フェッリクス・クラインと教員養成

— 教育数学の先駆 —

蟹 江 幸 博 *

目次

* 三重大学名誉教授

1　クラインの教員養成

1.1　クラインと現在

数学の教育におけるフェッリクス・クラインの貢献は，現在も，さまざまな局面で広がりを見せている．例えば，2016年にハンブルクで開催された第13回の *International Congress on Mathematics Education* (ICME-13, Hamburg 2016) では，ICMI(*International Commission on Mathematics Instruction*) の初代会長であったフェリックス・クラインに照明をあて，二つの催しが企画された．ひとつは，“ *The Legacy of Felix Klein*”をテーマとする“Thematic Afternoon”であり，他方は，クラインの数学教育関係の主著である“*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*（高い立場から見た基礎数学[1]）”全3巻の英語新訳（[5]）の出版の提唱である[2]．

ICME-13における前者の催しについては，最近，講演をもとにした論文集“ *The Legacy of Felix Klein*”が出版された（[6]）．また,『高い立場から見た基礎数学』に関しては，2008年に，IMUとICMIが共同で採択した“ Klein Project ”がある[3]．

論文集“ *The Legacy of Felix Klein*”（[6]）の最初の章には，Renate Tobiesによるクラインの短い評伝がおさめられており，その表題は“ Felix Klein — Mathematician, Academic Organizer, Educational Reformer ”となっている．この三種が，クラインの生涯の三つの

[1]この著作の日本語訳名は,『高い立場から見た初等数学』が広く用いられている．ただ，“Elementar ”の意味については様々な議論がある.（例えば，[5] の新英語訳の訳者序を参照のこと.）そうした議論も踏まえ，本稿では，“ Elementarmathematik ”を“ 初等数学 ”ではなく“ 基礎数学 ”と訳すことにした．

[2]最初の二巻の英語訳はすでに存在してるが，その訳も， スペイン語，ロシア語，そして日本語の翻訳も，第III巻を含んでいない.（最近のI，II巻のポルトガル語への翻訳は，III巻まで延長されるかもしれないという.）なお，全三巻の完全な翻訳としては，中国語訳が存在している．

[3]“ Klein Project ” の宣言の日本語版を引用しておこう.（詳細は，“ Klein Project ” でネット検索されたい.）

「IMU (International mathematical Union) とICMI (International Commission on mathematical Instruction) は“ Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint ” の著者であるFelix Kleinが，その本を通して目指したものを改めて推進して行く事を２００８年に採択しました．このプロジェクトの目指すものは，学問としての数学の幅広さと有用性 を説き，それを高等学校数学教育の次元に反映させていく事の重要性と価値をうたった書籍を，高等学校数学教師向けに出版することです．

このプロジェクトに携わるInternational Design Teamは今日の迅速に移り変わる世界状況の中で，確実にその数を増しつつある数学を基盤とした新分野を，現場の高校教師が，自信を持って生徒に紹介する手助けと なる３００頁から成る書籍の編纂に同意しました．このプロジェクトは，書籍だけでなくウェブサイト，小冊子，DVD等の作成も含み，その達成に当たっては ４年を見積もっています．

この書籍は特定の分野を網羅し定義づけるものではなく，その意図するものは， コンピュータが私達の生活に及ぼした影響など， 各分野またはそれより派生する分野と，日常に語られる話題の関連性を浮き彫りにする事です．数学教育の側からの視点を特別に取り上げる事はありませんが， その繋がりは必然的に感じられるものと考えます．

International Design Teamは，数学を基盤にした科学関係の分野に従事されている方々，研究，教育に携わっている方々よりの提言を歓迎致します．書面での提言に加え，世界各地で予定 されているKlein conferenceを通じて，草案や題材へのフィードバックまたは投稿への意思表示が可能です．この書籍の執筆は，それぞれの分野で実践活動や著作活動 の実績を認められている方々にお願いすることになるでしょう.」

側面を代表しているといった趣旨であろう．以下，本章では，この三つの側面のそれぞれを概観しながら，クラインにとっての教員養成の意味について考えてみよう．

1.2　Mathematician としてのクライン

ここでは，まず，数学者としてのクラインについて，岩波数学辞典（第 4 版）の記事を引用することで，簡単に振り返っておこう．

> 〔クラインは〕19 世紀後半のドイツにおける指導的数学者の 1 人．デュッセルドルフに生まれ，1866 年ボン大学卒業．プリュッカーの指導を受けて学位を取得した．1872 年エルランゲン，1880 年ライプチヒ，1886 年ゲッティンゲンの大学教授となり，終生この職にあった．業績は数学の各部門にわたるが，本質的には幾何学者であった．1882 年の著作“代数関数とその積分に関するリーマンの理論”では複素関数論を幾何学的様式で論じ，後の複素多様体論への道を開いた．リーとジョルダンに群論を学び，エルランゲン大学就任講演のために企画された論文において，当時知られていた幾何学の各分野に群論の立場から鳥瞰図エルランゲンの目録を与えた．ユークリッド幾何学，非ユークリッド幾何学はともに射影幾何学に‘従属’する幾何学であることもこの‘目録’に含まれる．数学的業績として最も力を注いだのは保型関数の研究であった．数学雑誌“Mathematisches Annalen”を刊行し，晩年はドイツにおける数学教育改革運動を指導した．

