# 数学の多様性と普遍性

## — 教育数学の試み —

三重大学名誉教授　蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)

Professor Emeritus, Mie University

## 目次

# はじめに

筆者が「数学の教育」について本腰を入れて考え始めた頃，何よりも気になったことに，「数学教育」という言葉が，ほぼ，初等中等の学校教育に限定されて用いられているように思えたことがある.「難問を解くには，問題を一般化せよ」というヒルベルトの言葉ではないが，教育も数学も，初等中等教育に限定するのではなく，もっとずっと広い舞台で考えた方が良いのではないだろうか[1]．こうしたことが,「教育数学 (Educational Mathematics)」へと向かう出発点であった．

「教育数学」という言葉には，また,「数学者がその経験を活かして数学の教育に貢献のできるもの」という想いが込められている．これを形にしてみるとき,「教育の場にある数学」という鍵が浮かび上がってきた．数学の授業で教師が説明しているものも学生が学習しているものも，数学書を独習している人が実践しているものも，数学者が数学の教科書に書いているものも,「教育の場にある数学」のひとつの形態と思うことができるし，そうしたほうが良いだろうということである.（教育も数学も，できるだけ広い意味に取るという立場である.）そこで，この「教育の場にある数学」について，そうした「数学」を営んでいる当人たちは，実際のところ，どの程度“教育”というものを意識しているかを考えてみたい[2].

このように考えているうち,「教育数学」というもののイメージが少しずつはっきりとしてきた．つまり,「教育数学」とは，まずは「教育を明確に意識しながら数学を営む」という姿勢であり，そうした姿勢で営まれた「数学」であり，さらには，そういう「数学」が成立するための援けになるあれやこれやを込めたものを意味している[3].

ところで,「教育数学」を考えるにあたって，数学も教育もできるだけ広い範囲で考えるという立場を取るとは述べたが，このことを実行しようとするとなれば — アイデアを言葉にするだけなら簡単なのだが — 数学も教育も人類の歴史と共にあるようなものだから，その広大さの前に途方にくれることになる．数学も教育も，実際上無限かと思えるほどの多様性をもっているわけだが，いろいろ考えていくうち，議論の舞台とするためには，その多様性をもっている領域の全体性を保ったまま，有限個のパターンに切り分けることの大

---

[1]本研究集会の主題である「高等教育における数学の規格」は，そうした問題意識の発露のひとつでもある．

[2]「教えること」を意識している人たちに,「どの程度“数学”ということが意識されているのだろうか」と問うべきことでもあるが.

[3] 営まれた「数学」には，2つの意味がある．生徒が方程式を立てたり解いたりしている，あるいは，教師が授業のためのノートを作ったり教科書を書いたりしている，等々といった「数学的活動」と，そうした活動の結果として，得られた解答とか，出版された教科書であるとかの「数学的成果」とである.「活動」と「成果」に，始まりの「姿勢」を併せて，教育数学の三つの相ということができる.（アリストテレス風に言ってみれば,「姿勢としての教育数学」はデュミナスであり,「数学的活動としての教育数学」はエネルゲイアであり,「数学的成果としての教育数学」はエンテレケイアということになるだろう.）

「教育の場で数学を営む」ことの“援け”については，いろいろなものが考えられるし，今，筆者の念頭にないようなものも入ってくることもあるから，こちらも含めた形で,「教育数学」に別種の区分を与えておくと便利だろうと思っている.「教育の場で数学を営む」ことの“実質”的な側面を「内的教育数学 (Internal Educational Mathematics)」，“形式”的な側面を「外的教育数学 (External Educational Mathematics)」，そして，“援け”である部分を「補助的教育数学 (Auxiliary Educational Mathematics)」とする三区分である.（“実質”と“形式”については，第 4 章を参照のこと.）

切さが分かってきた[4]．さらに，そのためには，そこから有限個のパターンを取り出す多様性の全体領域を，何らかの仕方で統一的に規定する必要があることも，である．

大雑把にいって，前者の作業を "多様性の記述[5]"，後者を "普遍性の把握" と呼んでみたい．本稿は，数学の方に焦点をあて，その多様性の記述と普遍性の把握という主題について，準備的な考察をしてみようという試みである[6]．

# 1 「教えるべき数学」とは何か

「教育数学」へ至る "門" としてはいくつものものが考えられるが，ここでは「教えるべき数学[7]」という "門" を選ぶことにする．そこで，まず本章では,「教えるべき数学」とは何かという問題について考えてみることにする．

## 1.1 「教えるべき数学」と教育観

もちろん,「教えるべき数学」は,「教育をどのようなものと捉えるか」ということに依存する．この「教育の捉え方」を今は端的に「教育観」と呼ぶことにしよう．

例えば,「教育とは，将来の日常生活や職業生活で実際に使用する知識や技能を身につけさせること」という "教育観" の下で,「教えるべき数学」について考えてみる．このとき,「教えるべき数学」は,「将来実際に使用される数学」が適合的とすることになるから，当然，数学が使用されている領域や共同体ごとに異なることになる．教育の目的をこのように「使用のため」とみなすのであれば,「生涯 2 次方程式を使用しない人々」に学校で 2 次方程式を教えることは適切でないということになる．

---

[4]教育数学では,「数学の教育」を，教育観と数学観が交錯する場で成立する人間の実践的営みとして捉える．この「数学の教育」という実践的な営みは，実践の主体である人間が置かれている状況（コンテクスト）を離れては存在しえない．一般に，主体が依っている教育観や数学観と状況が適合的とは限らないわけで，乱暴な言い方ではあるが，適合的なときが「数学の教育の成功」であり，適合的でないときが「数学の教育の失敗」ということができる．教育数学の大切な目的に，既存の「数学の教育」の適合性の評価や判定，状況に適合的な新たな「数学の教育」の設計に役立つせることがある．しかし，その前提として，当の「数学の教育」を規定する教育観や数学観と状況のマッチング（組合せと対照）が必要だろう．ところで，教育観や数学観は，時代や地域，社会や個人ごとにさまざまな現れ方をするものであり，実際上無限といってよいほどの多様性をもつ．したがって，有効性の高いマッチングを行うためには，特定の教育観や数学観を取り出して精密に論じることに先立って，粗くても良いから，全体領域の総体性を担保する標本化が必要になる．このことを，本文では,「多様性をもっている領域の全体性を保ったまま，有限個のパターンに切り分ける」と表現しているのである．

[5] 「多様性の記述」には，二重の意味がある．ひとつは，大雑把に言って，考察の対象となる全領域を覆うような有限個の単位的パターンを見つけること，各々のパターンに名前を付ける（ラベルを貼る）こと，パターンの全体を，あるパターンと他のパターンの関係性がわかるような形状にまとめること（最終的にまとめられたものを,「構造化された一覧」であるとか「構造化された図式」と呼ぶ）である．もう一つは，多様性の個々を，構造に則った有限個の単位的パターンの結合として表示することである．いずれも,「言語」のアナロジーになっていて，前者は「辞書と文法という構造化された一覧」によって「言語を記述する」もの（言語の記述）であり，後者は個々の事象を「言語で記述する」こと（言語による記述）に相当している.（脚注 128 参照.）

[6]教育の方に焦点を当てたものも用意している．もちろん，両者を統合した観点からのものもその後で議論する予定である．

[7]「教えるべき数学」と「学ぶべき数学」は同じなのか異なるのか．異なるのならどう異なるのか,「学ぶべき数学」と「学びたい数学」ではどうかといった問題は，"教育" の観点からみれば，普遍性に関わる捉え方も，多様性に関わる解答の仕方も考えられる興味深い問題ではあるが，本稿で詳述することはしない．

一方で，教育の目的を“直接的な使用”にはおかない立場もある．西欧の古典語教育に淵源すると思われる“形式陶冶”という考え方は，そうした例のひとつであろうし，数学の教育が論理的思考の訓練になるといった考え方も，そうしたものとみることができる．

