 社会制度の保持・変革の手段としての数学の教育 — バスの見解

日常型の学校数学不要論 — つまり,「2 次方程式のことなど，大人になってから日常生活で使ったことは一度もない」といった意見 — をいったんは受け入れることにしよう．職業的に数学の知識や技能を必要とする人々ではなく，社会の全構成員に等しく必要（もしくは有用）な“数学”とは，— もちろん，それが存在するとして — いったいどのようなものなのだろう．日常型の学校数学不要論の主張のように,“初等的な四則演算”以外にも,存在するのだろうか．

ここで，日本の日常を離れることとし，ハイマン・バスの主張に耳を傾けてみたい．

4.2.1 “周知の寄与”について

ハイマン・バスに，デボラ・ボールたちと共著で公表した『社会的に公正で多様な民主制を構築するための数学教育の役割』と題する論考 [2] がある [52]．この論考のなかで，バスたちは,「数学 — そして数学の授業（instruction） — が民主主義教育に寄与できること」について論じている．

そこでは，最初に,“周知の寄与”として，次の三点が挙げられる．

1. 日常生活のための技能（skilles）
2. あまり技術的ではない職場でさえ増大しつつある数学的な要求に応えること
3. 上級の数学の勉強のための準備を含む数学的リテラシー

それぞれの内容は，おおむね，現在の日本の学校教育で扱っているような「数学的な知識と技能」で捉えることが可能なものであり，この三点の目的・目標は，日本でも確かに“周知”のものと言っても良いだろう．それでは，本節の主題である「社会の全構成員に必要・有効か」という観点から見れば，どうだろう．最初のものは「学校数学不要論者」も認める例外であるから肯定的な評価が与えられるであろうが，2 番目は特定の職業集団，3 番目は学生集団という，いずれも，社会全般ではなく，部分集団に対しての寄与しか与えることはないだろう．

[52] この論考の要約が付録 A.1 にまとめてあるので，参照願いたい．

4.2.2 “特別な手段を用いる授業”に依る寄与

続いて，バスたちは，“周知”ではない自分たち独自の主張を提示する.「数学には，若者を多元共存的な民主主義社会に加入させるための教育において果たす，ある特別な役割が」あり，その役割は「数学が保持している特別な手段を用いる授業（instruction）に拠ること」になるのだという．そして，こうした授業で用いる「特別な手段」として，以下の 3 つが挙げられる．

1. 「社会の分析（analysis） と 社会変革（social change）のための道具（tools） を身に着けさせる（develop）こと」によるもの．

   具体的には，選挙や税法に関連する項目が例示されている．

2. 「多様な社会に加入するための重要な手段（resources）である，文化的な知識や認識 (cultural knowledge and appreciation) を身に着けさせること」によるもの．

   例として，建築物や美術，音楽，科学，宗教と同様に，歴史や文化やそれらが「交錯するところを勉強するための媒体 (medium) として，数学的な概念（ideas）や方法（methods）の歴史的な発展を提供する」ことが挙げられている．

3. 「数学的な実践 (mathematical practice) 自身のうちに埋め込まれている技法（skills）や 規範（norms）」 によるもの．

3 番目の項目がわかりにくいが，これは,「数学の内容や数学という道具だけではなく，数学的な活動そのものがもつ本性 (the very nature of mathematical work) について論じるということである」と言い換えられ,「これこそ本稿が焦点をあわせようとするもの」であるとされてるので，あらためて次項で見ることとしたい．本項の残りでは，先の二つの項目についてコメントしておこう．

まず，1 番目のものについて．ここで挙げられた内容を必要とする者たちは，アメリカ合衆国では全構成員かもしれないが，一般的には，その社会の政治や経済の制度に“関与”しうる構成員ということになるだろう．したがって，これが「社会の全構成員に必要・有効」かどうかは，そうした構成員が社会の（成人という正規の）構成員の全体であるかどうか，ということになる．つまり,「学校数学不要論」の許容する例外が初等的な算術計算に限るかどうかは，数学の側の問題ではなく，自分たちの生きる社会がどのようなものであるか〔社会の保持〕，あるいは，どういう社会を目指すべきか〔社会の変革〕といった要素に依存することになる [53]．

次に，2 番目の項目について．これは，いわゆる「文化としての数学」についてのものだが，あくまで,「社会の多様性の認知・承認」というバスの生きるアメリカ合衆国社会の現実に根ざした明確な教育目的をもっていることに留意しておこう．

[53] 明治期に藤澤利喜太郎が設計を試みた「日本の普通教育—全構成員を対象とした教育 —における“（初等的ではない）算術”」は，政治や経済的行為に関係するこうした内容を含んでいた．

4.2.3 「数学的な活動がもつ本性」の教育的効果

ここで，3 つの項目の最後に挙げられている「数学的な実践 (mathematical practice) 自身のうちに埋め込まれている技法（skills） や 規範（norms)」 による授業について，バスたちの詳細な説明を見てみよう．

概して述べれば，これは，数学の授業（instruction）が，生徒たちに,「特別な種類の共有された経験，すなわち，生産的な共同作業のために差異を理解し，尊重し，利用するという経験」を提供できるということを根拠としている．より具体的には，次のように説かれる．

> 数学というものを，問題を解くことと，何が真であるかを発見し証明することを中心とするものであると考えよう．ある問題について，別の解釈や表現をしてみることは，しばしば，解答への道を開くことに役立つことになる；ときおり，新しい喩えや，図，文脈（context）は，問題の難しい部分を砕き割ることができる．
>
> 同時に，差異の利用は，共通の学問的に訓練された言葉や，規範，慣例 (practices) によって組み立てられ，支えられていることになる．用語は正確に定義され，かつ，共通の仕方で用いられなければならない．
>
> 見解の相違の解決は，大声を出したり，多数決によるのではなく，リーゾニングに則った論議 (reasoned arguments) による．そして，この論議を構成することは，教えることができるし，学ぶこともできる．0 は偶数か奇数かとか，$\frac{3}{4}$ の意味をどのように解釈するかとか，$\frac{5}{5}$ は $\frac{4}{4}$ より大きいか小さいか [54] とか，あるいは，しかるべき問題の解法は正しいかどうか，などを決定することは，数学的なリーゾニングに従う (subject to) べきもので，願望や権力に支配 (govern) されるものではない．
>
> その上，数学的なリーゾニングというものは，身につけるべき習慣 (practice to be learned) であって，生まれつきの才能ではない．

なお，バスたちは明言していないが，上で引用した文章の背後に，前章の第 3.2 節で紹介した「ショーン数の発見」を含む一連の授業があることは間違いないだろう．

結局，民主主義社会において，他の教科ではなく，数学教育のみが果たすことのできる役割は，次のようにまとめられることになる．

> このようにして，数学の授業（instruction）は，子供が他の人の見方や考え方の価値を学ぶことを，ゆっくりとではあるが，支援することができる．論争というものをどのように行い，また，調停するかといったことも，同様である．
>
> 差異が共同作業において価値のあるものであること，そして，経験や言葉，文化の多様性が共同体の可能性 (capacity) や有効性 (effectiveness) を豊かにし強

[54]「等しい」と言いたいのかもしれないが，4/5 と 3/4 等々との誤植である可能性も高い．

> 化すること，数学の授業は，生徒たちが，こうしたことを学ぶことを支援するように設計 (designe) することができる．
>
> 生徒たちは，数学が差異を投票で解消する競技場(arena) ではないことも学ぶことができる．政治 (Politics) とは，差異がそうした方法で取り扱われる競技場であるが，文学 (literature) や数学の学習はそうではない．
>
> 民主主義社会において，見解の相違をどのように解消するかは，決定的な重要性をもつ．が，数学は，そのための一揃いの経験と規範 (one set of experiences and norms) を提供する．そして，他の教科や経験は，別種の揃いを与えることになる．文学 (literature) では，解釈の差異は解消されることはないが，数学では共通の一致した見解が大切になる (in mathematics common consensus matters)．

蛇足であるが，ここに提示されている主張は,「2 次方程式が解ける」云々とは異なる相にあることは明らかであろう．

4.3　フロイデンタールの“ Mathematics for All ”

前節で紹介したバスの見解は,“ 数学と言語 ”との関連でいえば,「言語としての数学の機能を用いたコミュニケーションのもつ性質」というものが中核にあるといってもよいのではないだろうか．ここで,“ コミュニケーション ”という言葉からの連想で,“ Mathematics for All ” — 本節の文脈にひきつけて訳すなら,“ 社会の全構成員のための数学 ”だが，ここでは,「すべての人にとっての数学」と訳しておこう — に関するフロイデンタールの見解に触れておきたい．

フロイデンタールは，遺著である『数学教育再訪』の“ すべての人にとっての数学 ”と題された節（[4, pp.178 – 180]）を，

> “ すべての人にとっての数学 ” という タイトルは，スローガンのように聞こえるかもしれないが，これはひとつの挑戦である．“ すべての人にとっての数学 ” は．無数の集会や会議の主題となってきたが，いまだ研究の対象であり続けている

と切り出す．そして，

> 一般教育（general education）に関する論考では，ニューメラシー（numeracy）は，リテラシー（literacy）の伴侶とされる．リテラシーが言語のひとつの側面に過ぎないのと同様，ニューメラシーも “ すべての人にとっての数学 ” の一側面に過ぎない．リテラシーが何であるかは，様々な状況下で互いにコミュニケートしている人々や集団に依存しており，ニューメラシーについても，同じである

と述べ，以下で，この“すべての人にとっての数学”という問題を「コミュニケーションという側面から考えて」みると宣言する．

フロイデンタールは問う．

> 我々は，“クラス”を教える．それでは，なぜ，“クラス”が学ぶことを求めないのか．人生は協同（cooperation）である．なぜ，試験は，個人の出来栄えだけを問題とし，共同体としての出来を無視するのか．この問いに答えることを，先延ばしにしても良いのだろうか．

フロイデンタールは答える．

> 答えは，もちろん,「先延ばしにすべきではない」となるだろう．しかし，この答えに実を与えるためには，多大な時間と困難が待っている．答えに至る長い道のりの最初の一歩は，“すべての人にとっての数学”における共同的な対象 (cooperative objectives) を定式化し，他者と共同して実行するための特有な課題を記述することになるだろう．

フロイデンタールのこの言葉に，前節のバスの言葉と響きあうものを感じるのは，我々だけであろうか．

4.4　数学の教育と合理性 — ヴェーバーの見解を敷衍する

前節では，ハンス・フロイデンタールの「すべての人にとっての数学とは何か」という問題提起的な文章を取り上げ，その解答が「様々な状況下で互いにコミュニケートしている人々や集団に依存して」いるという指摘を紹介した．