なお，上記記事の最後の文では，クラインが「数学教育改造運動を指導」したのは“晩年”と述べられている．これは,「数学教育改造運動」を狭義に取れば間違いではないが,クラインの数学の教育への関心と貢献は若い頃からであって，そのことは，1872 年のエアランゲン大学の教授就任に際しての講演を見ればよくわかる．なお，このとき，大学に提出した研究プログラムがいわゆる“エルランゲンの目録”であって，上記の引用の説明は不正確である．この“エアランゲン就任講演”については，例えば，拙稿 [2] を参照されたい．

1.3　Academic Organizer としてのクライン

1.3.1　クラインの時代

Academic Organizer としてのクラインが生きた時代について，主として文献 [7] に拠りながら，概観してみよう．[7] に拠ると，

19 世紀後半のドイツは国民経済の形成，統一国家の形成，法治国家実現の時代であり，大学制度も中世以来の公法上の自治団体特権，各大学の伝統に基づく独自な制度，学部教授会・大学評議員会による閉鎖的な意思決定制度などを領邦を越えて一般化・同一化していく．1871 年のドイツ帝国憲法によってドイツに統一国家が実現したが，連邦主義をとっており，軍事，外交，通商，郵便，交通などを連邦政府専断事項とする一方，文化・教育は領邦専断事項としている．領邦単位で大学制度と大学政策が存在するのであり，入学資格，試験制度，学位制度，教員雇用制度などに統一性が求められるようになる．また，大学を最高学府と位置づけ，学位発行をできる唯一の機関としてきたのに対し，社会と産業の要望から生まれた商・工業単科専門大学[4] を高等教育制度のなかにどのように位置づけるかの問題が大きくなってくる．さらに，帝国政府の研究・教育・芸術への関わり方が新たに探られてくる．

第二帝政期は，総合大学を唯一の最高学府とする高等教育･研究制度を拡充するとともに制度を補完する大きな手直しが政策的になされた時期である．…… 19 世紀末から 20 世紀初頭は，研究の巨大化，科学競争の国際化とともに学生増，実務教育の強化が始まる時期であり，教育政策 Bildungspolitik（ 1896 年）, 学術政策 Wissenschaftspolitik（ 1900 年）, 対外文化政策 Internationale Kulturpolitik（1910 年）などの表現が登場してくる時期である．([7, p.15])

1.3.2　アルトホーフ体制

先に示したような第二帝政期ドイツの文教政策は差配したのは,「ドイツ大学の啓蒙専制君主」であるとか,「影の文部大臣」,「高等教育のビスマルク」と呼ばれたフリートリヒ・アルトホーフという一人の官僚だった（[9, p.1]）．この時代の学術の体制は，しばしば，彼の名を冠して，アルトホーフ体制と呼ばれる．

アルトホーフによって成し遂げられた結果は，[7, p.17] に拠ると，次のようにまとめられる．

アルトホーフの時代に，プロイセンの大学は，組織を整え，設備・人員を拡充し，目覚しい研究成果を生み出していく．同時に，中世以来の大学自治理念の下で各大学が維持してきた独自の特権と制度を廃し，教授の身分と俸給体系を含めて大学制度を全国的に統一した．現在の大学史研究においてアルトホーフが残した大きな業績分野として，１）大学教員の俸給制度と遺族年金制度，２）

[4] ここで「単科専門大学」と訳されているホーホシューレと大学（ウニヴェルズィテート）との相克の話題は，Academic Organizer としてのクラインにとって重要な関心事のひとつであったのだが，本稿では，紙数の都合で，割愛する．

> 学術図書館制度[5]，３）大学以外の多様な独立研究所設立，４）細分化・専門化に対応した学問領域の組織化，５）大学の大規模研究機関化，などがあげられている．

Academic Organizer としてのクラインの業績は，上のまとめの１）以外のすべての項目に関係する．

1.3.3 アルトホーフとクライン

クラインの役割を，アルトホーフとの関係でいえば,「アルトホーフの構想の，ある領域における先導者であり，一種のモデルの提供者」といったものになっている．

実際，アルトホーフは，

> 各地の大学の地理的条件や優秀な研究者を中核に重点的領域を定め，教員と研究組織を重点的に拡充した．ゲッティンゲン大学は数学と物理学，マールブルク大学は歴史補助科学，古文書学，方言研究（Deutscher Sprachatlas 作成など）および（フランクフルト大学とともに）臨床医学と衛生学，ハレ＝ウィッテンベルク大学は新教神学，ベルリン大学は古典学，歴史学，芸術，ボン大学はオランダ語学と文学，キール大学は北欧語学，ブレスラオ大学はスラブ研究などである．([7, p.18])

これを見ると，科学に基盤をおく技術である工学や科学自体に関する領域はゲッティンゲン大学が拠点であること，そして，つまりは，クラインが全ドイツにおけるその責を担っていたことがわかる．そもそも，クラインは，1880 年のライプツィヒ大学を経て，1886 年の夏学期に向けてゲッティンゲン大学に招聘されるのだが，これは，85 年３月に自らライプツィヒを訪れたアルトホーフの説得によるとされている（[7, p.29]）.

クラインの具体的な業績として，その理念をアルトホーフと共有した（[7, p.29]）という“ 産学協同 ”の体制整備を例にとれば，1898 年２月 28 日に発足したゲッティンゲン応用物理学協会が挙げられる．この協会は，クラインの 1893 年夏のシカゴの万国博視察におけるアメリカの大学や研究所の民間資金による支援体制（カーネギー研究所やロックフェラー財団など）についての見聞に範をとるもので，

> アルトホーフと大学事務局長ヘップナーを名誉会員とし，大学教授からなる学術会員と産業界からの企業会員から構成され，企業会員は入会金と年会費を納

[5] 蔵書を調達順に記録した帳簿方式の蔵書目録を，著者名アルファベット順のカードによるカタログ方式に統一する制度の策定もそのひとつとされる．クラインも，大学図書館の整備には若年から興味をもっており，実際，ゲッティンゲン大学への招聘を受諾する条件が数学教室専用図書室の設置であったという（[7, p.29]）.