「教育観」— つまり,「教育」を何と見るかということ — については，大きく，個人型と集団型に分けることができる．個人型の教育観とは,「教育とは，個人としての人間の可能性を発達させることである」といったもので，上に挙げた「将来の使用のため」や「形式陶冶」はこちらの側のものだろう．

一方，“共同体”の存在を前提とし，個々の人間を共同体の構成員とみなす立場からは,「教育とは共同体の構成員の生産手段である」といった捉え方が出てくる.「集団型の教育観」はそういうものである．集団型の教育観は，大きく,「(定常的な）共同体の再生産の手段」と「共同体の変革の手段」という二つの型に区分することができる．

「教育」を,「共同体の再生産の道具」と見る立場の特別な場合として,「共同体への構成員の帰属意識の形成の道具」とみなすこともできる．こうした教育観の下では，直接的な使用にも，別種の訓練とも関係せず,「共同体の構成員として相応しい教育を受けた」という事実が重要であり，習得自体は必要でないという立場もありうる．極端に言えば,「卒業してしまえば何も覚えていない」状況でも構わないということになる．古典期ローマ社会における教養（アルテス・リベラレス)，特に，そのうちの“数学”分野である「四科（クァドリヴィウム)」などは，こうした教育観で捉える方が適当なのかもしれない [8]．

もちろん，上述の各種の教育観はいわば要素的なものであり，現実の教育制度の設計は，通常，もっと複合的な「教育観」に基づいてなされるだろうし，そのはずである．しかし，そうした「複合的な教育観」の下で「教えるべき数学」について考察したいのであれば，まず，要素的な教育観の下での適合性の検討から始める必要があるだろう．

## 1.2 「教えるべき数学」と数学観

「教えるべき数学」を規定するものとしては，教育観だけでなく，数学観 — 数学をどういうものと見なすか — も関係する．前節の最後に挙げたラテン語系世界の“数学”の例として,「四科 (quadrivium)」を取り上げてみよう．

「四科」とは,「数論 (arithmetica)」,「音楽 (musica)」,「幾何 (geometria)」,「天文 (astronomia)」という四種の学科目という意味である [9].「四科」とは，単に四つの学科目を併せたものというだけではなく，“ひとつの学”の四種の分科という意味をもつことがある．この“ひとつの学”は，しばしば,「量の厳密学 (scientia quantitatis) 」と呼ばれる．つまり，

[8] 歴史家の南川高志によれば，ローマ帝国を“実質化”していたものは，部族や民族への帰属ではなく,「ローマ人である」という自己意識をもつことにあったという．この“帝国実質化”の要素は,「ラテン語を話し，ローマ人の衣装を身につけ，ローマの神々を崇拝し，イタリア風の生活様式を実践すること」であり，さらに,「もし人々がエリートたろうと思えば，ローマ人の教養学科を学ぶ必要もあった」とされる（[27, pp.37 – 39])．

[9] 「四科 (quadrivium)」という言葉自体は,『数論教程 (De Institutione Arithmetica)』において，著者のボエティウスによって造語されたものとされる.（初期の写本では，quadruvium と綴られていたという.）この著作は，新プラトン主義者とされるゲラサのニコマコスが著した『数論入門（アリトメティケー・エイサゴーゲー)』のラテン語による翻案である．なお，ギリシア語系数学における“四科”については，第 2.2.2 項でも扱う．

数学が「四科」であるという見方の背後には，数学を「量を対象とする学」として規定する，ひとつの “数学観” が存在していることになる [10].

なお,「量の厳密学」の分科として「四科」を類別することは，次のような特徴づけによってなされる.「量」は，離散的 (discreta) か連続的 (continua) かによってムルティトゥード (multitudo) とマグニトゥード (magnitudo) に区分され，さらに，ムルティトゥードは，それ自身においてか，他との関係においてであるかによって，また，マグニトゥードは，非動的 (inmobilis) か動的 (mobilis) かによって分別され，計四種になる [11]．こうして，離散的でそれ自身においてある量に関する学としての「数論」，離散的で他との関係においてある量の学である「音楽」，連続的で非動的な量に関する「幾何」，そして，連続的で動的な量についての「天文」という，四種の分科の学の特徴づけが与えられることになる.

「教えるべき数学」を「四科」とすることは，教育観だけから決まったわけではない．例えば，数学の学科目とみなされた様々な営み [12] から，数論・音楽・幾何・天文の四つの学科目を選んだプラトン主義者たちは,「生成消滅を繰り返す現象的なものの背後にある実体的なもの」へと “魂を向け変え” させる哲学者としての基礎訓練を求めていて,「四科」の対象はそうした実体的なものと相似形であるという “数学観” から，自分たちの目的に適合的だということで,「教えるべき数学」に「四科」を選んだのだろう [13].

しかし,「四科」を「教えるべき数学」として選択することは，プラトン主義的な数学観や教育観だけから規定されるわけではない．ヘレニズム期のエンキュクリオス・パイデイア [14] やその後継であるアルテス・リベラレスにおいて,「四科」は，全き人の養成という教育観の下で,「言葉」に関する三科 (trivium) と組となるものとして採用されたものである [15]. また，中世から近世にかけての西欧の高等教育において,「四科」（というより,「三科」と併せたいわゆる “自由七科 (septem artes liberales)”）を規定するものとしては，神学・法学・医学といった “専門職” のための基礎課程という教育観が支配的になる [16].

ただ，いずれの教育観の下で選ばれたものであっても,「四科」の学習順序が，数論から音楽への系列と，幾何から天文への系列に分かれること，さらに，この二つの系列は独立

---

[10] ここには，皮相的なものではあるが,「数学は，いくつかの “分科” の集まりである」という “数学観” を見出すこともできる.（第 2.3.1 項を参照のこと.）しかし，歴史的に見れば，この「数学は複数の学科目の総称である」という数学観は,「代数」や「幾何」,「解析」等々の科目からなる教育課程をもつ今の我々までも拘束し続けているのかもしれない.

[11] ボエティウスの著書の該当する部分を引用すると，次のようになっている；Horum ergo illam multitudinem, quae per se est, arithmetica speculatur integris, illam vero, quae ad aliquid, musici modulaminis temperamenta pernoscunt, inmobilis vero magnitudinis geometria notitiam pollicetur, moblis vero scientiam astronomicae disciplinae peritia vendicat.（[5, p.9]）

[12] 古代ギリシアの社会で “数学的” とみなされたまとまりをもつ営みの名称としてアリトメティケー（数論），ゲオメトリア（幾何），メカニケー（機械学），アストロノミケー（天文），オプティケー（光学），ゲオダイシア（測地学），ムシケー（音楽） — カノニケーやハルモニアともいう —，ロギスティケー（計算学）等々が知られている．本稿の 2.2.3.2 項を参照のこと.

[13] 例えば，[14] を参照のこと.

[14] エンキュクリオス・パイデイアについては，例えば [14] を参照のこと.

[15] この系譜については，プラトン的な哲学者の基礎訓練というより，イソクラテス的な修辞家養成の伝統に拠るものが大きい．例えば，[14] を参照のこと.

[16] いずれにしても，ヘレニズム期に成立した “四科” という数学観は，時間的にはおおよそ二千年にわたり，空間的にはギリシア・ラテン世界のみならずイスラム世界にまで広がりをもつものであって，歴史学的な精密さをもって記述することは容易ではなく，本章で述べているのがその粗描にすぎないのはもちろんである.

であったようである[17]．これは，“数学観” の規定によるものであって，いわば，学習順序がいかにあるべきかという「教育観」を「数学観」が規定しているとみることもできる．

結局のところ,「教えるべき数学」は，種々の教育観と多様な数学観が交錯する領域ごとにその形姿が顕らかになるということだろう．それでは，こうした「教えるべき数学」の多様性に，我々は，どう向き合えば良いのだろうか.