さまざまの人間集団における数学と教育の関係性について考察することは，我々の提唱する“教育数学”の重要な要素のひとつであるのだが，ここでは，それらを具体的に論ずるのではなく，人間の社会に関する透徹した議論を展開したマックス・ヴェーバーの見解を敷衍することで，この問題に対するひとつの見方を提示してみたい．

4.4.1　基本仮説 — ヴェーバーにとっての合理性と数学

管見の限りであるが，マックス・ヴェーバーに「数学」や「数学の教育」を主題とした著述はない．それにもかかわらず，ここでマックス・ヴェーバーを持ち出した理由は，ヴェーバーの立論における鍵となる概念である“合理性（Rationalität）[55]”が，数学の教育と深い関係をもつと考えるからである[56]．

[55]「合理的 (rational)」や「合理化 (Ratinalisierung)」という言葉で用いられることも多いが，総称として「合理性」とした．

[56]ヴェーバーの学問の特徴については，例えば，本稿の付録 B.2 節を参照されたい．

より具体的に述べれば,「ヴェーバーの“合理性”という概念の中核は，数学の教育で習得されるものである」ということである．この主張について，本稿では十分に論じる準備がないので — 次項で“傍証”は掲げるが —，とりあえず，“仮説”ということにしておきたい

なお，この“基本仮説”を認めれば，我々は，ヴェーバーが“合理性”について論じた様々なことから，数学の教育の社会的側面についての示唆を得ることができる．

4.4.2 基本仮説の傍証

ここで，上述の“基本仮説”の“傍証”として，合理性と数学との関係を示唆している文章を，いくつか，ヴェーバーの著作から集めておきたい．

1. 合理性と計算可能性

『ロッシャーとクニース』からの抜粋（[25, pp.64 – 65 , 日本語訳 pp.133 – 134]）から始めよう．人間の「自由」が「不合理」な行為の実行可能性を含意するといった類の主張を批判的に論ずる場面において，ヴェーバーは，次のように提示する．

> われわれはここで,「非合理性」という概念を，さしあたつて単純に「計算不可能性（Unberechenbarkeit）という日常的な意味で受取ろう．

そして，この「計算」の意味については，以下のような説明が与えられる．

> ところで，さしあたっては,「体験された」現実のなかに，人間の行為に特有の「計算不可能性（Unberechenbarkeit）」を感知させるようなものはまったく何もない．
> いかなる軍事命令，いかなる刑罰法規，またわれわれが他人との交渉において行ういかなる表出も，それが向けられる人々の「心（プシケー）」における一定の結果の出現を「計算している（rechnet)」， — 〔但し〕あらゆる関係とすべての人とにおける絶対的な一義性ではなく，命令や法規や具体的な表出が一般に役立とうと欲する目的にとって充分な一義性をもってである．
> このような事態は，論理的に考察すれば，架橋技師の「静力学的」計算（berechnungen)，農夫の農業化学上の計算，また牧畜業者の生理学的考慮となんら異なる意味において行われるのではない．またこれらのものはやはり仲裁人や定期仲買人の経済的考量がそうであるのと同じ意味において,「計算」なのである．

もちろん，ヴェーバーのいう「計算」が，単なる数値計算を想定しているわけではないことは，直ちに見て取れる．さらに，自然科学的な対象における「定量化されたものの（数値）計算」が，社会的行為における「計算」より無前提で優位ではないことについて，次のような言葉を継いでいる．

> これらの「計算」のおのおのは，それらにとって必要な「精密」度で満足し，またそれに特有の目的に従い，原素材の状態に応じて具体的に実現しうる程度の「精密さ」に甘んずる.「天気予報」などの領域における「自然事象」の「計算可能性」は，われわれに熟知の人物の行為を「計算」することよりも「確実」だということは決してない．実際それは，非常な高度で完成されたわれわれの法則的知識におけるのと同等の確実性にまで高められることは，まったくできないのである．だが，特定の概念化された関係ではなく，将来の「自然事象」の十全なる個性が問題になっているところでは，どこでもそうなのである.

2. 「経済行為の形式（フォルマル）合理性」と「計算」

前項で鍵となった「計算」という言葉は,「経済行為の形式（フォルマル）合理性」の“定義”にも登場する.『経済行為の社会学的基礎範疇』（[32, pp.44 – 45 , 日本語訳 pp.330 – 332]）から，著名な形式（フォルマル）合理性と実質（マテリアル）合理性について取り上げてみよう.

> 経済行為の形式合理性とここでいうのは，その経済行為にとって技術的に可能でありまた現実に経済行為に適用されてもいる計算（Rechnung）の度合いのことをさすものとしよう.

ここで,「形式合理性」と「計算」の親和性が見て取れるが，経済的行為についての「形式合理性」について，もう少し具体的な説明が，次のように与えられる.

> 一つの経済行為は，すべての合理的な経済に固有な「事前の配慮」が，量的に，つまり「計算可能」な熟慮というかたちで表示され得，また実際にそのような表示をされる度合いが高ければ高いほど，形式的に合理的と呼ばれるべきである〔さしあたってこのことは，その計算が技術的にどういうかたちをとるか，見積もりが貨幣量でなされるかそれとも実物量でなされるか，ということとはまったく無関係である〕．だから，この概念は〔たとえ相対的な問題であるにせよ〕，少なくとも貨幣という形態が最大の形式的な計算可能性を示す〔もちろん他の事情等しきかぎりにおいて！〕という意味で一義的である.

この説明を見ると,「形式（フォルマル）合理性」における「計算」の中核的なイメージは，数学的な「数値計算」とほぼ同義といっても良いように思える.

3. 合理的理解のための明証 — 数学と論理学

ヴェーバーは,『社会学の基礎概念』の冒頭部分（[31, pp. 1 – 2 , 日本語訳 pp. 6 – 9]）で,「社会学とは，社会的行為（soziales Handeln）を解明（deuten）しつつ理

解（verstehn）し，これによってその経過とその結果とを因果的に説明しようとする一つの科学のことをいうべきである」と述べている [57].

人間がこの「理解」を得るために用いる「明証」を，ヴェーバーは，大きく「合理的」なものと「感情移入的に追体験される」ものに区分する．このうち，前者の「合理的な明証」で得られる理解について，

> 合理的に明証的とは，行為の領域においては，とりわけ，その思念された意味連関があますところなく，かつはっきりと知的に理解された場合である

とされる．そして，

> 最高度に合理的に理解しうるのは，すなわち，ここでは直接かつ一義的に知的に意味をとらえうるのは，とりわけ互いに数学的ないし論理的表現で関係する意味連関である．或る人が $2 \times 2 = 4$ という命題，またはピタゴラスの定理を，考えながらまたは証明しながら，用いるといった場合，もしくは論理的な連結推理を — われわれの思考の習慣にしたがって — 「正しく」行うといった場合，われわれは，それが有意味的に何を意味しているかを，実にはっきりと理解する．
>
> 同様なことは，或る人が，われわれに「知られている」として通用する「経験事実」と所与の目的とから，適用されるべき種類の「手段」に対して（われわれの経験に照らしてみると）一義的に判明する，自らの行為における帰結をひきだす場合についてもいえる．

と述べられる．

こうした論述から，ヴェーバーの“合理性”概念の中核に「数学と論理学」が存在することが見て取れるが，後者の「論理的な連結推理」を「（アリストテレス的な）形式論理学における推論」と考えれば，ここでいう「論理学」も，論理計算（ないし命題計算）という数学の一部 — 現行の日本の学校数学には含まれないが — とみなすことができるだろう．

4. 日常生活における合理性

ヴェーバーは，『理解社会学のカテゴリー』の最終部（[29, pp.473 – 474, 日本語訳 p.126]）において，日常生活を送る上での「合理性」について，次のように述べている．

> 〔路面電車とかエレベーターとか貨幣とか裁判とか軍隊とか医療とかいった〕日常生活の諸条件は，合理的に，つまり周知の規則に従って機能するのであっ

[57]「理解」という概念は，ヴェーバーの構想した学にあって，基本的な重要性をもつ．実際，彼は，自身の提示する社会学を「理解社会学」と呼んだ．

> て … だから人間は，少なくとも原理的には，それらを「計算（rechnen）」し，その行動を「算定（kalkulieren）」して，そこからもたらされる一義的な予想に準拠して自ら行為しうる．

これまで「計算」と訳していた言葉は，rechnen （およびその変化形）であったが，ここで kalkulieren という言葉が登場したため，とりあえず，後者を「算定」と訳し分けた．ヴェーバー自身は，おそらく，修辞的な使い分けをしているだけで，意味の区別をしているわけではないと考えられる．

4.4.3 合理性の根拠の理解について

第 4.4.1 節で，ヴェーバーの合理性に対する“基本仮説”が認められるなら，ヴェーバーの論説から数学の教育に関する示唆を得ることができるであろうという趣旨のことを述べた．

ここでは — ひとつの例として —「数学の学習では，公式を覚えて計算ができるだけではだめで，その根拠や原理を理解することの方がより大切である」といった数学教育に関する主張を取り上げてみよう．この場合の，対応する社会学的な知見として,「“合理性”にもとづく生活を営んでいる社会の構成員の，その“合理性”の根拠なり原理についての理解」に関するヴェーバーの論（[29, pp.471 – 474, 日本語訳 pp.120 – 126]）を見てみよう．

ヴェーバーは，述べる．

> われわれが路面電車や水圧エレベーターや鉄砲を適切に使用しているからといって，それらの構造の基礎にある自然科学的法則について何かを知っているわけではないし，路面電車の運転手や銃工さえも不完全にしかその法則に通じていないであろう．今日普通の消費者は，日用品の製造技術についてさえおおよそのところしか知らないし，大抵は，それがどのような原料からどのような産業部門において生産されたかを全く知らない．彼らは，何といっても，この製作物がどのように動くかをめぐる自分にとって実際に重要な予想にしか関心がないのである．
>
> この事情は，社会的制度，たとえば貨幣の場合でもかわりはない．貨幣は本来どのようにしてその奇妙な特質を備えるに至るのか， — 専門の学者でさえ激しく論争しているくらいだから — 貨幣使用者にはわからない．

一般に，社会における合理化の進展は，社会の分化との関係性の下で捉える必要がある．ヴェーバーは，次のように説く．

> 社会の分化と合理化との進展が意味するのは — 必ずいつもというわけではないとしても，結果においては全く通常の場合 — 合理的な技術や秩序に実際に

> 関わる人々が，その技術や秩序の合理的な基礎から全体としてみればますます引き離されていくということであって，彼らには，総じて,「未開人」に呪術師の呪術的手続きの意味が隠されているのと同じ様に，その合理的基礎が隠されているのが常である．したがって，共同体（ゲマインシャフト）的行為の諸条件や諸関連についての知識の普遍化が，当の行為の合理化をもたらすというわけでは決してない．