付するとともに，プロジェクト毎に企業は資金と設備・機器を寄付する．産業界の著名人が会員となっており，化学業界以外にも電機業界から AEG のラーテナオ，ジーメンス，鉄鋼業界からクルップなどが名を連ねていた．年２回の全体会合が開催され，意見交換がなされ，支援対象について議論し，決定した．協会支援は，政府資金投入を条件としており，対象は１）個々の研究プロジェクト，２）研究所全体，３）教授の講座であり，支援には資金とともに研究機械・器具など企業が無料ないし割引価格での提供も含まれている．企業側の利益は，最新の研究成果についての情報と大学で理論と実験の訓練を受けた人材の養成である（[7, p.30]）

というものであった．この協会は，1911 年に設立されたカイザー・ウィルヘルム協会（現在のマックス・プランク協会の前身）のモデルとされたものである．

もうひとつ，クラインとアルトホーフの協同作業の例として，男性社会であった大学の門戸を女性に開いたことを挙げることもできよう．実際，

シカゴ万国博覧会訪問を計画中の 1893 年，弟子の一人でシカゴで教師をしていたマシュケ Heinrich Maschke がゲッティンゲン大学での講義を聴講することを希望する女学生について〔クラインに〕問い合わせる．大学事務長マイアーは女子学生反対論者であったが，クラインはアルトホーフと相談し，アメリカからの２名ウィンストンとモルトビー，Mary Frances Winston, Margret Maltby，およびイギリスからのクリスホルム，Grace Mmily Chrisholm，が提出した申請は，1893 年 10 月 26 日付けで例外処置として受理され，聴講許可を得た．94 年２月，事務局長マイヤーが退職し，強力な反対者がいなくなる．94 年９月に文化省は大学での女子聴講生を，文化省，科目担当教授，学部の審査を条件に認め，96 年７月 16 日通達は文化省と副学長宛の申請書と科目担当教授の承認で可能とするのであり，さらに，99 年３月 10 日通達で副学長と科目担当教授宛申請書のみとなる．（[7, p.31]）

なお，教授資格の最初の取得者は，周知のように，エミー・ネーターである．

1.4 Educational Reformer としてのクライン

1.4.1 クラインの目指したもの

クラインと数学教育との関係は，前節で述べた文脈で考える必要がある．

クラインが目指したのは，豊富な資源と人的活力を備えたアメリカ合衆国と対抗し得るドイツの科学や工学の振興であり，そのための数学教育の改革であった．つまり，科学や

工学を展開する基礎としての数学を，“すべての”ドイツ人に身につけさせることである[6].

なお，クラインにとっての“科学や工学を展開する基礎となる数学”とは，科学や工学の言葉で営まれる数学そのものであり，出来合いの数学の他領域への応用ではないと考えられる．前者の数学を，拙著 [2] では,「クラインの意味での応用数学」と呼んだ.（詳しくは，[2] を参照されたい.）

クラインの数学教育改革の特徴は，しばしば,“応用志向”,”解析幾何と微分積分の導入[7]”， そのための“「関数的方法」の発明” と言われるが，最初の“応用志向”の“応用”は,“クラインの意味での応用”と理解されるべきであろうと考えている.

1.4.2 上からの改革と下からの改革

自身の目指すものを実現するため，クラインは，当初,「テヒニシェ・ホーホシューレにおける数学課程の基礎的で準備的な部分を，下級の準備的な学校，つまり，中等教育機関へ移行する」という方策を立てたという．実際，当時のクラインの私信には,「テヒニシェ・ホーホシューレにおける数学の準備教育の問題を解決することが，自分の数学教育改造運動の鍵である」という文章が残されていたという[8].

そして，1901 年，この方策を実現に移すため，クラインは，学校教育における数学課程の改革の実施を教育大臣に働きかける．つまり,「上から」の改革を実現しようと試みたことになる．しかし，大臣補佐官[9]から返ってきたのは,「プロイセン当局は，クライン教授の考え方には賛同するが，上からのカリキュラム変更を宣言することは拒否する」旨の通告であった．1902 年 4 月のことである．ただ，この通告には,「選抜された学校で改革を実行するエージェントとして行動できるように訓練された教員を支援することで，下からのカリキュラム変更を組織する」ようにという助言が付されていた[10]．そして，この助言を実行する手段として実施された様々な営みが，ドイツにおける数学教育改造運動と呼ばれることになる.

---

[6]つまり，クラインの目的は，大きくは，普通教育としての数学教育であり，この点，同時期のイギリスのジョン・ペリーや日本の藤澤利喜太郎と軌を一にしている．その背景としては，産業社会への学術政策の適合化についてのゲルナーの見解 [1] が参考になる.

[7]微分積分の導入については，実用志向のホーホシューレにおける数学教育と，形式陶冶を旨とする一般の中等教育における数学教育との乖離に起因する“反数学運動”があった．しかし，脚注 4 で述べたように，本稿ではホーホシューレに関係する話題は割愛する.