### 1.3 多様性の記述と普遍性の把握

このように見ては来たが，数学の教育は，人間の実践的な営みとして捉えねばならない．つまり,「教えるべき数学」が何かと問うことも，実践的な答えを必要とする実践的な問題として捉えるべきだと考える[18]．前節では,「教えるべき数学」が，教育観と数学観に規定される多様性をもつことを見てきたが，それでは，この「教えるべき数学」の多様性に対し実践的に向かい合うことのためには，何をすれば良いのだろうか.

「数学観」なり「教育観」といった「選択すべき諸対象」を，ある範囲で一覧できるような形で把握することもひとつの答えであるだろう．素朴な例を挙げれば，前節で取り上げた「四科」は，多様な数学というものを,「数論」,「音楽」,「幾何」,「天文」という四つの要素（単位）からなる一覧として整理したものと見なすことができる．また，そう思うことで，様々な現実的な教育の状況に応じて,「教えるべき数学」を，四科すべてに限らず，そのうちの三科，あるいは，二科，一科と “実践的に選択” することが可能となる[19]．そういう意味で，一覧としての「四科」は,「教えるべき数学は何か」という問いに対する実践的な答えを導くものになっている[20].

---

[17] 実際,「天文」についてはボエティウスによるラテン語テキストがなかったこともあり，理念としては「四科」であっても，実際の教育課程は三科であったようである．さらに，幾何については，エウクレイデス『原論』の第一巻程度の内容がせいぜいであったようだ．実際の教育課程ということであれば，時間数，教員，教材等々の「状況（コンテクスト）」に応じる必要があるわけで，数論と幾何の「二科」のこともあれば，数論または幾何の「一科」だけのこともあっただろう.

[18] 実践的な問題に，理論的に答えようとしたり，理論的な答えを求めることは無意味である．なお，ここでは,「実践的な問題とは，その答えが，行為する人間の自由意思に依存するという意味での複数性をもつ」ものであり,「理論的とは，そうしたものに依存しないという意味での単数性をもつ」ことに注意しておく．“実践” と “理論” の意味づけについては，古代にあってはアリストテレスの，また，近代ではカントの所説が参考にできるだろう.

[19]脚注 17 を参照のこと.

[20] 例が簡単すぎて，かえって誤解を招くかもしれない．ただ，このきわめて簡単な例であっても，現在の学校教育で,「代数」,「幾何」,「解析」,「基礎数学」等々の “科目名” という “要素” からなる一覧 なしに教育課程を組み立てることを想像してみれば，こうしたものの実務的な必要性の一端は想像できるだろう．さらに，それぞれの “要素” の下に包摂される教科書の目次の項目のような “部分要素” 群を加えた方がイメージしやすいかもしれないが.

もっとも，ここでイメージしているのは，科目名を集めただけ一覧のような単純なものではない．例えば，古代ギリシアでアリストテレスが大成した，レトリケーであるとかディアレクティケーと総称される営みで伝統的にトポイと呼ばれた一覧（要素がトポス）であるとか，近代では，マックス・ヴェーバーの，人間の社会的行為の総体を理念型からなる要素的なもので体系化する試みのような，いわば「構造化された一覧」を想定している．なお，先に挙げた「教科名と目次の項目群」は，“構造化された一覧” のひとつであろうし，ある意味で，我々が目指すものの最後尾に位置する形態の一種といえるかもしれない.（「項目」の決定という作業が，各種の教育観や数学観の十分な吟味を必要とするものであることについては，藤澤利喜太郎の記念碑的な仕事である『算術條目及教授法』([10]）や，この著作について論じた [17] を参照されたい.）

また，数学教育に深く関与した指導的数学者であったフェリクス・クラインの，教育の観点から数学教育を

本稿では,「数学観」に焦点をしぼって，そうした“一覧”を作成するための準備的な考察を試みるが，この作業の進め方についての検討をするため，もう一度,「四科」を例にして考えてみたい．つまり，多様な“数学的営み”が,「四科」という四つの要素（単位）からなる一覧として整理されていく過程を考えてみたい[21].

「四科」の形成過程は，最初，さまざまな（脚注12で述べたような）数学的営みの中から，四種のものに着目する段階から始まる．次の段階として，この四種を普遍的に捉える「量」という概念の導入が続く．さらに，この量を基盤に，四種を区別するための示差特徴（離散と連続，動と非動，など）の導出と，それに基づきあらためて四科への類別という段階に至る.（あらためて類別した結果，四科ではなく，五科なり六科なりになることもあるだろう.）

結局のところ，ここに見られる過程は,「多様性の記述[22] → 普遍性の把握 → （先行する普遍性に基づく）多様性の記述」とまとめることができる．ところで,「普遍性の把握」とは，多様なものを共通に規定する“もの”を取り出すことであり，その“もの”によって，“あらためて”規定される領域は，拡大したり制限されたりすることになる．そういう意味では，上の過程は三つのステップで終わるわけではなく,「多様性の記述 → 普遍性の把握 → 多様性の記述 → 普遍性の把握 → ⋯ 」と繰り返すことになる.

もちろん，上述の系列は，もとより“一意的”なものではない．多様性の記述のための要素的（単位的）なものの取り出し方にしても，普遍的なものの選び方にしても，主体である人間の意思に本質的に依存する“恣意性”をもっており，つまりは，この過程は実践的な営みであるということになる（脚注18参照）.

なお，上述の系列は「多様性の記述」から始まっているが，もちろん,「普遍性」を出発点とすることも考えられる．いずれにしても，実践的に役立つものであるためには，それぞれの過程で，対象領域を拡張したり制限したりする必要があり，上述の手続きは，いわば“要素的なプロセス”を取り出してみたものにすぎない.

さらには，以上のようにまとめれば，このプロセスは，数学観についてだけでなく，教育観等々の“多様性を具えた事象群”についても適用可能なことがわかる.

## 2　数学の多様性を記述するために

数学の多様性を“記述”するためのもっとも重要な素材として，歴史に現れたさまざまな数学的事象と考えるしかないだろう．本章では，多様性を記述するための素材であることを意識しつつ，“歴史のなかの数学”について予備的な検討を行ってみる．ここで，事実としての数学史そのものにあまり力点を置くことはしないように注意する.

---

一覧的に捉えようとした『高等的学校における数学教育に関する講義』（[20]）や，同じ領域を数学の観点から総覧しようとした『高い立場から見た初等的数学』（[21]），あるいは，ハンス・フロイデンタールの『数学的構造の教授的現象学』（[9]）といった著作における試みも参考になる.

[21]つまり，通時的な把握をするのである．もっとも，歴史学的にというよりは，パターンを把握するための素材としてみるのだが.

[22]「記述」の意味にについては，脚注5を参照のこと.