ここで留意すべきなのは，ヴェーバーの立論は“ 価値自由 (wertfreiheit) ”な立場からなされていることである．つまり,「数学の教育において，公式が成り立つ根拠や原理を教えるべきか」といった“ 価値 ”を問う疑問に答えるものではない．あくまで,“ 社会の実相 ”にもとづく記述に他ならない．

最後に，社会の一般的な構成員の“ 合理性 ”に対する態度は,「（根拠や原理にもとづく）理解（Verständnis）」ではなく「諒解（Einverständnis）」であるという — 数学的な計算を例に含む — ヴェーバーのコメントを引用して，この節を閉じたいと思う．

> 帳簿の作成規則を「知って」いて，その規則を正しく — あるいは，個々の場合には，思いちがいまたはごまかしの結果，誤って — 適用するかたちで自らの行為を方向づけるためならば，帳簿係や帳簿主任でさえ，そうした規則が考案されるもとになった合理的原則を現に知っている必要はもちろんない．
>
> われわれが算術（Einmaleins）[58] を「正しく」使いこなすためには，たとえば「2 から 9 は引けないので，上の位から 1 を借りる」という引き算の原則などの基礎にある代数の諸定理を合理的に理解している必要はない．算術の経験的「妥当」は,「諒解的妥当」の一つの例である．しかし「諒解（Einverständnis）」と「理解（Verständnis）」とは同じではない．
>
> 算術は，専制君主の合理的な命令が臣民に授与されるのと全く同様に，子供の時に「授与（oktroyieren）」される．それも最も本質的な意味でそう言えるのであって，その理由も目的さえもさしあたり全く理解できないにもかかわらず，義務づけるかたちで「妥当する」ものとして授与されるのである．したがって，「諒解」とは，さしあたり，習慣であるがゆえに単純に習慣に「従う」ことであり，多かれ少なかれそのようなものであり続ける．諒解に従い「正しく」計算したかどうかを確かめるときも，合理的な考量にはよらないで，覚え込まされた（授与された）経験的な検算法によるのである．

5　おわりに

本稿で，我々は，数学と教育についての堅固な論 — 我々の構想する教育数学 — を構築するための，いわば“ 地均し ”として，数学の教育の個人的側面と社会的側面のあれこれ

[58]Einmaleins は,“ 最も初歩的 ”な算術の知識・技法を意味している．

について検討を行ってきた．次に来る作業は，こうした個人的側面と社会的側面を架橋し，統合的な「数学と教育」についての見方を提示することになる．

この最終章では，その展望について，簡単に触れておきたい．

5.1 共同体と数学

前章では，今の日本の日常的な社会，ハイマン・バスのアメリカ合衆国の社会，フロイデンタールの「様々な状況下で互いにコミュニケートしている人々や集団」，そして，ヴェーバーの一般的な「社会」に関する話題を採り上げた．

この先に続くものは，ヴェーバーふうに一般化された「社会」という場で，より精密な議論を展開することだろうと考えている．ここで，抽象の度合いを高めるため,「社会」にかえて「共同体（community)」という言葉を使うことにして，本稿の議論を振り返りながら，何歩か先に進んでみよう．

5.1.1 共同体の構造的問題としての「学校数学不要論」

まずは，この「共同体」という立場から,「学校数学不要論」を見直すことから始めてみる．

第 4.1.4 節で「学校数学不要論」を日常型と専門型の二種に区別したが，状況を少しばかり抽象化して眺めると，両者は共通の構造的な問題を表わしていると見なすことができる．端的に述べれば,「数学を使用する共同体における数学」と「数学を教育する共同体（学校）における数学」との不適合，という問題である．

大雑把に述べて，日常型の学校数学不要論は，生活共同体と普通教育共同体[59]との間の相克に由来するものであり，専門型の場合は，複数の専門共同体の複合体と 専門基礎教育共同体とでも称すべきものとの間の不協和を表明していると考えることができる．

こうした状況を取扱うための，我々の基本的な着想（アイデア）は,“共同体上で保持される数学”—「共有数学」と呼ぶ — という一般的な概念を導入することである．

このとき — 例えばだが — 「学校数学不要論」は，複数の共有数学の（その基盤となっている共同体を包摂した）多様な関係性のひとつの面と見なすことができる．また,“共有数学”という概念装置を用いれば，そもそも「学校数学」とは何なのかという問いにも,「学校という教育共同体の共有数学」と規定することができる．

5.1.2 共有数学と個有数学

ここで,「共有数学」という概念について，少し説明を加えておこう．

[59]厳密な概念規定をするつもりはないが，とりあえずは,「普通教育」を，共同体の全構成員を対象とした教育といった意味にとっておきたい．

「数学」という言葉で表現される人間の営みには，個々の人間が特定の課題の解決のために用いる手段としての側面と，人から人へと伝承されることで人間集団で保持される知識や技法の体系としての側面がある．“ 共有数学 (communal mathematics) ”とは，共同体の構成員に共有されることで保持されている「数学」の意で，後者の側面から見た数学のことといっても良い．

一般に,「共有数学は共同体ごとに特有な性質をもつ」と考えられる．この共有数学の特有性は，言語 — ソシュールのいう“ 特有言語 (idiom) [60] ”— の特有性 [61] と同種のものである．つまり,“ 共同体の構成員が共有する ”という性格をもつ数学は，共同体の種別に応じた多様性をもつことになる．

なお，共有数学の多様性を強調することで「数学に普遍性が存在しない」と主張しているわけではない．教育数学では,「個々の人間が特定の課題の解決のために用いる手段 」 — より正確には「人間と人間を取り巻く“ 外的 ”環境との相互作用の手段 [62]」 — という側面から見た数学を“ 個有数学 (individual mathematics) ”と呼んで，共有数学と区別する [63]．そして,「数学の普遍性」は，個有数学の「人間と自然との相互作用の手段」という捉え方自体に内在していると考える．

5.1.3 言語との類似 — 抽象化による一般化

共有数学は，一般に，共同体の時間変化に伴って，それ自身も変化する．同種の現象は，言語についても生じる．詳しく述べれば，個々の人間の操る“ 言語 ” — ソシュールの“ ラング ”といった方が良いが — は，社会的関係をもつ人間同士の“ 言語を通じた相互作用（パロール）”によって変容することで,“ 調整 ”が行われる．
ソシュールは，言語の“ 一般的な性質 ”として，この調整が“ 自然 ”であること，つまり，人為的な制御を超越していることを強調したが，共有言語（特有語）として捉えるなら，基盤としている共同体の性質に応じて，社会的に制御される割合が高くなる．実際，言語の場合，各種の“ 標準語 ”や“ 公用語 ”については，そうした“ 共有言語 ”の形成や維持・変革において,“ 社会的に制御された教育 ”の果たす役割が大きいことは周知であろう．

数学と言語の類似性を追求することで，数学の場合についても — 前述の学校教育不要論のような — 共有数学における齟齬の調整において，同種のメカニズムの適用が可能となることが期待できる．このことは，言語と数学を統一的に扱うことで得られるであろう多くの利益の一例とみなせる．

[60]本稿の文脈で言えば,「特有言語」というより「共有言語」と呼ぶべきだが.

[61]大きくは，日本語，英語，アラビア語等々の固有性，あるいは，地域や，社会階層に応じた各種“ 方言 ”の固有性，等々のこと．なお，第 3.2.5 節を参照のこと．

[62]比喩として，自然を読み解く“ 言語 ”としての数学.

[63] “ 共有数学 ”と“ 個有数学 ”は，それぞれ，数学のある側面を“ 理念化 ”したものである．本節の“ 共有数学 ”と“ 個有数学 ”の概念規定は，それぞれの側面の部分的な特徴によっている．

5.2　基礎的概念を定義すること

前節で,「共有数学」と「個有数学」という言葉を導入したが，その前提には,「共同体」というものがあった．いずれも，その内実が厳密に規定された“ 概念 ”とは，とうていいえない状態であった．そもそも,「数学」といい,「教育」といっても — その一端を本稿で眺めてきたように — さまざまな意味合いを持ちうる．しかし，数学と教育について論じる — それが「教育数学」であるかどうかはともあれ — 際に,「数学」と「教育」の意味が曖昧なままでは不都合であろう．
したがって，まずは,「数学」や「教育」 — 「共同体」や「言語」も含めて — の概念規定を，その個人的側面と社会的側面が交錯する場に，しっかりと構築する必要があるということになる．

この課題に答えるため，現在我々が想定しているのは,「個人の行為」という，いわば個人的側面に立脚して，社会的な側面をそこから概念構成していく，マックス・ヴェーバーの“ 方法的個人主義 ”と呼ばれる方法論を適用することである．

5.3　数学の多様性と普遍性

我々が数学の「多様性」と「普遍性」と呼んでいるのは，数学の教育の社会的側面と個人的側面の探究の先に見えるもののことである[64]．

そもそも，マックス・ヴェーバーに倣うことは，前節で述べたような基礎的な概念の構成だけではない.「数学の多様性」を数学の教育の実際に活きるような形態で把握することについても，ヴェーバーの学問構想や方法論が範になると考えている．
ヴェーバーの方法論に準拠するということは，多様性の基盤に「人間の行為」を置くということだが，この“ アトム ”としての「人間の行為」を掘り下げていくと，いわば“ 無定義語 ”としての“ Sinn [65] ”に到達する．

「数学の普遍性」については，人間にとっての言語の普遍性を追求したソシュールやその後継者たちの手法が参考になると考えている．ソシュールは，言語の本質 — しばしば“ 記号機能 ”と呼ばれる — を,「pansée と idée の相関」に見たが，デンマークの言語学者ルイ・イェルムスレウは，さらに歩を進め，ソシュールの pansée と idée が二つの面として顕われる統一体を想定し，これを“ mening ”と呼んだ[66]．この“ mening ”というデンマーク語を，竹内孝次氏は「原意」と訳したが，英語では “ purport ”, 仏語では “ sens ”，そして，独語では ”Sinn ” と訳される．

こうして，いわば，多様性を探究するヴェーバーの方法と，普遍性を追求するソシュールの手法は,“ 自然と対立的な存在としての人間 ”の根底に横たわる“ Sinn = mening ”に

[64]より正確には,「共有数学の多様性」と「個有数学の普遍性」といった方が良いかもしれない．
[65]日本では「意味」と訳されることが多い．ヴェーバーにとっての「意味」の重要性については，付録 B.1 節を参照のこと．
[66]付録 C.2 節を参照のこと．

おいて，共通の基盤に出会うことになる[67]．我々は，この共通の基盤の上に論を展開することで，数学の多様性と普遍性を，言語や教育と通底する枠組みのなかで，把握することができるのではないかと考えている．

参考文献

[1] Ball, D. L., Bass, H. : *Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom*, In D. Phillips (Ed.), Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press (2000).

[2] Ball, D.L., Goffney, I.M., Bass, H. : *The role of mathematics instruction in building a socially just and diverse democracy*, The Mathematics Educator, 15 (1), (2005). 2-6.