[8]背景として，フランスのエコール・ポリテクニク流に基礎教育として数学を重視するホーホシューレの負担軽減（より専門科目に注力できること）と，科学・工学教育の普通化といった趣旨があったと考えられる．さらに，より現実的な理由として，純粋数学に傾斜を強めていた数学教員による数学教育に対するホーホシューレ側の一種の“反数学運動”といった動きがあったこともある．脚注 4 で述べたように，本稿ではホーホシューレに関係する話題を割愛したため，この方策の趣旨がわかりにくくなっていると思うが，これについては，例えば，文献 [8] を参照されたい.

[9]当時，大臣の補佐官をしていたゲッティンゲン大学の政治経済学の教授であり，クラインの友人であった Wilhelm Lexis を通じての交渉だったという（[8, p.187]）.

[10]まさに，アルトホーフ方式である.

1.4.3　クラインの教員養成

こうして，クラインにとっての数学教育の改革は，教育課程の変更という「上からの改革」ではなく,「下からの改革」としての“教員養成”という課題に収斂することになる．ここで，この課題を解決するためにクラインがとった戦略について，簡単に触れておこう．

大臣補佐官の助言に従うことを決意したクラインは，数学教員たちを立ち上がらせることができるような「事態を旋回させる軸となりうる主張[11]」を見つけ出すという戦略を立てる．そして，まずは，当時の数学教育の全般状況の調査検討に入った．これは，数学教育の主として制度的な面からの調査分析である[12].

次いで，クラインは，人類史的な規模での数学発展の流れの分析と，教育との適合性の検討を行う．そして，その成果は，話題別という形式ではあるが,『高い立場から見た基礎数学』([5]) に結実する．第 1 節で述べた通り，現在にも大きな影響を与えている，数学教育に関するクラインの主著ということになる．

次章では，この著作について,“教育数学の先駆”という観点から，あらためて取り上げてみたい．

2　教育数学の先駆としてのクライン

2.1　『高い立場から見た基礎数学』を読む解く

2.1.1　クリティークの書としての『高い立場から見た基礎数学』

古典が常にそうであるように，クラインの『高い立場から見た基礎数学』も，著者の意図を超え，いろいろな読み方が可能だろう．本節では，この著作を“クリティークの書”

[11] クラインの元来の構想では，新しく中等教育に導入されるべき数学教育の核となるのは,「解析幾何，ただし，第一に微分積分法を除けば」であった（[8, p.187]）．改造運動時のクラインの助手であったリーツマンの回想によれば，あの改造運動の成功は「人々が結集できる軸として役に立ち，同時に，解析学を自動的にギムナジウムのカリキュラムに導きいれてしまうような，そういう基本的な理念を見つけ出すことに拠って」おり，クラインの提示した「関数的方法」という理念が,「いきいきとした言葉」として，巧妙で戦略的な装置として働いたのだという（[8, p.188]）．

[12]クラインが，数学教育に関しておこなった調査検討とは，どのような内容であったのか．クラインのゲッティンゲン大学における講義録 ([4] や [5]) から，その研鑽の跡を窺ってみよう．まず，学校種別の調査がある．例えば,『高等教育機関の数学教育に関する講義』([4]) には，当時のドイツの高等教育機関以外 (表題とは異なるが) の諸々の教育機関 — 国民学校 (Die Volksschulen)，男子中等学校低学年部 (Die sechs unteren Klassen der höheren Knabenschulen)，女学校 (Die Mädchenschulen)，商船学校や工業学校といった中等職業学校 (Die mittleren Fachschulen) 等々—の学制，数学の教育課程，教員養成の仕組み等々の概要が述べられている．さらに，大学等の高等教育機関については，十六世紀以降の数学教育の歴史，現行の教育課程に現われる数学の詳細な研究と問題点の分析等々がみられる．同様に，クラインは，イギリス，フランス，イタリア等の外国の教育事情にも通じていた（[5] 第 2 巻）．

と読み解くことにしたい[13].

実際,『高い立場から見た基礎数学』の第1巻冒頭に,

> 我々は，あらゆる算術の基礎，つまり正の整数の計算，から始めよう．ここでは，この講義では常にそうであるように，最初にこうした事どもが学校教育でどう扱われているかを問題にする．つぎに，高い立場から見て，こうした事どもが何を意味するか，という問題に進むことにする．
>
> ここでは，短い示唆を与えるにとどめる．… ただ我々の**クリティーク**を基礎づける材料を提示するのが目的である[14]

と述べられている.（太字による強調は，筆者による.）

ここで,“クリティーク”という言葉で筆者がイメージしていることを簡単に述べておこう.“クリティーク”とは，語源のギリシア語が「分ける」を原義とするように，混沌とした現実的(リアル)な状態を，しかるべき観点から整理（区分け）することを意味する．また，この“観点”は，しばしば，目的-手段関係のような，何らかの関係性を表現するものであり,“クリティーク”することは，そうした関係性の程度や適合性の評価を含むものになっている.

2.1.2 クリティークの観点

クリティークの書としての『高い立場から見た基礎数学』は，二重の目的をもっている.

ひとつは，数学の教員に身につけてほしい“技能”の見本を提供する目的である.（脚注13を参照のこと.）他方は,「人々が結集できる軸として役に立ち，同時に，解析学を自動的にギムナジウムのカリキュラムに導きいれてしまうような，そういう基本的な理念（脚注11)」を提示することである[15].

以下，本節では，この後者の目的を“クリティーク”という手段でどのように実現しているかについて，簡単に考察しておきたい．鍵となるのは，第1巻の第1部と第2部の間に挿入された『数学の発展と数学の一般的な構造について』という小論である.