## 2.1 歴史のなかの数学

多様性を“記述”するには，最初のステップとして，事象群から単位的なものを取り出す必要がある[23]．素朴に考えれば，そのためには，複数の事象群を，何がしかを共通にもつ事象群のクラスにまとめて分けること（類型化）が必要になる[24]．そこで，本節では，ある歴史的な領域に含まれる数学的事象を“類型化”する話題から始めることにしよう．

### 2.1.1 古代における数学の諸類型

複合的な事象を構成する単位的なものを採り出すとき，最初の段階としては，複合の度合があまり高くないものから出発する方が良い．歴史上に出現したさまざまな「数学に関係する事象」について考えるのなら，古い時代のほうが相応しい．俯瞰的にというか，個々の事象にとらわれず，大局的に見る必要があるだろう．

何年か前,『教育数学序説 — 古代における教育と数学の類型 — 』と題した論文（[14]）において，時代と社会によって多様な顕われ方をする「教育」と「数学」の関係性を調べるための予備的考察として，“古代”における教育と数学を類型化する試みをしてみた．そこでは，現在の標準的な数学史の見方で古代の数学に分類される“テキスト”群という大きな枠を採り，その中での類型化を以下のように考えている[25]．

#### 2.1.1.1 算経型数学と原論型数学

古バビロニア期の“粘土板の家”で使われた楔形文字による各種テキストや，古代中国の算経と総称されるテキスト群などといった“古代”の「数学」[26] は,「記数法や演算のアルゴリズム・方程式の解法（開平・開立）の補助計算器具を用いた実現法などを含む有理数体上の（広義の）代数的技法と，天文・測量・交易・物資の生産および分配の管理などの領域におけるその適用技法の集成」とでもいうべき基本的な性格がある．一方，そこには現代の我々にとっての「数学」の特徴的な性質である「論証」という方法が欠けていることは，周知のことである．

前者の「数学」の起源が人類誕生の薄明のなかにあるのに対し，後者の「論証という方法をもつ数学」は，その端緒を限ることができる．ギリシアの植民都市に発し，アレクサンドロスの征服事業を契機に，現在のヨーロッパからインドにいたる広範な地域に拡がった，主としてギリシア語を使用する「数学」 が，その源である．なお，本稿では，“使用言

[23]脚注 5 を参照のこと．

[24]類型化とは，伝統論理学的にいえば．共通するものが「内包」でクラスが「外延」であるような「概念」を構成することに相当する．なお，類型化を出発点として強調する立場から論理学を展開することについては，例えば，コンディヤックの論理学の教科書（[6]）を参照されたい．

[25]“古代のテキスト群”の実際であるが， 洋の東西に渡るため，正確に“古代”を区画することは困難である．[14] では，ある程度まとまりのある教科書的な文書（教科書として作成されたか，もしくは，作成の意図とは別に教科書として使用されたもの）が史料として遺されているという理由から，メソポタミアの粘土板，エジプトの各種パピルス，中国の『九章算術』を代表とする算経十書，インドのアールヤバタ（文字化された年代は新しいが，十分に古形を遺しているとみなせる），ヘレニズム＝ローマ期のエウクレイデス，アルキメデス，アポロニウス，プトレマイオス等々の著作を包含するような時期を想定している．なお，こうした枠を，古代の数学の総体と考えることができないことについては，第 2.1.2 項を参照のこと．

[26]より正確には，今の我々から見て「数学」と呼ぶのが相応しいと思われている営みというべきもの

語” という観点による類型化として，“古代ギリシア語を使用する数学” を「ギリシア語系数学[27]」と仮称するが，古代ギリシアで展開された論証的数学は，このギリシア語系数学の一部にすぎないという立場をとっている（第 2.1.2.1 項を参照）.

論文 [14] では,「古代の数学」の類型化を試みるにあたって，まず，いわば第 1 次近似として，この「論証という方法[28]」の有無という観点[29] から，上述のギリシア語系数学に含まれる論証的な「数学」と，それ以外の「数学」をひとくくりに二分してみた．そして，それぞれの類の範型として選んだ代表的著作の名称を，類の名に冠することとし，仮にではあるが，前者についてはエウクレイデスの原論（ストイケイア）から「原論系数学[30]」と，後者は『九章算術』から「算術系数学」と名付けた．しかし，論文 [15] 以降では，類型の名称であることを強調するため，またさらに，後者については，九章算術よりもそれを含む算経十書が代表としてより適切だろうとの考えから， それぞれの類を,「原論型 (Stoikeia Type)」と「算経（さんけい）[31] 型 (Suan-jing Type)」と呼ぶことにしている．

#### 2.1.1.2 算経型数学の特徴

「算経型数学」の類は，メソポタミアの粘土板，エジプトの各種パピルスやインドの各種スートラ等々で表現される，いわゆるギリシア的な論証数学の影響を受けていないと思われる「数学」を，すべて含んだものと考えている．[14] では，この算経型数学に属する “遺されたテキスト群” の，重要な特徴として，(1)「演算を備えた数系の計算および応用技法の集成」と総称しうる性格をもつこと，(2) 使用する数系は，今で言う有理数体であること，(3) 標準的なテキストは,「技法の記述（術則）」と「問題と解答（及び解説）」からなる「範例集」の体裁をもつこと[32]，(4) 計算技法は，古代中国の算木，メソポタミアやエジプトの各種数表やインドの砂盤といった「計算補助装置」を包含していること，(5) 図形に関係する諸問題も「数値的」に取り扱うこと[33]，(6) 問題で扱う数値は，現実的であるよりは，計算の容易さが優先されていること，の六点を挙げた．

ここで着目したいのは，最後（6 番目）に挙げた特徴である[34]．算経型の数学テキストがもつこのような性格は，こうしたテキスト群の，“天文・測量・交易・物資の生産および分配の管理” などの職能集団における実際上の使用可能性に疑問を抱かせるものである．なか

[27] 対応する概念として，漢語系数学や，アラビア語系数学，シュメール＝アッカド語系数学，サンスクリット語系数学，等々が考えられる．もちろん，類型化について一般的に言えることだが，こうした類の「数学」はその対象領域を厳密に定めることは難しい．

[28]「何がしかの前提となる主張から，しかるべき手続きによって，結果を得る」といった方法を，アリストテレスは,「推論（シュロギスモス）」と呼んだ．特に,「論証（アポイデクシス）」は，真にして第一の前提から出発する「推論」のこととされる．なお，脚注 62 を参照のこと．

[29] 共有されているべき観点が欠如していることも，また，そうした観点の下での類別の重要な指標である．

[30]「原論」をエウクレイデスに限定すると，かえって誤解を招くかもしれない．歴史的には，エウクレイデスに結晶するような “ストイケイア” と称される一群のテキスト群の存在が想定されているが,「原論型数学」とは，そうしたテキストの内容やスタイルを前提として展開されている数学的テキスト群と見なした方が良いかもしれない．

[31]「さんきょう」と読まれることもある．

[32] 歴史的な発展の過程としては,「術則」⇒「問題集」⇒「解説」といった順が，標準的には，想定される．口承文化から文字文化への，社会における優位性の変遷が関係していると考えられる．

[33] 古代の中国・メソポタミアなどの文明社会では，算経型数学を基盤とする天文・暦法も，後世「関数的」とも称される数値的方法で展開された．

[34] この特徴は，現在の日本の学校数学のいわゆる “応用問題” にも共通するものである．

には，こうした特徴を，古代の“数学”が「直接の応用を離れている」ことの一つの証左と解し，そこに独立した学術的営みとしての「数学」の誕生を見るという論者もいる．

われわれとしては，この特徴は，今に遺された算経型のテキストが教育用として編まれたか，当初はそうでなくとも，教育用テキストとして使用されているうちに改編が進んだかの，いずれかの事態を反映していると思うのが素直な見方ではないかと考えている．

上で「教育用テキスト」という見方を提案したが，もう少し正確に言えば，“教育”という観点から見るとき,「問題で扱う数値が，現実的であるよりは，計算の容易さが優先されている」ような種類の“数学”は，いわば,「教えるという目的に適合的な形態へと再編された数学」，簡潔に言うなら,「教えるための数学」— と特徴づけることができるだろう．それに対して，各種職能集団で実際に使用されていた“数学”の場合，扱う“数値”は「計測法を含む使用状況に依存した概数（近似値）」であったと想定するのが自然である．

ここで，前者の“数学”を「ディシプリン型 (Disciplinary Type) [35]」，後者を「インプリメント型 (Implement Type)」と呼ぶことにしよう．この 2 つの型を区分することは，数学の教育を考える際には重要であるのだが，こうした区分は意識されにくい．それは，現在，学校で教えられている数学が典型的なディシプリン型であり，また，学校数学をもって数学と見なすことが日常化しているせいかもしれない．