[3] Bass, H. : *Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education*, Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, vol.42 (2005), No.4, 417-430.

[4] Freudenthal, H. : *Revisiting mathematics education: China lectures*, Dordrecht, Kluwer Academic Publ. (1991).

[5] Galilei, Galileo, *Il Saggiatore* , in Opere, volume II, Milano (1832).
[日本語訳] ガリレオ 『偽金鑑識官』（山田慶兒，谷 泰 訳） 中央公論新社 (2009).

[6] バトラー後藤裕子 『学習言語とは何か』 三省堂 (2011).

[7] Hjelmslev, L. : *Omkring Sprogteoriens Grund-læggkese*, Festskrift udgivet af Københavns Universitet i anledning af Universitets Aarsfest, November(1943),3 - 113. (in Danish.)
[英語訳] —— : *Prolegomena to a Theory of Language*, （translated by Whitfield, F. J.） Revised English edition, Wisconsin (1961).
[日本語訳] ルイ・イェルムスレウ 『言語理論の確立をめぐって』（竹内孝次 訳） 岩波書店 (1985).

[8] 井筒 俊彦 『東洋哲学覚書 意識の形而上学 — 「大乗起信論」の哲学』 中央公論新社 (2001).

[9] Jaspers, Karl : *Allgemeine Psychopathologie*, Springer (1913).
（日本語訳）『精神病理学原論』（西丸四方 訳） みすず書房 (1971）.

[10] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 60 巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[11] 蟹江幸博，佐波学 『数学と教育の協同 — ハイマン・バスの挑戦 —』， 数理解析研究所講究録 1657 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力形成に関する研究』報告集）， 23-73.

[67] この“Sinn = mening”を日本語でどのように表現するかであるが，あるいは，井筒俊彦氏が著書 [8] で提示している「大乗起信論における心（しん）の現代語訳としての“意識”」などが相応しいかもしれない．

[12] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 61 巻， 教育科学, (2010), 187 - 218.

[13] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の方法論的基礎（I）』 三重大学教育学部紀要， 第 62 巻，教育科学, (2011), 115 - 134.

[14] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の諸相 (I) — 数学の多様性 — 』 三重大学教育学部紀要， 第 63 巻， 教育科学, (2012), 335 - 352.

[15] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の諸相 (II) — 数学の教育的側面 — 』 三重大学教育学部紀要， 第 64 巻， 教育科学, (2013), 177 - 191.

[16] Martinet, A. : *Éléments de Linguistique Généle*, Armand Colin, Paris (1970).

[日本語訳] アンドレ・マルティネ : 『一般言語学要理』（三宅徳嘉 訳) 岩波書店, (1972).

[17] 向井 守 『マックス・ウェーバーの科学論』 ミネルヴァ書房 (1997）.

[18] 折原 浩 『マックス・ヴェーバーにとって社会学とは何か』 勁草書房 (2007）.

[19] Piaget, J. : *L'épistémologie Génétique*, Presses Universitaires de France, Paris (1970).

[日本語訳] ジャン・ピアジェ 『発生論的認識論』（滝沢武久 訳）白水社 (1972).

[20] Piaget, J. : *Piaget's Thepry*, in P.H.Mussen, (ed.), Carmicael's Manual of Child Psychology, vol.1 (pp. 703 - 32), John Wiley & Sons (1970).

[日本語訳] ジャン・ピアジェ 『ピアジェに学ぶ認知発達の科学』（中垣 啓 訳), 北大路書房 (2007）.

[21] Ravitch, D. : *LEFT BACK : A Century of Battles Over School Reform*, Simon & Schuster (2000).

[日本語訳] ダイアン・ラヴィッチ 『学校改革抗争の 100 年 — 20 世紀アメリカ教育史』（末藤・宮本・佐藤 訳）東信堂 (2008).

[22] Saussure,F.de.:*Cours de linguistique générale*, (edition critique preparee par Mauro, T. D.), Paris : Payot (1972).

[日本語訳] トゥリオ・デ・マウロ 『「ソシュール一般言語学講義」校注』（山内貴美夫 訳), 而立書房 (1976).

[23] 白畑知彦・若林茂則・村野井仁 『詳説 第二言語習得研究』 研究社 (2010).

[24] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press (1991).

[25] Weber, M. : *Roscher und Knies und die logischen Probleme der historischen Nationalökonomie*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 1 – 145 .

（日本語訳）『ロッシャーとクニース』（松井秀親 訳） 未来社 (1955）.

[26] Weber, M. : *Die "Objektivität" sozialwissenschaftlicher und sozialpolitischer Erkenntnis*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 146 – 214.

（日本語訳）『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』（富永祐治　立野保男 訳，折原浩 補訳） 岩波書店 (1998）.

[27] Weber, M. : *Kritische Studien auf dem Gebiet der kulturwissenschaftlichen Logik*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 215 – 290.

（日本語訳）『文化科学の論理学の領域における批判的研究』（森岡弘通 訳），『歴史は科学か』 所載, みすず書房 (1987）, pp. 99 – 227.

[28] Weber, M. : *R.Stammlers "Überwindung" der materialistischen Geschichtsauffassung*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 291 – 359.

（日本語訳）『R. シュタムラーの唯物史観の「克服」』（松井秀親 訳），『ウェーバー 宗教・社会論集』 所載, 河出書房 (1968）, pp. 3 – 65.

[29] Weber, M. : *Über einige Kategorien der verstehenden Soziologie*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 427 – 474 .

（日本語訳）『理解社会学のカテゴリー』（海老原明夫 中野敏男 訳） 未来社 (1990）.

[30] Weber, M. : *Der Sinn der "Wertfreiheit" der soziologischen und ökonomischen Wissenschaften*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 489 – 540.

（日本語訳）『社会学および経済学の「価値自由」の意味』（松代和郎 訳） 創文社 (1976).

[31] Weber, M. : *Soziologische Grunbegriffe*, in *Wirtschaft und Gesellschaft*, 5. Auflage, Tübingen (1980) SS. 1 – 30.

（日本語訳）『社会学の基礎概念』（阿閉吉男　内藤莞爾 訳） 恒星社厚生閣 (1987）.

[32] Weber, M. : *Soziologische Grundkategorien des Wirtschaftens*, in *Wirtschaft und Gesellschaft*, 5. Auflage, Tübingen (1980) SS. 31 – 121.

（日本語訳）『経済行為の社会学的基礎範疇』（富永健一 訳） 尾高邦雄　責任編集　『世界の名著　61 ウェーバー』 所載，中央公論社 (1979） pp. – .

付　　　　録

本文の参考に供するため，関連する話題をいくつか，付録にまとめてみた．なお，参考文献からの引用に際しては，本文における利用の便宜等を考え，適宜段落を区切り，また，小見出しをつけた．

A　バス関係資料

A.1　民主制度構築のための数学教育の役割

ハイマン・バスが，デボラ・ボールとイマニ・ゴフニー[68]と共に著わした論考『社会的に公正で多様な民主制を構築するための数学教育の役割（*The Role of Mathematics Instruction in Building s Socially Just and Diverse Democracy*）』（[2]）から，本稿の議論に関係する部分の概要についてまとめておく．

A.1.1　孤立した教科としての「数学」

この論考は，デボラ・ボールとイマニ・ゴフニーが,「小学校の教師」として抱いていた“ 教科としての数学 ” についてのイメージを語るところから始まる．

> 〔小学校の教師として〕二人は，生徒達に，一箇の人間として，また，共同体の一員として，自身を成長させるための助けとなるような技能 (skills) や知識 (knowledge) を教えていた．教科は，こうした社会的な目的のための重要な手段 (resources) を与える．

二人は,「多様な文化的背景をもち，広い範囲にわたる共同体に属する生徒たち」と向かいあうことで，子供たちが「互いに異なった考え方をし，また，自分たちのクラスの共同作業に，いろいろな意見や経験を提供してくれる」ことに気づく．そして，教師として,「子供たちがもたらしてくれるものに耳を傾けることや，子供たちの差異を利用したり調停すること」を学んだという．

この「多様な子供たちを，差異を利用して調停する」という目的のためには,「国語科，社会科，美術，音楽，そして理科さえも（reading, social studies, art, music and even science)」役に立つことが実感されたが，

> しかし，数学（mathematics）は，他の科目から孤立しているように思えた．数学は，議論することもなく，子供たちの多様性に注意を払ったり利用したりする機会もないように思えたのだ．

[68]付録 A.2 で紹介した題材を含む，一連の授業を実施した小学校の教師である．

A.1.2　社会的に公正で多様な民主主義国を形成するための「数学」

ところが，上述のような経験について，バスを含めて話し合った際に，デボラとイマニがそこに見ていたものとは違った風景が開けてきたという．

> 我々は，数学 — と教師がそれを教える方法 — が，社会的に公正で多様な民主主義国を形成するための鍵となる手段のひとつであることを悟った (recognize) のだ．

さらに，「他の学校の教科も民主主義教育や社会的公正のための手段を提供するが，数学は，この目的に，固有の貢献をする」ものであり，

> 数学を，文化的に中立で，政治的な関連性をもたない，そして，主として生得的な能力に関係するものとみなすかわりに，我々は，もしそれ特有の手法 (resources) が利用できるような方法で教えれば，数学は，社会的かつ教育的な発達のための決定的な“梃子（手段, lever）”

となることがわかるのだという．

A.1.3　民主主義教育への「数学」の周知の寄与

もちろん，こうした主張をするからには，

> 数学 — そして数学の授業 —　が民主主義教育に寄与できることは何かについて考察しないかぎり，我々の議論は完結しないだろう

と述べ，周知の寄与として，

1. 日常生活のための技能（skilles）
2. あまり技術的ではない職場でさえ増大しつつある数学的な要求に応えること
3. 上級の数学の勉強のための準備を含む数学的リテラシー

が挙げられる．

A.1.4　特別な役割のための特別な授業

バスたちは，上で挙げられた数学教育の寄与に加えて，

> 我々は，数学には，若者を多元共存的な民主主義社会に加入させるための教育において果たす，ある特別な役割がある

ということを主張し，続けて，

> このことを可能にできるかどうかは，こうした広範な社会的目的を実現するために数学が保持している特別な手段を用いる授業（instruction）に拠ることになる

と述べる．

そして，この「特別な手段を用いる授業」として，以下の 3 つが挙げられる．

1. 「社会の分析（analysis） と 社会変革（social change）のための道具（ tools） を身に着けさせる（develop）こと」によるもの．

   具体的には，選挙や税法に関連する項目が例示されている．

2. 「多様な社会に加入するための重要な手段（resources）である，文化的な知識や認識 (cultural knowledge and appreciation) を身に着けさせること」によるもの．