この小論で，クラインは，数学発展のありかたに二種の型を区別する[16]．日常的な言葉で適切なものが見出せないとして，クラインは，この2種の型を，それぞれ，AとBと呼

[13] エアランゲン・アントリッツレーデにおいて，クラインは,「将来の教師たる者は，自分の専門の上に立って欲しいのです．専攻分野の学識の現状を了解し，将来の発展を把握する力を身につけて欲しいのです」と述べている（[2, pp.37-38]）.『高い立場から見た基礎数学』は，この“力”を具象化したものと思うことが出来るだろう.

[14] 原文：Ich bringe vielmehr nur das Material heran, auf das wir unsere Kritik stützen wollen.

[15] この“理念”は，端的に言うと，以下に出てくる“型B”であり，あるいは，そこから派生した諸々ということになるだろう.

[16] クライン自身は,“型”という言葉を固定的・明示的に使用してはいない．むしろ，用語を固定しないように非常な苦心を重ねている様子が窺える．この点については，本稿の第2.2.4節で検討する.

ぶ.（実は，型Cも登場するが，本稿における論旨を明確にするために，型Cについては触れないことにする.）

この型Aと型Bが，クリティークにおける“観点”に相当することになるのだが，その性格等についての検討は第2.2.4項で行うこととして，本節では，こうした観点を持ち出すことでクラインが実現しようとしているものに焦点をあてる.

2.1.3　A型の教育課程

小論『数学の発展と数学の一般的な構造について』の冒頭部を見てみよう.

クラインは，数学発展に二つの種別があると述べ，その二種A型とB型を「具体的な例でわかって」もらうため,「2つの発展系統の立場から解析学の体系のはじめの数章をどのようにしてつくるか」という設定で，説明を試みる.（結論を先に述べれば，A型は「（当時の）学校や初級の教科書にもっとも広くとられている方法」であり，B型は，クラインが提唱している改革案に相当することになる.）以下に，参考のため，クラインの描写する２つの型の教育課程を引用しておこう.

まず，A型の教育課程（教科書の最初の数章の内容）は，次のようになる（[5, p.83]）.

1. はじめには方程式の形式的理論，すなわち有理整関数の演算法と代数方程式が根号によって解けるような場合の扱いかたがおかれている.

2. ベキとその逆の概念の系統的な研究につづいて，対数が数値計算にひじょうに有用であることが示される.

3. (ここの所までは) 解析的な展開は幾何学と無関係に行なわれているのであるが，ここに至つて幾何から借用するのだが, それは第2種の超越関数，すなわち三角関数の定義が導入される．三角関数のさらに立ち入った理論は，別の項目として新しく構成される.

4. そのあとで「代数解析」がつづくのであるが，それは, もっとも単純な関数の無限級数への展開を教える．一般の二項展開，対数とその逆関数である指数関数, 同時に三角関数も考察される. 同様に，無限級数とその演算に関する一般論もここに属する. 初等超越関数のあいだの驚異的な関係式が登場するのもここであって，とくに有名なのはォイラーの公式である.

   $$e^{ix} = \cos x + i \sin x\ .$$

   こういう関係式はその中に現われる関数が，最初はまったく別の分野で定義されたものであるだけに，一層驚くべきものに思われる.

5. こういう構造にうまくつづくものは，ベキ級数の性質から出発する，ワイエルシュトラスの複素変数関数論である．ただしこれは，学校教育の程度をこえる．

2.1.4 B型の教育課程

次は，クラインが推奨する教育課程である．こちらは，B型になる（[5, p.84]）．

1. もっとも簡単な関数である1変数の多項式と，有理関数のグラフ表示からはじまる．それで得られた曲線が x 軸と交わる点は, 多項式の0点を示す．これから自然に，近似による方程式の数値解法の理論がつづく．

2. 幾何学的な曲線の像が，微分係数と積分の概念の双方にたいする自然で直観的な源を与える．曲線の傾きは前者へ，曲線と x 軸で囲まれた面積は，後者へ導く．

3. 積分の演算 (ことばの本来の意味においては求積の演算) が有理関数と代数関数では，はっきりと行なわれない場合にはいつも, その演算自体が新しい関数を生みだす．そのさい新しい関数は, あくまで自然で統一的な方法で導入される．こうして双曲線の求積は，対数

$$\int_1^x \frac{dt}{t} dt = \log x$$

を定義し，一方円の求積は容易に積分

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin x$$

すなわち逆三角関数に帰着することができる．同じ考えかたのすじ道にそっていくと，新しい種類の高等な関数, とくに楕円関数に至ることはよく知られている．

4. このようにして導入された関数の無限ベキ級数への展開は，いつもきまった1つの原理，すなわちテイラーの定理によって与えられる．

5. この方法をさらに高級な所までおし進めると複素変数の解析関数に関するコーシー＝リーマンの理論がでてくる．その理論は，コーシー＝リーマンの微分方程式とコーシーの積分定理にもとづいてうちたてられている．

2.1.5　型 A と型 B の特徴

具体例の提示の後で，クラインは，型 A と型 B の特徴を，次のようにまとめる（[5, p.84]）．

> 以上の概説の結果を明確にいおうとすれば, つぎのようになる．系統 A は，科学の分科主義的把握にもとづいているといえよう. すなわちそれは，全体を互いに分離されたいくつかの分野に分割し，最小限の手段をつかい，隣接の分野から借りることはできるだけ避けようとする. その理想はそういう各専門分野を，結晶した論理的に閉じた体系につくり上げることである．
>
> 逆に系統 B の支持者は，個々の専門分野の有機的結合と, これら専門分野の相互に及ぼしあう刺激に重点をおく. だからそういう人は，数個の分野をひとつの観点から理解させてくれるような方法を好む. その理想は，数学的科学の全体 [17] をひとつの大きく連関した全体として理解することである．