#### 2.1.1.3　原論型数学の特徴

次に，原論型数学の特徴について考えてみたい．原論型数学の第一の特徴としては,「論証の使用」を挙げるべきなのだろうが，これは，今の段階では，むしろ，類別化にあたっての観点そのものに過ぎないともいえる．そこで，原論型に分類されるテキスト群に共通する特徴の抽出を試みることにする．漠然とだが，エウクレイデス，アルキメデス，アポロニウス，プトレマイオス等々の名前で伝えられる著名なテキスト群に対して，共通するものを考えてみよう．

まず，ギリシアの幾何学は，長さや面積を数値的に扱わないという「伝説」がある．このことは，エウクレイデスの『原論』に限れば正しいのではあるが，アルキメデスやプトレマイオスの著作を見れば,「近似」であることの理解の下で「数値」を扱っていることはすぐにわかる．したがって,「数値的な扱いをしない」ということは，原論型数学の特徴とは言えない [36]．

もっとも，図形の扱い方，もしくは，図形に向かい合う姿勢を，原論型数学と算経型数学との相違のひとつと見ることは可能かもしれない．算経型に分類したテキスト群では，図形に関する問題は，数値化という操作を通じて代数的技法が適用される題材のひとつである（前 2.1.1.2 項に挙げた特徴の 5 番目）．他方，エウクレイデス的な原論型数学の場合は，

---

[35]規律であり，しつけ・訓練や師承の手段であり，閉じた学問的な世界であり，等々の意味合いをひとことで現すものとして，適当な日本語もなく，“discipline”を選んだ．対になる，状況埋め込み型と言えなくもない型も，“implement”と呼ぶことにした．日本語にした場合に，その言葉の持つ別のニュアンスが意味を変えてしまいかねないことを恐れたからでもある．この言葉に込められたこうした特徴群は，複数の類型として精錬されていくべきものともいえる．

[36]数位的な扱いの有無で部分類型を考えることができるが，今は，それらを統括した何かしらのものを抽出したいという段階である．

図形を，数値化を経ず直接的に操作することで,「空間の量的な認知や操作」にかかわる種々の技法を提供していると見なすこともできる．

そのような見方で，例えばエウクレイデスの原論を，演繹体系としての体裁を解体して，見直すと，具体的には,「問題」型の命題，特に作図題群が，この「空間の量的な認知や操作にかかわる技法」を提示していることがわかる．しかも，この作図題に関わる部分のテキストの体裁は,「問題–解法–説明」型と見ることができる．これは，むしろ，前 2.1.1.2 節で挙げた算経型数学の 3 番目の特徴と一致することになる．つまり,「問題–解法–説明」型のテキスト表現をもつという特徴は，算経型に特有のものではなく，算経型と原論型の一部に共通する特徴であるということになる [37].

### 2.1.2　見えない数学

#### 2.1.2.1　論証数学とは限らないギリシア語系数学

ギリシア語系数学の特徴としては，しばしば,「エウクレイデスの原論を典型とするような論証による演繹体系」であることが挙げられる．つまり,「ギリシア語系数学はすべて原論型である」と言っているわけだが，ギリシア語系数学を「ギリシア語を用いて営まれる数学」と呼ぶのであれば そんなことにはならない．論証による演繹体系を「数学」の要件とでも無理やり定めるという立場は取らないのである．

例えば，プラトンは,『国家』の一場面で，国の守護者 — 戦士にして哲学する者 — の育成に必要な学について論じているが，そこでは，主役であるソクラテスの口を借りて,「およそすべての技術も思考も知識も，共通に用いる或るもの」であって「誰でもが最初に学ばねばならぬもの」は「総括して言えば，数〔アリトモス〕と計算〔ロギスモス〕」であり,「計算術〔ロギスティケー〕と数論〔アリトメティケー〕とは全体として数に関わるものである」から,「それらの学問は，われわれの求めている学科のひとつだ」と主張している．そして，国の守護者になるためには,「この学科に素人として触れるのではなく，純粋に知性そのものによって数の本性の獲得に到達するところまで行かなければならない」とし,「貿易商人や小売商人としての売買のためにそれを勉強し訓練するのではなく」,「魂そのものを生成界から真理と実在へと向け変えることを容易にするため」に学ばなければならないのだとされている．

ここには，貿易や小売りといった実務と，哲学をするための準備とを対比的に区別する態度が見られるが，プラトンの後を継いだアカデメイアの哲人たちは，前者のための学科目としてのロギスティケーと，後者のためのアリトメティケーという整理を進めていった．

そもそも，プラトンに先立って「哲学者のための課程」としての “アリトメティケー” に照明をあてたのは，ピュタゴラス派であったとされる [38]．このピュタゴラス派的アリトメ

[37] このように，異なるクラスに属する事象が同じ特徴をもつことがあるのは，類型化が実際の事象を集めたクラスからなることの限界である．このことは，厳密な概念を提示するためには，類型化では不十分であって，しかるべき “抽象化（理念型化）” が必要であることを示しているとうことである．あるいは，この例は，類型化が，異なるクラスに共通する特徴を取り出すことで新たな概念を形成する手段であることを示しているとも言える．なお，このことについては，第 2.3 節で取り上げる．

[38] 我々は，ピュタゴラス派のアリトメティケーから，完全数や友愛数，各種の図形数といった概念を今に受け継いではいるが，その実態は伝説の霧の中にあると言ってよい．

ティケーの “完成形” は，エウクレイデスの原論の第 7 巻から 9 巻にみられるような「論証による演繹体系」の体裁をもつとされるから，つまりは，我々の分類による原論型数学の典型とも見ることができるだろう．それでは，“ロギスティケー” の方はどうなのだろう．ロギスティケーが売買等の “実用” を目的とするものとされることからは，原論型ではなく，算経型の方に分類することが自然であろうと推定される．

ところで，プラトンは,『国家』において，国の守護者が学ぶべき “数” に関する学科目以外のものとして，幾何学〔ゲオメトリア〕や天文学〔アストロノミア〕も挙げている．プラトン自身にあっては，こうした学科目の場合は,「陣営の構築」や「農耕や航海」への必要性といった実用的なものと哲学の予備課程としてのものが，同一の名称で語られているが，一般的には，実用のロギスティケーと哲学課程の “アリトメティケー” の対比として，“ゲオダイシア” と “ゲオメトリア” があるとされる [39]．

#### 2.1.2.2 「見えない数学」を見る

ギリシア社会のロギスティケーは，現存する史料に拠る限り，その実体がよくわからない [40]．ここに，歴史のなかの「数学」を探求する際の困難がある．

歴史家アンリ・イルネ・マルーは，ヘレニズム期の教育について,「技師（土木技術でも工兵技術でも），測量技師，航海士にはヘレニズム期の社会のなかでじつによくお目にかかるが，それらに対する独自の教育は，奇妙なくらい存在していない」ことを,「史家は驚きの思い」をもって認めていると述べている（[24, 日本語訳 p.233]）．もっとも，ここでマルーのいう「教育」は，学校教育的な狭義のものを指しており，実際には，マルー自身，そうした “技術者教育” は「きわめて単純でまったく古風な性格 — 師弟間の個人的なつながり — を保ち，その道の専門家に接しながら養成された」のだろうと述べている．

後世に生きる我々は,（文字化された）史料が遺されていないものを直接見ることはできない．したがって，文字を使用しない集団や文字類の使用が同時代の構成員のためだけのものであった共同体で営まれた「数学」は，我々には容易に「見ることのできない」数学ということになる [41]．プラトンのいうロギスティケーも，そういう意味では，直接的には「見えない数学」ということになるだろう．

それでは，直接見ることのできない「数学」を “見る” には，どうすれば良いのだろうか．「同種の数学」を，他の時代や地域において求め，そこからある種の理念化された「数学」を構成し，そうして人為的に構成された「数学」を外挿したり，あるいは，間接史料や考古学資料，文化人類学的資料等々を内挿するための物差しとして使用することで，整合性の高い数学像を作り上げることになるだろう [42]．