   例として，建築物や美術，音楽，科学，宗教と同様に，歴史や文化やそれらが「交錯するところを勉強するための媒体 (medium) として，数学的な概念（ideas）や方法（methods）の歴史的な発展を提供する」ことが挙げられている．

3. 「数学的な実践 (mathematical practice) 自身のうちに埋め込まれている技法（skills）や 規範（norms）」 によるものである．

   これについては,「数学の内容や数学という道具だけではなく，数学的な活動そのものがもつ本性 (the very nature of mathematical work) について論じるということである」と言い換えられ,「これこそ本稿が焦点をあわせようとするもの」であるとされる．

A.1.5 「数学的な活動がもつ本性」の教育的効果

ここで，前項の最後に挙げられた「数学的な実践 (mathematical practice) 自身のうちに埋め込まれている技法（skills） や 規範（norms）」 による授業について，以下のように，さらに詳細に論じられる．

> 数学の授業（instruction）は，特別な種類の共有された経験，すなわち，生産的な共同作業のために差異を理解し，尊重し，利用するという経験，を提供することができる．
>
> そう我々は主張する．なぜ，そうできるのか？
>
> 数学というものを，問題を解くことと，何が真であるかを発見し証明することを中心とするものであると考えよう．ある問題について，別の解釈や表現をしてみることは，しばしば，解答への道を開くことに役立つことになる；ときおり，新しい喩えや，図，文脈（context）は，問題の難しい部分を砕き割ることができる．

同時に，差異の利用は，共通の学問的に訓練された言葉や，規範，慣例 (practices) によって組み立てられ，支えられていることになる．用語は正確に定義され，かつ，共通の仕方で用いられなければならない．

見解の相違の解決は，大声を出したり，多数決によるのではなく，リーゾニングに則った論議 (reasoned arguments) による．そして，この論議を構成することは，教えることができるし，学ぶこともできる．0 は偶数か奇数かとか，$\frac{3}{4}$ の意味をどのように解釈するかとか，$\frac{5}{5}$ は $\frac{4}{4}$ より大きいか小さいか[69] とか，あるいは，しかるべき問題の解法は正しいかどうか，などを決定することは，数学的なリーゾニングに従う (subject to) べきもので，願望や権力に支配 (govern) されるものではない．

その上，数学的なリーゾニングというものは，身につけるべき習慣 (practice to be learned) であって，生まれつきの才能ではない．

A.1.6 総括 — 民主主義社会における数学教育の役割

以上の議論を踏まえて，民主主義社会における数学教育の果たす役割を — 他の教科との比較も交えて — 説いた文章を引用して，まとめに代えたい．

> このようにして，数学の授業（instruction）は，子供が他の人の見方や考え方の価値を学ぶことを，ゆっくりとではあるが，支援することができる．論争というものをどのように行い，また，調停するかといったことも，同様である．
>
> 差異が共同作業において価値のあるものであること，そして，経験や言葉，文化の多様性が共同体の可能性 (capacity) や有効性 (effectiveness) を豊かにし強化すること，数学の授業は，生徒たちが，こうしたことを学ぶことを支援するように設計 (designe) することができる．
>
> 生徒たちは，数学が差異を投票で解消する競技場（アリーナ）(arena) ではないことも学ぶことができる．政治 (Politics) とは，差異がそうした方法で取り扱われる競技場であるが，文学 (literature) や数学の学習はそうではない．
>
> 民主主義社会において，見解の相違をどのように解消するかは，決定的な重要性をもつ．が，数学は，そのための一揃いの経験と規範 (one set of experiences and norms) を提供する．そして，他の教科や経験は，別種の揃いを与えることになる．文学 (literature) では，解釈の差異は解消されることはないが，数学では共通の一致した見解（コンセンサス）が大切になる (in mathematics common consensus matters)．

[69]「等しい」と言いたいのかもしれないが，4/5 と 3/4 等々との誤植である可能性も高い．

A.2　ショーン数の発見 — 初等教育の現場から

デボラ・ボールが小学校で行った 1 年間の授業の記録のなかから，バスが注目する場面のひとつ — ショーン数の発見 — について，本稿での議論に必要な部分をまとめてみる．なお，詳しくは，文献 [11] を参照のこと．

A.2.1　背　景

1989–1990 年，デボラ・ボールとマグダリン・ランパートの二人は，NSF の助成金，地元小学校の協力と，多数の協力者を得て，小学校における自分たちの授業を多面的な媒体を用いて記録するという共同作業を行った．

ボールが受け持ったのは，3 年生（8 歳）対象の数学（算数）の授業である．クラスは，22 人の生徒から構成されていて，そのうち 10 人はアメリカ育ちであり，残りの 12 人は他の国から来ていた．クラスの構成員は，標準化するように選出されたものではなく，数学的技能や概念の定着度にはかなりの幅があった．

一回の授業はおおよそ 1 時間で，おおむね，一つないし二つの問題が扱われた．各回の授業は，その日の問題を生徒が個々に考えることから始まる．生徒は，数学用のノートをもつことになっており，そこに自分の考えたことをすべて記録することになっていた．

ひとつの単元における流れとして，しばしば授業は「定義をつくり，予想をたて，それを証明する」[70] ように進められた．

なお，年間を通して授業で扱われた話題は，位取りと繰り上げ，分数，整数，多角形，確率である．

A.2.2　授業の流れ

バスが好んで取り上げる題材は，整数の偶奇に関連する授業の一場面である．

子供たちは，3 年生になるまでに，（小さな個々の数について）どの数が偶数で，どの数が奇数であるかを「知っている」．しかし，こうした概念について，いかなる形式的な定義も与えられていない．

単元は，次のような問題の解の探求から始まる．

> ミックのポケットには，30 セント入っています．彼は，お金を全部ガムとプレッツェル [71] を買うのに使って，ポケットには 1 セントもおつりを残したくないと思っています．
>
> 30 セントで，どんなふうに買えば良いでしょうか？ どんな選び方がありますか？

この問題を解く過程で，子供たちは偶数と奇数の概念と出会い，その算術的な性質（例えば，偶数＋奇数＝奇数，奇数＋奇数＝偶数，等々）を予想するようになる．

[70] 初期の授業において，予想，定義，証明という「術語」の説明が，子供に了解可能な範囲でなされていた．

[71] 結び目形の塩味クラッカー．

A.2.3 Our working definition

「偶数の定義」は — 例えばであるが — ある授業で，“ 作られる ”．こうした定義は，クラスにおける“ 共通の了解の下 ”にあるという意味合いを込めて，「ここでのみんなの定義 (our working definition)」と呼ばれる．そして，別の回の授業で，必要に応じ，次のような場面で使用されることになる．

教師が，ある生徒に尋ねる．

> 「偶数の，ここでのみんなの定義 (our working definition) は，何？ 前のあの日から，ここでのみんなの定義を使うことにしたこと，覚えてる？ 」

その生徒が定義を覚えてなければ，別の生徒に答えさせる．

> 「数は，えー，1 を半分にすることなく，平等に (evenly) 分けることができるとき，偶数である.」

A.2.4 ショーンの主張

ある日の授業が始まってまもなく，前日の議論を振り返っていたとき，ショーンという男の子が，手を挙げてこう言った．

> ええっと，ぼくは，昨日の話し合いについては特にないんだけど，6 について考えたんだ．この数は…今も考えてるんだけど．この数は，奇数にもなれると思う．だって，二つ，四つ，六つで，つまり，2 が三つで 6 になるわけで…
>
> それから，3 が二つだから，この数は奇数で偶数になれるわけ．両方！ 三つのものからできているし，二つのものから作ることもできる．

これが，この授業の予想外の主題となったショーンの主張の，最初の表明だった．

A.2.5 クラスの異議

「6 は奇数と偶数の両方である」というショーンの発言に対して，教師[72] は，すぐには反論も訂正もしなかった．彼女は，主張を繰り返し，クラスから意見を求めることで，ショーンの言っていることを「公的に明確化（publicly clarify）」しようと試みる．同級生たちは，ただちに反対を表明する．誰しも，6 が偶数であることは 2 年生のときから知っているのだ．

しかし，ショーンは，自身の主張に固執する．

> …だって，三つの何かが 6 を作っているんだし，三つの何かということは奇数みたいなもので…

この時点で，教師は，ショーンは単に「偶数」の意味を取り違えているのだと思っていた．そこで，偶数の「ここでのみんなの定義」を思い出させた上で，ショーンに，この定義が 6 に対して適用できるかと尋ねた．彼は，できることに同意したが，こう付け加える，

[72] バスの共同研究者の，デボラ・ボールである．

> それから，奇数にもなれるんだ．三つの 2 からできてるんだ．

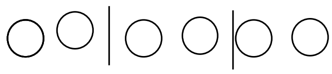
ショーンは，クラスの暗黙の了解に反して，数が偶数と奇数の両者でありうると考えているようだった．

ショーンの考えていることを明確にするため，教師は，新しい方向の質問をすることにし，すべての数が奇数と思うのかと尋ねた．ショーンが思わないと答えると，今度は，奇数でないのはどの数かと尋ねた．彼は，2，4，そして，8 は奇数ではない，しかし，6 は奇数にも偶数にもなれると言った．

A.2.6　ショーンの証明

何人かの生徒が「違う！」と大きな声を出し，ショーンに「奇数になれるってことを，証明 (prove) して」と要求する．

教師は，ショーンに証明するように促し，クラスの皆に注意を払うよう求めた．ショーンは黒板のところに行くと，6 個の円を描き，2 個のグループに分割して，



こう言う．「2，2，2 があります．これで，6 になります．」

A.2.7　メイの主張

このとき，メイという女の子が手を挙げて，こう言った．「わたし，ショーンの言ってることがわかったと思う．」メイは，説明を始める．

> … わたしは，ショーンは 2 のグループが三個あるということを言っているんだと思う．それで，三個というのは，奇数個だから，だから 6 は奇数になれるし，偶数にもなれるのよ．

教師は，はじめてショーンの論拠がわかった．そこで，他の生徒に，ショーンに同意するかと尋ねた．

メイ自身は — ショーンの考えを明確化したのは彼女だったが —，

> ええ，反対です．だって… 黒板に書いてもいいですか？

と言い，黒板のところに行くと，ショーンと向かい合い，話を続けた．

> いくつグループがあるかということは，えー，関係ないと思うんです．言いたいのは［長い間．彼女は考えている.］ええっと，もし 6 を奇数と呼ぶのなら，どうして［間］ええっと,［間］ええっと — 10．いち，に，…［黒板に丸を書く］と，10 個の丸があります．これを分けるとして，ええっと，分けたいとして，分けます，二つずつに分けます…　いち，に，さん，し，ご …［線を引いて分け，2 個ずつのグループを数える.］