2.1.6　説得（レトリケー）の論法

上述の特徴の説明の後，クラインは，ひといきに自身の提唱している教育課程案の正当性を主張してみせる．これは，彼の本来の目的である「数学教育改革の必要性を読者（聴衆，数学教員）に納得させる」ためのものと考えられる [18]．すなわち，

> この 2 つの方法のどちらにより多くの生命があり，またどちらがとくに数学的抽象の才に恵まれていない生徒を，ひきつけ得るかは疑う余地はなかろう（[5, p.84]）．

クラインの論法は，いくつかの主張を省略したものになっている．仮に補ってみると,（1）教育課程（方法）には A 型と B 型がある,（2）数学的抽象の才に恵まれている（少数の）生徒と，恵まれていない（多数の）生徒がいる,（3）数学的抽象の才に恵まれていない生徒には B 型の教育課程（方法）が適している，といったふうになるだろうか．さらに補えば，多数の生徒を対象とする普通教育にとっては,（自分が提唱している）B 型の教育課程の方が A 型の旧来の課程より適している，ということになり，第 2.1.2 項で述べた二つ目の目的に資する論議を提供していることになる．

ここに見られるのは，上で補ってみせたような形式的に整った推論ではなく，容易に補える推論部を省略することで，読み手に納得感をより効果的に与えるというレトリカルな論法であろう [19].「疑う余地がない」という言明を受け入れたとき，読者（元来は，聴衆）

---

[17]（第 1.4.1 項で述べた）「クラインの意味での応用数学」を含む “ 数理科学 ” の全体と解すべきだろう．

[18] “ 納得 ” することが，自主的に行動することの前提になるだろう．

[19] この “ レトリカル ” は，その語源である古代ギリシアのレトリケーの意で用いている．また，レトリケーの伝統では，こうした “ 省略された推論 ” によって効果を上げる論法を，エンテュメーマと呼んいる．

は，省略された主張「型 B は一般的な生徒の学習に適してる」を正しい言明として（心理的に）受け入れていることになる．そもそも，この“省略された主張”は，その成立の根拠が（少なくとも，この小論においては）何も示されていない．つまり，実際に認めさせたい主張を“隠す”ことで納得させるという“技法”が採用されているということになる．

こうした論法は，この小論の残りの部分においても使用されている．実際，そこでは，幾何学のユークリッド的構成や オイラーによる無限小解析の予備分野（代数解析）の導入，コーシーによる無限小解析の基礎づけ，ワイエルシュトラスの関数理論等々を型 A の観点から，また，アルキメデスの『方法』（求積と力学の融合）や デカルトの解析幾何（解析と幾何の融合），メルカトールの級数（自然対数と面積と級数）， ニュートン・ライプニッツの無限小解析等々を型 B の観点から記述し，その後，ひといきに，以下のような結論に達する（[5, pp.91-92]）．

> 高等学校の教育では，しかし，すでに示したように，長い間系統 A に一方的に支配されてきた．だから数学教授法の改革をめざすいかなる運動も，B の方向にもっと力を注ぐ必要がある．これに関連して私が考えるのは，発生的教授法を普及させることであり，空間的直観にもっと重点をおくことであり，そういうわけで，とくに空間直観と数的直観の融合のもとに関数概念に優位を与えることである．

教育を，正しいことを教えるのためのものではなく，学ぶ者に教師の言っていることを信じさせるものだとすれば，クラインの使用しているレトリカルな論法自体，教師の身につけるべき技能のひとつということができるかもしれない[20]．

結局のところ，形式論理的に整った論法ではなく，読者や聴衆を“説得”するために効果的な上述のようなレトリカルな技法が，クラインの著作全体で繰り返し使用されているのがわかる．クラインの著書『高い立場から見た基礎数学』は，読者や聴衆に中等教育における数学教育の改革を納得させるという目的に適した論法を使用しているということになる．

もちろん，混沌とした現実からそうした技法を適用する素材自体を“分離”して精製することは，クリティークの主たる作業であるが，レトリケーやその他の論法を使用してさ

なお，言葉（ロゴス）を用いる技法（テクネー）は，アリストテレスによれば，次のような種類に分けられる.（1）ある主張に対して，共同体で共有されている論拠（エンドクサ）を見つけ，そこから推論によって妥当性を示すこと,（2）ある主張を，聴衆（読者）に信じさせること（信（ピスティス）を生じさせること）,（3）ある出来事を，聴衆（読者）の心に再現（ミメーシス）させること，である．これらの技法は，それぞれ，ディアレクティケー（・テクネー），レトリケー（・テクネー），そして，ポイエティケー（・テクネー）と呼ばれる．さらに,（1）の特別な場合として，論拠（エンドクサ）が真にして第一（他から導出されない）のものども（つまり，公理）であるときは，アポイデクシスと呼ばれる．数学の証明は，アポイデクシスの典型とされる．

[20]逍遥学派は,“学ぶ（マンタノー）”ことを,“公理的なものども（アルケー）から筋道を立てて導けること“とした．マテマティケー（数学）の原義がここに存すると思っても良いだろう．

まざまな主張を作り出すことも，我々のいう“ クリティーク ”には，含意されている．

2.2　プラットフォームとしての教育数学

本節では，クラインが我々の考える教育数学の先駆であることを,『高い立場から見た基礎数学』を“ 論議と実践の書 ”として特徴づけることを通じて，説明してみたい．

2.2.1　論議と実践の書としての『高い立場から見た基礎数学』

前節では，クラインの数学教育関係の主著『高い立場から見た基礎数学』が,“ クリティークの書 ”として読み解けることを見た．もちろん，一冊の著書が，ただひとつの観点だけで読み解けるわけではないことは当然である．