ロギスティケーについていえば，これが算経型であり，“理念化” の題材である “他の時

---

[39] 例えば，アリストテレスの『形而上学』の 997b20 行あたりの「ゲオダイシアとゲオメトリア」を対比的に述べる場面を参照されたい．

[40] 遺された断片的な史料については，ギリシア数学史の著作を参照のこと．

[41] マルーの同書には,「技術者はたしかに算数や幾何の計算練習をしたはずで，この計算練習があったことはパピルス文書にその確証があるが，それでもこの種の練習は，固有の意味での中等教育課程とは無関係だったらしい」とある．

[42] マックス・ヴェーバーは，こうした目的のために理念的に構成された対象を，理念型 (Ideal Typus) であるとか，純粋型 (Pure Typus) と呼んだ．

代や地域における同種の数学" として，メソポタミアの粘土板やエジプトのパピルスに拠る"数学" を相当させることが役に立つこと等々が期待される．また，そうした "眼" で眺めることで，遺された文献，例えば，ヘレニズム数学の最後尾に位置するヘロンの著作にロギスティケーの痕跡を見ることができることになる．

### 2.1.3 数学発展の特異領域

一般に，数学と数学の教育について考えるとき，その時間と空間における拡がりは，人類の歴史的な歩みと拡がりに重なっているといっても過言ではないだろう．ただ，そうした時空の拡がりのなかに，しばしば，そのありかたが局所的に相的な変異を起こしている特徴的な事象が見られる．こうした事象を,「数学発展の特異領域」と呼んでみたい[43]．

もちろん，数学の歴史に生じた最大の特異性は「原論型数学の誕生」であろうし，その十分な検討の重要性は言うまでもない．しかし，原論型数学の検討だけですべてが済むわけはないことも，また，当然のことである．

例えば，今の日本の数学を考えてみる．今の日本の数学は，大きく見れば，幕末から明治初期にかけて，漢字圏の伝統のなかで培われた数学と，欧米から伝来した数学という，二つの潮流がぶつかり合う場から育ってきた．異なる数学の流れがぶつかると，そこには数多の「特異領域」が生じる[44]．

最初期に生じた特異領域の様相を知ることは，今の数学を理解し，新たな可能性を拓くために重要だと思われるが，そのために必要なのは，第一に，そのありさまを適切に "記述" することだろう．精度の高い "記述" を実現するためには，要素（単位）を抽出し，その適合性を検査するための多様な事例が必要だが，数学の歴史を振り返るとき，例えば，上述の幕末から明治期のように，二つの文明がぶつかりあう場で生じる特異領域の多様性などは，そうした目的に適った事例群を提供してくれる．そういう意味で，われわれとしては，こういうものの例として，イスラムの勃興期や，近世の西欧形成期などにおける "数学" に興味を持っている[45]．

---

[43]数学の発展の途上で生じた変化は，いずにせよ，"教育" という手段で伝達されなければ，社会的影響をもつことも，今に遺ることもない．つまり,「数学発展の特異領域」は,「数学教育の特異領域」の一部とみなすこともできる．逆に,「数学」は "平常点" であるが，教育の方が，システムなり理念なり，特異的に変化を生じるといったこともあるだろうし，なかには，結果として数学の変異を産み，つまりは，その「数学教育の特異領域」を「数学発展の特異領域」と同一視できるものもあるだろう．

[44]実際の歴史の流れとしては，時間が経過につれ，そうした特異領域は，あるいは消滅し，あるいは融け合って，定常的な新たな流れをつくりだすことになる．

[45]こうした時代の変革期に生じる多様性を把握するために類型化を行うことは，自然なことである．実際，例えばだが，史家の Michael Mahoney は，十六世紀後半から十七世紀前半にかけてのヨーロッパで現在の数学 (mathematics) に相当すると思われる分野を，担った人に対する，classical geometers, cossist algebraists, applied mathematicians, mystics, artists and artisans, analysts の六類型に分類している（[22]）．また，A.S. Saidan は，インドの砂算がイスラム世界に導入され，土着の指算や 60 進法を用いるメソポタミア由来の計算術と混合し，拡散し，融合している状況を調べるため，使用されたテキスト群を，*H-type*，*A-type*，*HA-type*，*Islam-type* の四類型に分類している（[37]）．そうした既成の業績との比較で述べれば，方法論としてより確固としたものを目指す試みと言えるかもしれない．

## 2.2 ギリシア語系数学の諸相

数学発展の特異領域の最大のものは，論証的な数学を生んだ古代ギリシア語系数学にあると考えている．原論型ギリシア語系数学の特徴をどう捉えるとしても，現在の「数学」のもっとも重要な源泉であると言っても間違いではないだろう．

本節では，多様性の記述のための基礎的作業のひとつとして，ギリシア語系数学を育んだ人々が「数学（ヘ・マテマティケー）」というものをどのように捉えていたか，つまり，彼らの“数学観”についての見方を概観しておきたい．

### 2.2.1 特異性の起源

ギリシア語系数学の特異性の起源は，ピュタゴラス学派に求めるのが通例である[46].

周知の通り，英語の mathematics をはじめ，ヨーロッパ諸語の多数で「数学」を意味する言葉は，古代ギリシアの地で「学ぶ」の意の動詞「マンタノー ($\mu\alpha\nu\theta\acute{\alpha}\nu\omega$)」から派生した「マテマティケー ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\eta}$)」に由来しているが，この「マティマティケ—」という言葉を初めて用いたのが，ピュタゴラス学派の人々だとされる．

実際，ラオディケアの司教として知られる三世紀末のアナトリウスは,「ピュタゴラス派の者どもが，幾何（ゲオメトリア）と数論（アリトメティケー）のみにマテマティケーという特別な名称を与えたという．それ以前は，各々は別々の名で呼ばれており，両者に共通の名はなかった[47]」と伝えている．

なお，これも周知のことだろうが,「学ぶ」の意から派生した「マテマティケー」という言葉に「数」の含意はない．この言葉が今で言う「数学」の意に転義した理由について，アナトリウスは先の断片において次のように記している．「なぜ，マテマティケーはこういう名で呼ばれるようになったのか？ 逍遥学派は，こう説く．修辞（レトリケー）や詩文（ポイエティケー）や通俗音楽（デモウデオウス・ムゥシケー）は教えを受けることなく理解することできる．が，このマテマティケーという特別な名で呼ばれる学的領域は，教育を通ぜずしては何人も修得能わざるものであるのだ，と.」ここに，数学と教育の密接な関係性のひとつの顕れを見ることができるだろう．

### 2.2.2 プラトン的数学観とその系譜

本項では，第 1 章で例として取り上げた「四科（クァドリヴィウム）」を「数学（ヘ・マテマティケー）」と見なす“数学観” について概観する．

#### 2.2.2.1 前史としてのピュタゴラス学派

伝承によれば，古代ギリシアにおいて,「世界は数的秩序によって支配されている」とし，数学の重要性を称揚したのは，ピュタゴラスを奉ずる人々であったとされる．それでは，ピュタゴラス派は，数学がどのような学科から構成されると考えていたのだろうか．

---

[46] ギリシア語系数学の特異性の起源についての，別の観点からの考察については，脚注 82 を参照のこと．
[47] ヘロンの『定義集』より．[44, p.2] を参照した．

初期のピュタゴラス集団の実態は判然としないが，プラトンと同時代の著名なピュタゴラス主義者とされるアルキュタスは，真正と目されるある断片で，次のように述べている．「（ピュタゴラス学派の数学者たちは）我々に，以下のことどもについての知識を手渡してくれた．星々の速さやその昇没について，そして，幾何（ゲオメトリア），数論（アリトメティケー）[48]，球体学（スファイリカ）[49]について，そして，とりわけ，音楽（ムゥシケー）[50]について．こうした諸学（マテーマタ）は，姉妹（アデルフェー）のようなものである（[44, p.4 ]）.」