○○|○ ○|○○|○ ○|○ ○

> じゃあ，どうして，10 はそう呼ばないの…えー， 奇数で偶数だと．どうして，他の数は奇数で偶数だと呼ばないの？

A.2.8 ショーンの反応

メイが驚き，さらには狼狽したことに，ショーンの次のように反応した．

> ぼくは自分に反対だ…ぼくは，そんなふうには考えなかった．ありがとう，ぼくの思ったことをふくらませて (bring up) くれて．だから，… ぼくは言うよ … 10 は奇数にも偶数にもなれるって．

A.2.9 後日談 — ショーン数の命名と性質の探求

その後，教師は，ショーンが考えたのは「偶数と奇数の両方の数」ではなく，新しい種類の数[73] であるとして,「ショーン数 (Sean numbers)」と名前をつけることにした．

クラスでは，続きの何時間かの授業において，それ以前の偶数や奇数と同様に，ショーン数のパターンについて調べた．ショーン数は，4 つおきに現われるが，なぜか？ 2 つのショーン数を足すと，結果はショーン数になるか？ 等々である．

B ヴェーバー関連資料

B.1 「意味」のカテゴリーの発見

学問の方法論を主題としたマックス・ヴェーバーの一連の著作群は，しばしば「科学論（Wissenschaftslehre）」と呼ばれる．この「科学論」を同時代のさまざまな思想潮流のなかに位置づけた『マックス・ヴェーバーの科学論』において，著者の向井守氏は，次のように述べている（[17, p.413]）．

> 彼〔ヴェーバー〕は『シュタムラー論文』において「自然科学の決定的な標識」を求め，自然を「意味なきもの（das Sinniose）」（S.333）と定義し，われわれが「それについて意味を問わないとき，ある事象は『自然』となる」という．
>
> さらに，彼は意味を主観的意味と客観的意味とに分ける．そして彼は，法学や論理学や美学などの規範的な，すなわち教義学的＝概念分析科学は客観的意味

[73] $2(2k+1) = 4k+2$ の形をした数．

を探求するのに対して，社会科学は社会的行為の「主観的意味」を「理解」し，行為の因果連関を意味連関として探求することを目指す，と説く．

そしてリッカートの「価値関係」に代わって,「意味関係（Sinnbezogenheit）」とか「意味的関係（sinnhafte Bezogenheit）」が社会科学的認識の決定的なカテゴリーとなるのである．

…

ウェーバーは意味のカテゴリーにおいて社会科学の最終的カテゴリーを見出す．「意味」こそは，リッカートに対していっているように，まさしく「最高の論理的抽象によって獲得された限界カテゴリー」（B., II, S.230）であった．

本節では，この「社会科学の最終的カテゴリー」である「意味」を「ヴェーバーが見出した」とされる「シュタムラー論文（『R・シュタムラーにおける唯物史観の「克服」』）」から，該当箇所を以下に引用しておく（[28, pp.331 – 337, 日本語訳 pp.41–46]）．

対話の本質と意味

シュタムラーは,「規則」が「社会」生活という概念にたいしてもつ意義を具体的に示すため，おりに触れてある基本的な例を使っているが，同様にわれわれもそれを使うことにしよう．

ともかくもあらゆる「社会関係」の外に立っている二人の人間 — したがって種族を異にする二人の蛮人，あるいは一人のヨーロッパ人とかれがアフリカの最奥地で出逢う一人の蛮人とが，任意の二つの物を相互に「交換」する．そのときにひとは — まったく正しいことだが — ，このばあい，外的に知覚しうる経過の，したがって筋肉運動や，そこで「話が交わされた」ようなばあいはいわば経過の「本体」をなすもろもろの音の，たんなる叙述ではその経過の「本質」はいかにしても把握されない，ということを重くみるであろう．なぜなら，この「本質」は，じつに，自分たちの外的な挙措に双方が賦与する「意味（Sinn）」のなかに成り立つのであり，しかもかれらの現在の挙措のもつこのような「意味」は，またもやかれらの将来の挙措を「規制」することになるのである．

このような「意味」なくしてはおよそ「交換」なるものは事実上不可能であるし，概念的な構成も不可能である， — こうひとはいう．まったくその通りだ！「外的」な徴候が「シンボル」として役立つという事情は，一切の「社会関係」の構成的諸前提の一つである．

シンボルの社会的意味と個人的意味

だが — われわれは直ちに重ねて問う — それはただこの社会関係だけについていえるのであろうか．

明らかにけっしてそうではない．わたしが「枝折」を「本」のなかにさし込んだとすると，このような行為の結果についてあとで「外的」に認知しうるところのものは，明らかにもっぱら「シンボル」なのである．つまり，ここで一枚の細長い紙あるいはほかの物が二枚の紙のあいだにはさみこまれているという事情は，一つの「意義（Bedeutung)」をもっているのであり，これを知ることなくしては，その枝折はわたしにとって無益かつ無意味であろうし，行為そのものは因果的に「説明不可能」でもあろう．

だがしかし，ここには，とにかくいかなる種類の「社会」関係も打ち立てられてはいないのである．あるいは，むしろロビンソン物語の基盤に完全に立ち戻っていえば，ロビンソンが，かれのいる島の森の木立数からみて「経済的に」保護が必要なので，来たるべき冬に備えて伐ろうと思う特定の木に斧で「印しをつける」とき，もしくは，かれが，貯えの穀物を「倹約」するためにこれをいくつかに分けて一部を「種播き用」として別に取り分けておくとき， — このようなばあい，またこれと類似の，読者みずから思いつかれるであろう無数のばあいの一切において，ここでもまた「外的に」知覚しうる出来事が「出来事の全部」なのではない．これらの措置がいかなる「社会生活」をもふくまぬことはまったく確かであるが，それらにはじめてそのような性格を刻みつけかつそれらに「意義」をあたえるものは，その措置の「意味」なのである．

これは原理的には,「音声の意義」が一束の紙片に「印刷された」黒い小さな斑点〔活字〕にたいする，あるいは「言葉の意義」が他人の「発する」音声にたいする，あるいは最後に，二人の交換当事者のいずれかが自分の振舞いに結びつける「意味」がその外的に近くしうる部分にたいするばあいとそのまま同じである．

「自然」とは何か

ところでわれわれは，思考のうえで，一つの客体もしくは出来事についてそこに「こめられて」いる意味を，われわれがまさにその「意味」を捨象するばあいにあとに残るような構成部分から区別して，この構成部分だけに目をつけるような考察，すなわち一つの「自然主義的な」考察を取り上げよう． — するとわれわれは，以前とは十分区別されるべきもう一つの「自然」の概念を手に入れることになる．

そのばあい自然とは「意味のない」もののことである．より正しくはわれわれがそれについて「意味」を問わないばあいに，ある出来事は「自然」となる．しかもその際「意味のないもの」としての「自然」に対立するのはむろん「社会生活」ではなくて，まさに「意味のあるもの」，すなわちある出来事や客体に付与され,「そのなかに見出し」うるような「意味」 — 宗教的な教義の内部における世界全体の形而上学的な「意味」にはじまって，狼が近づいたときロビンソンの犬が吠えることに「ふくまれる」ような「意味」にいたるまでの — である．

「意味」の把握の二面性

— われわれは,「有意味」であるとか，なにかを「意味する」，という性質がけっして「社会」生活に固有のものではないことを確認したのであるが，いまやまえの「交換」という出来事に戻ろう．

そのばあい，二人の交換当事者の「外的な」挙措の「意味」はそのものとして論理的には非常に異なる二様の方法で考察することができる．

第一に「理念」として．すなわち，われわれは,「われわれ」 — 考察者 — がこの種のある具体的な出来事にあたえる「意味」のなかに，どのような思惟的帰結を見出すことができるのか，あるいはこのような「意味」はより包括的な「有意味的」思惟の体系のなかへどのようにしてはめこまれるのか，を問題にできる．

ついでわれわれは，こうして得らるべき「立場」から，出来事の経験的な経過の「評価」を行なうことができる．たとえば，ロビンソンの「経済的な」挙措はその究極的な思惟的帰結を追ったばあいにはいかにあら「ねばならぬ」か，を問うことができるであろう．限界効用理論がそれをやっている．それからまた，われわれは，かれの経験的な挙措を思惟的に確かめられた右の基準にもとづいて「測定」することもできるであろう．また，まったく同様に，交換された物の引渡しを形のうえで済ませたのち，かれらの態度が交換の「理念」に適うために，すなわち，われわれがかれらの行為のなかに見出した「意味」の思惟的帰結にそれが一致しうるためには，二人の交換当事者はいまやさらにどのように振舞わ「ねばならない」か，を問うことができる．

したがってそのばあい，われわれは，特定種類の出来事は実際には，いちいち明瞭に考えぬかれることなくぼんやりと頭に浮かんでいるような「意味」と想像的に結びついてあらわれる，という経験的事実から出発し，ついで経験的なるものの領域を去って，当事者たちの行為の「意味」を思惟的にどのように構成すれば，自己のうちに矛盾をもたない思惟的な構築物が生じるのであろうか，を問題にするのである．この場合われわれは,「意味」の「教義学」にたずさわることになる．

理念型としての「意味」

またわれわれは他方においてつぎのようなことを問題にできる．すなわち,「われわれ」がこの種の出来事に教義学的にあたえることのできる「意味」は，そこでの経験的な登場人物のめいめいがみずから意識的にそれにこめたところの「意味」でもあったのか，あるいはそのめいめいがこれとは別にどのような意味をこめたのか，あるいは最後に，かれらはそもそもなんらかの「意味」を意識的にこめたのであろうか，と．

その際われわれは，さしあたりなおも「意味」概念のもつ二様の「意味」を — ここでは，われわれがいまもっぱらかかわっているところの，経験的な意義

において — 区別せねばならない．…「交換」の教義学的な意味は経験的考察にとって一つの「理念型」であり，経験的な現実なかには多少ともかなり「純粋」にそれにあてはまるような出来事が多数存在するので，われわれは，この理念型を，一方では「発見的に」，他方では「分類的に」使用する．…

「社会生活」を経験的に存在するものとして論議しようとする者は，いうまでもなく，教義的に存在すべきものの領域へ主題転移を行うことは許されない．「存在」の基盤のうえでは，われわれの例におけるあの「規則」は，二人の交換当事者の，因果的に説明しうるしまた因果的に作用するような，経験的な「格率」という意味においてのみ存在する．

さきに展開した「自然」概念の意味においては，それはつぎのように表現されるであろう．つまり，外的な出来事の「意味」も，その経験的な存在〔の面〕が注目されるばあいには，論理的な意味で「自然」となるのである．というのは，その場合に問題になるのは，まさに外的な出来事が教義的に「もっている」「意味」ではなくて,「登場人物」たちが具体的にその出来事に実際上結びつけた，あるいは認識しうる「徴標」によれば結びつけるように思われた,「意味」なのである．— さてくわしくいえば，まったく同様なことが，いうまでもなく「法的規則」についてもあてはまる．