例えば,『高い立場から見た基礎数学』は，e と π の超越性の証明や，当時まだ目新しかった集合論の展開等々を含む,“ 数学の実践 ”の書でもある．ただ，あくまで前節で述べたような“ クリティーク ”によって整理された枠組みの中での，数学教員の養成に役立つことを目的とした“ 数学の実践 ”という性格をもっている.（ここでは著者の意図を問題としているのであって，それがどの程度成功しているかは，また別の問題になる.）

ここで,“ 数学の実践 ”と“ クリティーク ”の関係について，ひとこと述べておこう．例えば,『高い立場から見た基礎数学』という成書について見れば，クリティークは実践の前提となっている．しかし，クラインの学術的営為というより広い舞台で見れば,『高い立場から見た基礎数学』の展開を貫く基本的な観点（型 A，B，C）といった“ 理念（Idee）”は，クラインの数学者としての実践を通じて形成されたものだろう.（もちろん，数学者としてのクラインの実践も，その背後に，何がしかの“ 観点（理念）”が存在しているはずである．結局のところ，意識しているかどうかは別にして，理念なしに人は行動することはできないのだから.）

なお，本節では，以下,“ クリティーク ”といわずに，なじみのある“ 論議 ”という言葉を使うことにしたい．

2.2.2　プラットフォームとしての教育数学

教育数学（Educational Mathematics）とは，教育を明確に意識しながら，数学について論じ，実践しようとする営みの総称である．つまり，教育数学は，数学についての（教育を意識しながらの）論議と実践を展開する 場（プラットフォーム） と見なすことができる．

なお，この「論議」は，前節で述べた“ クリティーク ”とほぼ同義であり,「論議と実践」は，前項で述べたような，互いが互いの前提となりながら生成発展していくという意味で,“ 双面性 ”をもつ．

教育数学を，論議を展開する場(プラットフォーム)とみなす[21]とき，その場を“安全”に使用するための共通の約束事が必要だと考えている．この約束事を，我々は，“組織的に論議を行うための規準（regulations of argument）”と呼んでいる[22]．さらに言えば，この“規準”は，

$$\begin{cases}\text{観点型（}Viewpoint\ Type\text{）}\\ \text{論法型（}Reasoning\ Type\text{）}\\ \text{論拠型（}Premise\ Type\text{）}\end{cases}$$

という三つの種類に区分できると考えている[23]．

2.2.3 『高い立場から見た基礎数学』の現代的意味

クラインの『高い立場から見た基礎数学』における“観点”と“論法”の例は，前節で示した．また，第 2.1.1 項で引用した文章に，この著作の目的が「我々のクリティークを基礎づける材料を提示する」とあるように，この著作は，“論拠”の書でもある．

我々にとっての『高い立場から見た基礎数学』の現代的意味は，まずは「論拠の書」という位置づけであるかもしれない．しかし,『高い立場から見た基礎数学』は，観点や論法について意識的であることで，今においても「観点や論法まで含めたクリティークの実践の書」の範として十分に役に立つ．さらに，観点や論法について意識的であることは，本稿で略述したような歴史的背景と併せて，クラインのこの著作の「誤用（不適切な使用）を防ぐ」ためにも，重要なことであろう．

2.2.4 方法論的基礎としての型式と枠式

本稿の最後に，脚注 16 等々で述べた，観点を表わす A や B の“型”としての性格について触れておこう．このような“型”を，共通部分をもたない類(クラス)に付した名称である“類型（class type）”と区別して，“型式（morphic frame）[24]”と呼んでいる．我々は，この

---

[21]「論議と実践」を互いが互いの前提となりながら生成発展していく関係とみなすのが“通時的”な見方であるとするなら，ここで述べているのは，“共時的”な見方である．

[22]教育数学というプラットフォームは，現実には，論議と実践が混沌とした状態で混じり合った場である．この混沌として現実的な場を，“理念的”に「論議の場」と「実践の場」に区分したとき，今，我々に大きく欠如しているのは,「論議の場」を統制する方策であろうと考えている．なお,「論議の場」の統制は，本来,数学との直接の関係は少なく，より一般的な領域で成立するものである．

[23]この“型”は，正確には，次の 2.2.4 項で述べる“型式”に他ならない．なお，この“規準”は，アリストテレスのいう“トポス”（もしくは，その複数形である“トピカ”）に相応するものと考えている．

[24]マックス・ヴェーバーの“理念型（ideal Typus）”と同義である．

型式を，いくつかの型式をひとくくりにした“ 枠式（morphic frame）”と併せて，教育数学を展開していく際の方法論的な基礎と考えている．

それでは，第 2.1.1 節で扱った小論『数学の発展と数学の一般的な構造について』の冒頭部を引用してみよう．

> ひとつの注意から出発することにしよう．それは，現代までの数学の**発展史**には，**2 つの異なった発展の系統**がはっきりと区別できるということであって，それらはある時代には互いに分裂し，ある時代には双方が互いに共存し，またある時代には，この 2 つが互いに混じり合ってきたのである．といってもおなじみの分類法では，どれも事実にあわないのであるから，ここに述べた区別を含蓄のあることばで言い表すことはむずかしい[25]．([5, pp.82-83])