### 2.2.2.2 『エピノミス』にみるプラトン学派の数学観

アルキュタスたちとの交流を通して，ピュタゴラス学派の数学観に大きな影響を受けたプラトンは，さまざまな対話篇で数学の教育の必要性を謳った．なかでも，数学の重要性が最も強調されているのは,『エピノミス』である[51]

『エピノミス』は,『法律』に登場した「夜明け前の会議[52]」の構成員に相応しい賢人を育てるにはどうしたら良いかについて,『法律』の登場人物たちが論じるという体裁をとっている.『エピノミス』の語り手である「アテナイからの客人」は,「人が知恵を身につけるにはどうすればよいか」を明らかにするため，種々の知識を「一つずつ調べ」ていくことを提案し，結果として，最高の重要性をもつものは “数” に関する知識であると説く[53]．そして，この “数” の力について,「たとえば，音楽の分野では，どんな種類の曲でも，数の関係に合うように配列された楽音と，それに拍子とを，必要としていることは，いうまでもありません．それから，これは特に大事な点なのですが，立派なものはことごとく数の力でできあがるのに，くだらないもののうちには，数の作用が及んでいるものはひとつもないのだという事実，これを誰でも理解しなければなりません」という説明が与えられる．

こうして，“数” の力が及んでいる様々な現象を真に理解することで，人は,「神聖な法則によって私どもの眼前に整然と組み立てられているあの美しい世界秩序」を知ることになるのだが，そのために学習が必要なものが，数論・幾何・音楽・球体学[54]の四つの学科ということになる．

実際,「（こうした学問を）正しい方法に従って学習していく人の目には，すべての幾何学的図形，すべての数列，すべての音階構造，全天体の回転運動が作る調和関係，これらが一体をなしたものであるのだということが，突如として明確になるはずなのです」とされ,「以上の学科全部を以上で述べたとおりにして理解しつくした人をこそ，もっとも真実の意味でもっとも知恵がある人だ，と私はいまや呼ぶことにしたいのです」と述べられている．

[48]アリトメティケーとは，単位 (モナス) からなる多 (プレトス) としての「数 (アリトモス)」に関する学のこと.「数の学」の意だが,「数学」ともできないので,「数論」と訳すことにした.

[49] 天文現象を説明するための球面幾何ないし天文学 (アストロノミア) のこととされる.

[50]「音楽」と訳されることが多いが，語源であるミューズの神々に関することどもというより，音階や和音等の数的構造に関する学のこと.

[51]この著作には偽作説もあるが，それでも，プラトンの死後間もない頃のプラトン主義者たちの見解ではあっただろう.

[52]プラトンは,『法律』において，理想の国が備えるべき法律制度について論じ，国の最高意思機関を設置することを提案しているが，その機関の名称を，執務時間帯から採って,「夜明け前の会議」と呼んでいる.

[53]以下，日本語の訳文は，[29] を参照した.

[54]球体学については，脚注 49 を参照のこと.

#### 2.2.2.3 新ピュタゴラス学派 — 四科（クアドリヴィウム）としての数学

前項の『エピノモス』の記述から，プラトン学派に第 1 章で採り上げた「四科（クアドリヴィウム）」の“数学観” の一部の形態が見られることは明らかだろう．

しかし,「量の厳密学としての数学の四学科への分科」という最も巧緻な数学観の形態は，新ピュタゴラス学派（ないしは新プラトン学派）によるものと思われる [55].

例えば，プロクロスの『エウクレイデス原論第一巻註解』によれば，次のようになる（[34, pp.35-36]）[56].

> ピュタゴラスを奉ずる者たちの考えでは，数学的諸学 (μαθηματικὴ ἐπιστήμη) は四つの部分に分けられるべきである．その半ばは数 (離散量，ποσόν) に関する側に，残りの半ばは量 (連続量 πηλίκον) の側へと仕切られた．そして，その各々が二重になっているとされる．数は，自分自身との関係において，あるいは，他の数との関係において，量は，静止の状態において，もしくは運動の状態において，考察することができる．こうして，数論（アリトメティケー）は数をそれ自身との関係で，音楽（ムゥシケー）は他の数との関係で，幾何（ゲオメトリア）は量を静止の状態において，球体学（スファイリカ）は自身の運動状態において，考究することになる．

ここでは,「数学」を，第 1 章で述べたとおり,「一般量（数と狭義の量）に関する学問」と見る“内在的” な規定を前提とした上で，この一般量を，離散と連続，静止と運動という二項対立する二組の差異特徴から四つに類別していることになる [57]．

これは，また，例えば,「構造の学」という数学のブルバキ流の規定（「集合」という普遍的な把握の上に，位相構造，代数構造，等々に基づく類別）と同種のものと考えることができるかもしれない．

なお，数（ポソン，離散量）と量（ペリコン，連続量）の峻別は，アリトメティケーとゲオメトリアの峻別に他ならないのだが，これは，原論型ギリシア語系数学の重要な特徴のひとつと考えられる．周知のように，その背景に，非共測量の“発見” という人口に膾炙した“事件” が大きな役割を果たしたことが想定されるだろう [58].

### 2.2.3 アリストテレス的数学観とその系譜

ギリシア語系数学における“数学観” には，前項で扱った「四科」的なものとは異なる系譜に属するものがある．本項では，アリストテレスの学問観に始まると思われるこの系譜

[55] 新ピュタゴラス学派も新プラトン学派も，その実態は判然としない．ある種の傾向を備えた人々の集まりに，緩やかに名称をつけたものと思っておいた方がよいだろう．

[56] ここはプロクロスによったが，ゲラサのニコマコス（100 年頃）の『数論入門（アリトメティケー・エイサゴーゲー）』の冒頭部にもほぼ同様の文章が記されている．脚注 11 に引用した文章が，このニコマコスの著作の該当箇所のラテン語訳となっている．

[57]「一般量」についての学問である「数学」と，連続・離散や静・動といった二項対立的概念による「四つの学科目」への分割というこの主題は，新プラトン主義派において，世界秩序の生成との相似形を為すものとして解釈される．例えば，プロクロスは，プラトンの『ティマイオス』的な世界創造の過程で，数論，音楽が「投射 (προβάλλω)」され，幾何，球体学が「創造 (ἐνεργάζομαι)」される様を描写している ([34, pp.36-37] ).

[58] 例えば，文献 [14] を参照されたい．

について，簡単に触れておきたい．

#### 2.2.3.1 『分析論後書』にみるアリストテレスの数学観

アリストテレスの“数学（ヘ・マテマティケー）観”としては，神学（テオロゴス）・自然学（フュシケー）と併せて理論学（テオレティケー・エピステーメー）のひとつと見るものが著名だが，本項では,『分析論後書』に現れた一般的な“学問観”と，その例としての数学的諸学についての所説を取り上げる[59]．

まず，アリストテレスが,「一方の知識が他方の知識の下にあるという仕方で互いに関係し合っている知識」について述べている箇所[60]に着目する．ここで,「知識」と訳されているのは「エピステーメー」のことであり，今我々が問題としている数学的諸学の「学」のことでもある．

次に，こうした“上下関係”にある知識（学）として，アリストテレスは次のように例を挙げている．

> 光学（オプティカ）がかかわることが平面幾何学（ゲオメトリア）に対して，機械学（メカニカ）が立体幾何学（ステレオメトリア）に対して，和声学（ハルモニア）がかかわることが算術（アリトメティケー）に対して，天体観測術（ファイノメナ）がかかわることが天文学（アストロロジケー）に対して，こうした関係にある．

アリストテレスによれば，上位にある知識（学）と下位にある知識（学）とは，同一の個別領域を対象とする知識（学）なのだが，その差異は，後者が単に「そうあること（エイシン・トウ・ホティ）」についてのものであるのに対し，前者は「そうあるのは何故か（ディオティ・トウ・ホティ）」についてを問題とするものであることによる．したがって，下位にある学は「感覚する人々のすること」であり，上位の学は「数学的な人々のすること」であるとされる[61]．