B.2　予備学および補助学としてヴェーバーの社会学

マックス・ヴェーバーの業績は，多量の著作が — 本人が急逝したせいもあって — 十分に整理されない状態で遺されている．そのため，彼を単なる「社会学者」と規定してしまうことには躊躇せざるをえないものがある．

例えば，折原浩氏は，その著作『マックス・ヴェーバーにとって社会学とは何か』において,「マックス・ヴェーバーは，最終的に「社会学」に行き着き,「社会学者」として生涯を終えたのであろうか」と問い，次のように答えている．

かれの社会学は，かれの問題設定そのものが包括的な性格を帯び,「『近代文化』の総体，すなわちヨーロッパに『端を発する』 … 文化，現在の段階におけるキリスト教的・資本主義的・法国家的文化が，きわめて多種多様な観点のもとに文化諸価値の巨大な糸玉として考察され，その因果的遡源が中世をへて古代にまでおよぶ[74]」ようになると，そうした「現実科学」的ないし「歴史科学」的な本研究に向けての「基礎的予備学 Vorarbeit 」として，方法論上内在的に要請され，模索され，そうした限定的位置づけのもとに，じっさいに創生された，という見地である．

[74] [27, 日本語訳 pp.163 – 164] からの引用．

本節では，こうした“ 見地 ”からヴェーバーの業績を捉えた際に見えてくるヴェーバーの学問像から， ヴェーバー社会学の ① 方法論的特徴と ②予備学および補助学としての性格，について，折原氏の見解を引用しておく．

B.2.1 ヴェーバー社会学の方法論的特徴

折原氏によれば，ヴェーバーの方法論について,『理解社会学のカテゴリー』に「姿を顕し始めた」特徴が，次のようにまとめられる（[18, pp.6 –8]）．

1. 「ヴェーバー社会学」の「方法的個人主義」が，当時「オーストリア（限界効用理論）学派」のカール・メンガーと「ドイツ（歴史）学派」のグスタフ・シュモラーとの間で交わされた「社会科学方法論争」の一止揚形態であること，そのようなものとして,「民族」などの社会諸「形象（Gebilde）」を（「流出論理」によって）実体化するのでなく,「理解可能な意味をそなえた諸個人の行為」に還元する（ここまでは字義どおりに解説されてきた）ばかりか，これを起点に，社会諸形象の創始と構成（したがってその再構成・変動）をも,「諸個人の行為の，秩序づけられた協働連関」というカテゴリーを用いて分析的・経験科学的に捉え返そうとする構想であること，したがって「原子論（atomism） か，全体論（holism）か」という社会科学方法論上の根本問題にたいする，往時としておそらく唯一の，現在でも有効と思われる一解答をなしていること．
2. 当の「諸個人の行為」についても,「意志の自由」を持ち出して「解明」や「計測」を斥ける「ロマン主義」的人間観を「脱神秘化（entzaubern）」し，行為の「合理性」こそ，経験的「自由」の証左である（ここまでは字義どおりに語られてきた）ばかりか，さまざまな「非合理」に「解明」の射程を広げ，さまざまな「合理化」を（その道標をしつらえつつ）展望していく方法上の戦略拠点でもあると見て，活かされていること．
3. その一環として「当事者には理由あって自認されないけれども，観察者には当事者の『実践的利害 Pragma 』から理解され，説明できる『客観的（整合）合理性』」というカテゴリーが措定され，これに，マルクス／エンゲルスらによる「イデオロギー論」と，ニーチェによる「ルサンチマン論」（およびフロイトの「精神分析」）とが，相互に媒介されながら止揚され，たとえば「支配の（自己）正当化（Selbsrechtfertigung）」の理論に鋳直されていること．
4. 他方，そうした基調のうえに，法哲学者ルドルフ・シュタムラーとの対決がなされ,「社会生活」の経験的現実における「非合理－合理」の流動的相互移行関係が，主題として取り出され，① 「同種の大量行為」 から ② 「無秩序なゲマインシャフト行為」 と ③ 「諒解行為（というゲマインシャフト行為）」をへて ④ 「ゲゼルシャフト行為（というゲマインシャフト行為）」にいたる「ゲマインシャフト行為（＝社会的行為）ないし秩序の『合理化』にかんする四階梯尺度」が,（「カテゴリー論文」で）

導き出されて，これが「旧稿」における体系的内容構成の礎石／道標／羅針盤とされていること，など.

B.2.2 予備学および補助学としての社会学

また，ヴェーバー社会学の「予備学および補助学」としての性格については，以下のように説明されている（[18, pp. 9–14]）.

ヴェーバーの学問構想

「客観性論文」では，かれの学問構想ないし「社会科学」の研究手順が，I 予備学，II 特性把握，III 因果帰属，IV 未来予知，の四階梯に分けて示されている．このうち，本番の階梯 II で把握されるべき研究対象の「特性（Eigenart）」とは，当の対象の無限に多様な諸特性のなかから，研究者の「価値理念（Wertideen）」に照らして「知るに値する（wissenwert）」として選び出されるものである．したがって，それは，一面，そうなしうる研究主体の個性を前提とし，その相関項であるともいえる．さればこそ，この特性把握は,「自然科学」（対象の個性は捨象し，対象をもっぱら「反復するもの」「一般的なもの」の例示・標本として捉える「法則科学」）とは峻別して,「文化科学（Kulturwissenschaft）」と規定される．ここまでは，従来もおおかた字義どおりに認められ，論じられてきたとおりである.

しかし，その「文化科学」も科学である以上,「文化科学」的特性把握といえども,「あまりに個性的な」研究者の独話論的，ましてや独善的な，臆見の表明であってはならない．それは,「価値理念」を異にする他者にも，それはそれとして，理解され，確認される体のものでなければならない．いいかえれば，他の異質な研究者ないし読者との対話ないし論争のコンテクストにおいて，その経験的妥当性を問われ，争われ，認証されるような，その意味における「客観性」をそなえた論証にまで，鍛えあげなければならない.

比較という方法 — 事例による解説

そうした客観的特性把握に到達する方法こそ，類例の比較にほかならない．ヴェーバーが 1914 年に歴史家フォン・ベロウと対話していうには,「中世都市に特有なもの，したがってまさに歴史がわれわれに提示すべきもの」は,「他の（古典古代，中国，イスラムの）都市には欠けていたものを確証することによってのみ，展開することができる」．そのうえで，その「中世都市に特有なものを,〔なぜそうなって，他とはならなかったのか，と〕因果的に説明することが，まさに歴史の課題」である．そして，そのように因果帰属されるべき特性の客観的

把握にたいして,「わたしの解する社会学（die Soziologie, wie ich sie verstehe）」が,「きわめてささやかな予備研究を提供することができる」というのである．

というのも，およそ比較には,「何について比較するか」という一義的な観点が必要である．そして，比較の観点とは，比較されるべき諸対象の「類概念（Gattungsbegriff）」にほかならない．「中世都市」を「古代都市」「中国の都市」「イスラムの都市」と比較するには，その前提ないし基礎として，それらがまさに「都市」であること，都市の「類概念」に該当する社会現象であることを，突き止めていかなければならない．そのうえで,「中世都市」に属する対象群が他とは異なって「類型的 typisch （典型的）」に示す傾向を「思考のうえで極限にまで煮詰めて」,「類的理念型（gattungsmässiger Idealtypus）」を構成し，これを経験的データによって客観的に検証しつつ，III 因果帰属に移るのである．

予備学としての社会学

ヴェーバーは，こうした「比較による客観的特性把握」を,「中世都市」のみではなく,「『近代文化』総体の特性と起源」という包括的なテーマ設定にしたがい，当の「近代文化」を構成する「キリスト教」・「資本主義」・「法国家」など，主要な要素のすべてについて企てる．とすると，歴史を貫いて存立してきた人間の社会生活・協働生活を,「人間諸個人の意味をそなえた行為」という「究極要因」にまで分析し，そこを起点に,「宗教的行為」「経済的行為」「政治的行為」といった諸行為領域への分節化と領域ごとの「ゲマインシャフト形成（Vergemeinschaftungen）」「秩序形成」を展望しながら，まずはそれぞれの「類概念」を規定し，つぎにはこれを基礎とする比較によって,「キリスト教」「資本主義」「法国家」の特性を，順次「類的理念型」を構成して捉えていくことになろう．そのようにして,「近代文化」総体の II 特性把握と III 因果帰属という「現実科学」的／「歴史科学」的本研究に，欠くことのできない「類概念」「類的理念型」群を提供する I「基礎的予備学」が,「彼の解する社会学」である．

補助学としての社会学

さらに，彼の社会学は，特性把握につづく III 因果帰属 — すなわち，個性的な「原因」と個性的な「結果」との関係について，かりに前者がなかったとしたなら，後者は生起しえたろうか，との「思考実験」を企て,「人間が通例，所与の状況にいかに反応するか」にかんする「法則的知識」に照らして，その個性的「因果」関係の「合法則性」＝「適合性」を検証する「客観的可能性判断」— にたいしても，当の「法則的知識」を「決疑論」に編成・整備してすばやく提供する「法則科学」的「補助学」として，必携の「道具箱」として，構想されている．なるほど,「法則科学」といっても，なんであれ「反復するもの」をもっぱらそれゆえに取り込んで「法則」として定式化する（かれが当時そう解していた）「自然科学」ではない．「価値理念」にしたがって選定され，比較によって客観的に捉え返される「特性」の,「現実科学」的／「歴史科学」的な因

果帰属に必要なかぎりで，その意味で第二次的には「価値理念」の制約に服して整除される，いわゆる「文化科学」的「法則科学」である．

総　括

ヴェーバーが社会学を「類型と法則にかんする学」と規定するとき，念頭にあるのは，かれの学問構想全体のなかで，以上のように限定的に意味づけられた「基礎的予備学／補助学」である．したがって，それは当然,「現実科学」的／「歴史科学」的本研究を予想し，それに活かされて初めて,「予備学」「補助学」としての意義をまっとうするであろう．

ところが，生身のヴェーバー自身は，この「基礎的予備学」への迂回の途上で急逝し,「近代文化総体の特性把握と因果帰属」という包括的テーマについて四階梯を踏破しようとする雄大な研究プランを，総体として実現できなかったばかりか，社会学というその一環＝基礎的予備学／補助学にかぎっても,（たまたま死期に執筆していて「白鳥の歌」と見紛われやすい）『経済と社会』「改訂稿」と，改訂の素材とされた「旧稿」というふたつの未定稿を遺すだけとなった．

C　その他の資料

C.1　クラインの『エアランゲン・アントリッツレーデ』抜粋

フェッリクス・クラインのエアランゲン大学就任講演の手稿[75]から，本稿に関係する「数学の応用」についての件を抜粋した．

なお，以下の抜粋において，各段落の冒頭に付した数字は，何番目の段落かを示している．これは，[10] に掲載した仮訳における便宜のためのものであって，手稿にはない．