まず，クラインは，数学の発展には区別し得る“ 系統 ”（後に，A，B 等々と名づける）があるが，これは「おなじみの区分ではない」という趣旨の説明をしている．この「おなじみの区分」は，いわゆる“ 類型 ”だと考えることが自然であろう．

実際，A, や B が類型であるなら，例えば，コーシーの『解析教程』は A 型か B 型のいずれかであって，A 型であって同時に B 型ということは考えられない．しかし，この A 型や B 型は,「数学発展の系統として，分裂したり，共存したり，互いに混じり合ったり」するものだという．

さらに，クラインは，A や B が“系統（Entwicklungsreihe ）”の区分だというように固定的に把握されることを嫌うかのように，この小論の残りの部分では， System, Momentes, Form, Schema, Richtung, Denkweise といった言葉に冠する形態で使用している．

以上のような状況を整合的に捉えるため，我々は，ここで，“ 類型 ”ではなく，“ 型式 ”というものを導入する．“ 型式 ”は，大雑把にいうと，混沌とした実質群から，着目したい特徴を切り取って，そうした特徴（の集まり）に名称を付したものである[26]．また，何がしが何々型であるということは，その何がしがその型の特徴を有しているということを意味する.（それ以外の特徴をもっていても構わないのだが，そこには着目していないということになる.）

クラインの A や B が類型ではなく“ 型式 ”だと考えれば，コーシーの『解析教程』が A 型だというときには，A 型の特徴に着目しているということであって，見方によっては，同時に B 型であっても構わないことになる．

---

[25]原文 : Lassen Sie mich von der Bemerkung ausgehen, daß wir *in der Entwicklungsgesichte* der Mathematik bis in die Gegenwart sehr deutlich *zwei verschiedene Entwicklungsreihen* unterscheiden können, die sich bald gegenseitig ablösen, bald gleichzeitig unabhängig nebeneinander herlauhen, bald endlich auch sich wechselseitig duchdringen. Es ist schwer, den Unterschied, den ich hier im Sinne habe, in prägnante Worte zu fassen, da keine der geläugigen Einteilungen recht paßt.

[26]「型式」は，差異のある種の実体化という意味では,「言葉」そのものなのだが，実体としてのレベルに意識的であるために,「型式」という用語を付している．

さらに，いくつかの型式を組にして，関係する領域の総体を（型式の意味で）覆い尽くすように適用可能とし，また，対比性をより明瞭にできるとき，我々は，そうした組を“枠式”と呼んでいる．

例えば，クラインが「ここに述べた区別を含蓄のあることばで言い表すことはむずかしい」と言ってAとかBと仮称しているのは，A型やB型が“要素”的なものではなく，複合的なものであるためだと考えられる．そして，例えばだが，

$$\begin{cases} \text{複合型} \\ \text{単一型} \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} \text{論理型} \\ \text{直観型} \end{cases}$$

といった二組の枠式を導入し，A型は「複合×論理型」であり， B型は「単一×直観型」と規定すると，クラインのイメージしているものがかなりの程度把握できるだろう．同時に，こうした枠式を導入することで，A型とB型では捉えきれない「複合×直観型」や「単一×論理型」といった新たな“観点”を導出することができる [27]．

参考文献

[1] Gellner, E. : *Nations and Nationalism*, Second Edition, Blackwell Publishing, Oxford, (2006) （日本語訳）『民族とナショナリズム』（加藤 節 監訳） 岩波書店，(2000)

[2] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 –』三重大学教育学部紀要， 第60巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[3] 蟹江幸博 『数学の多様性と普遍性 — 教育数学の試み』， 数理解析研究所講究録 2021 巻 （RIMS研究集会『教育数学の一側面 — 高等教育における数学の規格とは — 』報告集）, (2017), 1 - 50.

[4] Klein, F. , Schimmack, R. : *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907). （日本語訳）『独逸に於ける数学教育』（林鶴一，武邊松衛訳） 大日本図書 (訂正再版 1922).

[27] “発想法”としてのトポスの機能に相当する．なお，古代ギリシアを例にとれば，ピュタゴラス的な四科としての数学（マテマティケー）と“比例”によって統一的視点を与えられた数学（マテマティケー）は，対比的に,「複合×直観型」と「単一×論理型」の例と見なすことができる（ [3] を参照）．また，本稿では触れなかったが，クラインの小論に登場するC型の存在は，論理型と直観型からなる枠式に，計算型（もしくは，アルゴリズム型）を組に加えることの有用性を示唆していると思うこともできる．

[5] Klein, F. : *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (3 Bande), B. G. Teubner, Leipzig 1908, 1909, Springer Berlin 1928.

(日本語訳) 遠山啓 監訳：『高い立場からみた初等数学 1–4 』 東京図書 (1959 – 1961)

(英語新訳）Schubring，G., Menghini, M., Baccaglini-Frank, A. (Tr.) : *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint* ：Volume I – III , Springer (2016)

[6] Weigand, H-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M, Gert Schubring, G. (Editors) : “ The Legacy of Felix Klein ” Springer (2018)

[7] 大西健夫 『第二帝政期プロイセンの大学政策 – アルトホーフ体制 – 』 早稲田教育評論, 第 25 巻 第 1 号 (2011), 15 - 38.

[8] Schubring, G. : *Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein*, The History of Modern Mathematics. Volume II: Institutions and Applications eds. David Rowe, John McCleary, Boston: Academic Press, (1989) 171-220.

[9] 潮木守一 『プロイセン文部官僚と教授達 – アルトホーフ体制の現代的意味 – 』 広島大学, 大学教育センター, 大学論集, 第 14 巻 (1985), 1 - 18.