〔10〕 この場で私が数学の応用[76]と言うとき，あまり通常の意味合いでの応用のことを考えてはいません．自分の専門分野が有益であり重要であることを示すために，学問的な見解の何がしかを他のいろいろな分野の面前へ引き出してみせる，といった意味での応用のことは，ということです．その種の例としまして，数学に関係するものに限って申せば，天文学の予報計算を挙げる者もいるでしょうし，測地学的な測量の精密さを賞賛する者も，工学技術での業績を称える者もいるでしょう．今挙げたような応用について，さらに何か申し上げるつもりは，毛頭ありません．確かに，一般的な人間の生活といった面から申せば，そのような応用は，それを可能とした成果に鑑みて，最も高度で広

[75] 詳細は，文献 [10] を参照されたい．
[76] Anwendung

範な意義をもっていることでしょう．しかしそれは，私が本日の話で考察を進める上で意図してはいないのです．

〔11〕「応用」という言葉で私が考えますのは，数学が他の諸科学の発展において果たす，もっと理論的な役割のことです．つまり，数学の勉学がもつ形式陶冶的価値，について考えているのです．この点について，少々お時間を頂き，具体例をあげて，詳しく説明させて頂きたいと思います．取りあげますのは，私自身の受けた教育からとりわけ近しく感じられる，**物理学**への数学的概念の応用であります．同様な考察は，私の知る限り，数学の応用というもの全般に，そして，とりわけ自然科学への応用について，当てはまるものです．

〔12〕「数理物理学」という言葉は，日常会話で様々な使い方をしているので，混同を起こし易い言葉であります．この言葉は，字義通りには，数学的な思考過程を意識的に用いる物理的な考察を意味しますが，今日では，慣習としてもっぱら，最も広く数学的手法を用いる専門化された物理的考察のことを指しています．様々な分野がありますが，多くの場合，アプリオリな仮定[77]に基づいて演繹されたあらゆる種類の現象を，実験的に確かめることに成功しています．その中に含まれている著名な実例として，**光の理論**を思い起こしてみましょう．これは，光学現象の本質を，弾性体の性質を持つ媒体の振動を当てはめることによって説明するものです．それでは，**分子の理論**はいかがでしょう．物体の挙動の根本的な原因を，その物体を星団のように互いに力を及ぼし合う質点の集団とみなすことに見出したのです．

〔13〕ところで，物理的な研究の中には，同じように数理物理学の名前を冠されはするものの，別な方向性を持つものがあります．一連の経験的な命題[78]を提示し，そこに数学を用いることで，さらなる結果を引き出すといったふうなものです．いわゆる幾何光学などが，こうした研究に含まれます．この分野は，光線の概念と観察から得た反射および屈折の法則から始まり，任意に曲がった鏡や任意形状のレンズの理論へと展開されることになります．こちらの側には，熱伝導の理論やポテンシャル論などが含まれます．

〔14〕けれど，ここでは詳細に立ち入るつもりはございません．単に，こうした研究分野において数学が引き受けている役割を指摘しておきたいだけなのです．この役割は，常に同じです．その為すべきことは，厳密に定式化された基礎から，さらなる結論[79]を引き出すということだけなのです．数学的な立場からは，この基礎というものが，仮設であるのか観測された事実であるのかは，どちらでもよいことなのです．ということは，引き出された結論に現実と一致しないことがあったとしても，それは数学の責任ではありません．一致した場合に功績を認められるのが数学ではないのと，まったく同じことです．いずれの場合も，結果は仮定が正しいか正しくないかに拠るのであって，その正しさを決めることは数学の関心事ではないのです．

[77]Annahme

[78]Sätz

[79]Schluss

〔15〕 こうした場合や，さらに一般的な場合に，数学研究の果たす役割は，単に，**厳密に**与えられた仮定から結論を粛々と引き出すことなのです．数学の本質が公式にあると考えるべきではありません．公式というものは，観念の結合を厳密に記号化したものにすぎないのです．確かに，式の形に表現することが，数学において，ある意味で本質的な役割を果たすということは否定できません．と言いますのも，数学が装いとしている形式であることそのものの純粋科学性が，もう一度さかのぼって多様な示唆を与えてくれることになるのです．しかし，時が過ぎ，背景の思想が忘れ去られ，公式が独裁者と化しますと，数学の仕事としては，計算が容易に出来る限りですが，終わりを告げたものと見なされて参りました．今はそのようなことはありません．我々は，公式が発達していく様を内側から理解したいと望んでいますし，数学的な結果というものは，最初から最後まで自明であると見なせる場合にのみ，完全であると考えられています．

〔16〕 この観点に立てば，数理物理学は，あくまで数学的な側面に注目する限りということですが，幾何学とそうは違わないということになります．そこでは，抽象的な数学的思考を，感覚的[80]（直観的[81]といった方が良いかもしれません）な領域に適用するわけです．もちろん，数理物理学の方が空間研究より大きな多様性を示しているのは確かなことですが．いずれの場合も，まず手始めに，研究全体の基礎となるいくつかの命題を提示いたします．前者の場合，この仮設のことを法則と呼び，後者の場合は公理と呼びます．数学的にどう展開するかということに限りますと，こうした命題がどのようにして得られたか，つまり実験によるのか，直接的な直観によるのかといったことは，重要ではありません．数学者の仕事は，単に，こうした命題から従う結論を追い求めることだけなのです．仮に，このようにして得られた新しい真理が感覚的直観の領域に戻って適用されたとしましても，はっきり申せば，それはやはり数学の仕事ではないのです．今申し上げたことは，数学の研究は，いずれかの時点で，感覚的直観から切り離されなければならないということだなどと，お受け取りにならないように願います．むしろこの両者は，いわゆる純粋幾何学がその良い例を与えてくれますように，互いに手を携えて進んでいくものなのです．

〔17〕 これは申し上げておくべきだと思いますが，数学自身にとって，直観的な学問分野とのこうした結びつきは，最高に重要なものなのです．数学の基本的な進展のうち，前世紀になされたものの大部分は，そうした学問分野のひとつである天文学からの要請によるものですし，今世紀の場合は，数理物理学と幾何学が同様な役を演じております．こうした要請に導かれた数学の研究は，最初，一定の流れに沿って進んでいきますが，そのうちに，問題を解決するための直接的な必要性を越えることになり，ついには純粋数学のひとつの分科として展開されることになります．そうなりますと，あまり適切とは言えないのですが，元の名前に応用の文字が冠されることになるわけです．数理物理

[80]sinnlich

[81]anschaulich

学の研究と称するものの多くは，実際には，物理学の要素からなる純粋数学の研究であり，生き生きとした感覚的な見解は消え失せてしまっています．そのような研究は，別の範疇に置いた方がよりふさわしいことでしょう．その範疇とは，物理学の要請から生まれ，物理学の用語を使うほうがふさわしい，数学の一分科としての，物理数学[82]です．

C.2　イェルムスレウの“ mening ”について

フェルデナン・ソシュールは,「言語」の本質を探究するなかで「記号機能」という概念を析出し，その説明のために「pansée と idée」という二つの面の相関について言及した．ソシュールの後継者を認じるデンマークの言語学者ルイ・イェルムスレウは，ソシュールのこのアイデアを深めることで，言語の本質に横たわる「原意（mening)」という概念を取り出した．

本節では，この「原意」の説明を，イェルムスレウの主著『言語理論の確立をめぐって』から，以下に引用しておく（[7, 英語訳 , 日本語訳　pp.60 – 62]）．

> ソシュールは記号機能を明確にするために，記号機能のことは考慮しないで，表現と内容をそれぞれ別々に観察してみようという巧妙な方策をあえて試み，次のような結果に到達する．
>
> > 「思想[83]をそれ自身の姿で取り出してみると，それは星雲のようなものであって，そこでは必然的に区画を定められているものはなにもない．まえもって確立されている観念[84]は存在しない．また，言語が現われ出るのに先立って，はっきりと区別のつくものは何もない．……音の実質の方が〔思想〕よりもっと固定しているということもないし，またもっと堅固であるということもない．それは思想がかならずその形を持たなければならない鋳型ではなく，造形材料であって，これもまたはっきりと区別のつく部分に分割され，思想が必要とする意味表現を供給するのである．したがってわれわれは …… 言語を …… 混沌とした観念の不確定な面と …… 同時にまた音のこれに劣らず不定な面 …… との両方の上に引かれた，一連の相隣接する下位区分として表わすことができる．…… 言語は二つの無定形な塊の間に組織されながら，その単位を作り上げていく …… この結合は形態を産み出すのであって，実質を生み出すのではない[85]．

[82]physicalischen Mathematik
[83]pansée
[84]idée
[85][22, pp.155 —157]

しかし，この分かりやすく説明された思考実験も，それがどれほど見事に実施されたものであっても，それは実際問題としては無意味である．そしてソシュール自身もまた，そういう意見をもったはずである．不必要な公準を避ける科学には,「内容実質」つまり思想，あるいは「表現実質」つまり音連鎖は，時間あるいは階層の順序な中で，言語に先行するものであると想定する根拠も，あるいはこの逆である想定する根拠もまったく見出されない．もしソシュールの用語をそのまま使うことにする場合には，次のような点，つまり実質はもっぱら形態の恩恵を受けて生きているのであって，どんな意味であるにしろ，独立した存在を持っているとはいえない，それほど実質は形態に依存しているのであるということ，この点を — まさにソシュールが前提としているところからも — はっきりと理解しておく必要がある．

反対にいろいろな言語を比較して，それによってこれらに共通する要因，しかもどれほど多くの言語が比較の対象として引合いに出されようとも，やはりそのすべての言語に共通であることに変わりない要因を抽出し，取り出す実験，こういう実験は正当なものであるように思われる．記号機能とこれから演繹できるすべての機能を含む構造原理，これは原理としてはもちろんすべての言語に共通するものであるが，しかしそれがどのように実践に移されるかは，それぞれの言語ごとに独特な形をとるが，こういう構造原理そのものを除けば，この要因は，言語の構造原理と，言語相互の間に差異を生じさせるあらゆる要因とに機能をもつことによって，はじめて定義される占在体[86]ということになるであろう．こうした共通の要因を，われわれは原意（*mening*）[87]と呼ぶことができる．

[86]イェルムスレウは，共示による誤解を避けるため，意図的に独特な術語を使用する．ちなみに,「占在体（størrelse, entity）とは，機能（funktion, function）ではない機能素（funktiv, functive)」のことであり,「機能とは分割をするための条件を満足させる係わり関係」,「機能素とはほかの対象に対して機能を持つ対象」と等々と“ 定義 ”される.（詳しくは，文献 [7]）を参照されたい.）

[87]mening はデンマーク語．英語では purport, 独語では Sinn，仏語では sens と訳される．