また，上位の学と下位の学は，方法においても差異がある．いずれも,「推論（シュロギスモス）」を方法として用いるのだが，上位の学は，特に,「論証（アポイデクシス）」と呼ばれる特殊な推論[62]を用いなければならないとされる．

---

[59]以下,『分析論後書』の日本語の訳文は，[1] を参照した．

[60]『分析論後書』の第 1 巻第 13 章．

[61]その理由について，アリステレスは，次のように付言している.「後者（数学する人々）は原因についての論証を持ちはするが，しばしば,「そうあること」を知らないからである．それはちょうど，普遍的な事柄を考察する人々が，観察することがないから，しばしば，個々の事柄を知らないのと同じである.」

なお，この説明では，上位の学が「数学」で，下位の学は「数学」ではないようにも思われる．実のところ，『分析論後書』は，アリストテレスの著作のなかでもとりわけ簡潔な表現で知られており，このあたりの説明は明快とは言い難い．アリストテレスのような古典に向かい合う時には，当然ながら，本文で述べたことも，筆者によるひとつの“解釈”であるということである．

[62] アリストテレスにとっての「推論（シュロギスモス）」とその種別が何であったかについて,『トポス論』（[2]）の冒頭部分を引用しておこう.「推論とは，そのなかでいくつかのことが措定されることによって，それらの措定とは違う何かが必然的に，それらの措定を通じて，帰結するような議論である．さて，真にして第一の事柄をもとにしてそこから推論が成り立っている場合には，その推論は論証である．あるいは，その知の出発点（始原）を第一の真なるいくつかの事柄を通じて得ているものがあるとき，それらをもとにしてそこから推論が成り立っている場合もそうである．それに対して，一般的な考え（エンドクサ）をもとに推論するのは，問答法的（ディアレクティケー）推論である．ところで，真にして第一の事柄というのは，他の事柄を通じてではなく，それ自体を通じて信憑性をもっている事柄のことである（なぜなら，学問的知の出発点においては

#### 2.2.3.2　中期ストア学派とゲミノスの分類

紀元前 130 年頃にアテナイのストア学派の学頭を継いだパナイティオスと，その門下であるポセイドニオスの率いた集団は，後世,「中期ストア学派」と称されている．ポセイドニオスの弟子と言われる数学者で天文学者のゲミノスには，当時の数学諸学に関する百科全書的書物を著したという伝承があった．散逸して現存はしていないものの，この書物にもとづくと思われる，ゲミノスの名を冠した数学諸学の分類が知られている．例えば，プロクロスは，次のように記している．

> ゲミノスのような人々は，数学（マテマティケー）を異なるように分けるべきだと考えている．一方は知性のみに関係する領域で，他方は知覚されるものどもに働き触れ合っている領域である．… 知性にかかわる数学には，最高位かつ真正である二つの分枝として，アリトメティケーとゲオメトリアがおかれる．他方，感覚的対象に応対する数学は，六つの学科をふくむ．機械学（メカニケー），天文学（アストロノミケー），光学（オプティケー），測地学（ゲオダイシア），音楽学（カノニケー），計算学（ロギスティケー）である．用兵学（タクティケー）を数学の一部であると呼ぶのは適切ではないと考えられている [63].

詳細はともあれ,「知覚されるもの」からの抽象化の度合によって数学の分科を区別するという趣旨は明快であると言えるだろう．また，第 2.1.2.1 項で話題にしたロギスティケーやゲオダイシアが包含されていることもわかる．

この類別では，“論証” との関係性がはっきり分かるわけではないが，前項で見てきた “アリストテレスの数学観” の後継にあたるものではあるだろう．

なお，この区分は，近代英語圏で用いられた，Pure Mathematics（純粋数学）と Mixed Mathematics（混合数学）という類別の淵源ではないかと思われる [64]．いずれにせよ,「知覚されるもの」という広大な領域との関係性の下で把握されたこの数学観は，第 2.2.2 項で見たピュタゴラス＝新プラトン主義的な “自律しているが形式的世界に閉じている” 数学観に比べて，“具象との関係性を保ちつつ開放的な” 世界観が前提となっていると考えることもできる．

---

さらに「なぜ」ということを探求する必要はなく，出発点のそれぞれがそれ自体として信憑性があればいいのだから）．ところで一般的な考えとは，すべての人に，あるいは大多数の人にそう思われていること，あるいは知者たちにそう思われてることであるが，知者たちに思われている場合には，すべての知者か，大多数の知者か，最も著名で評判の高い知者たちに思われている場合がそうである．それに対して争論的な推論というものは，一般的な考えであるように見えるが実はそうではないものをもとにした推論と，一般的な考えをもとにするにせよ，一般的な考えと見えるものをもとにするにせよ，推論であるように見える〔だけの〕ものである.」

[63][34, p.38]．なお，伝アナトリウスとして，ヘロンの『定義集』に，同様な数学の分類法が引用されている．内容は，次の通り（[44, p.18]）.「数学の分枝はいくつあるか． 最高位にしてより尊ばれるべき類の分枝が二つある．アリトメティケーとゲオメトリアである．そして，感覚的な対象に関する類の分枝が六つある．ロギスティケー（計算学），ゲオダイシア（測地学），オプティケー（光学），カノニケー（音楽学），メカニケー（機械学），アストロノミケー（天文学）である．いわゆる，タクティケー（用兵学）や，デモーデス・ムシケー（通俗音楽），ファセイスに関する学，ホモニモースと呼ばれるメカニケーは，数学の分枝ではない.」

[64]数学の二類型としての「純粋数学と混合数学」は，最近用いられている「純粋数学 (Pure Mathematics) と応用数学 (Applied Mathematics)」との類別に近いものを感じさせるが，両者の差異についての歴史的な経緯については詳らかでない．

### 2.2.4　プトレマイオスにおける数学の射程

古代末期，テーベのヘパイスティオン（4 世紀）によって “聖なるプトレマイオス” と称えられたクラウディオス・プトレマイオス（83 年頃 — 168 年頃）は，少なくとも後世への影響という点では，ヘレニズム期最大の “数学的諸学の大成者” であるといっても良いだろう [65].

本項では，このプトレマイオスというギリシア語系数学を語る際に欠かすことのできない人物に焦点を絞り，主要な著作から彼の抱いた “数学観” について概観しておきたい.

#### 2.2.4.1　プトレマイオスの著作群

現存するプトレマイオスの著作群は，次の六種に大別される [66].

(1) 天文学に関する著作群．主著は『アルマゲスト』（[35]）．関連する各種の表や摘要等々を含む.

(2) 占星学に関する著作.『テトラビブロス』（[36]）.

(3) 地図論を含む地理学の著作.『ゲオグラフィア』（[4]）.

(4) 光学に関する著作.『オプティクス』（[42]，真正さに疑問を呈する説もある）.

(5) 楽音の調和現象と天体の運行における調和との協応を主題とする著作.『ハルモニア』（[8]）.

(6) 哲学的小品.『真実の判定基準と精神の統御について』.

まず念頭に置いておくべきは，分類の最後の “哲学的小品” は別として，他のものはすべて数学（ヘ・マテマティケー）もしくは数学的諸学（マテマティケー・エピステーメー）と総称されるものを主題とするものであることである.

とりわけ興味深いのは，著作群 (2) の分野についてである．少なくとも，現代の我々の感覚では，“天文学” は良いとしても，“占星学” を数学や数学的諸学のひとつと呼ぶことには抵抗がある．しかし，プトレマイオスにとっては，そうではなかったのである [67].

#### 2.2.4.2　『数学集成（アルマゲスト）』の数学観

[65] 思想的な系譜として，プトレマイオスを新ピュタゴラス学派の一人に位置づける論者もいるが，少なくとも数学に関する限り，プトレマイオスは，プラトン＝ピュタゴラス的な要素も，アリストテレス的なそれも包摂する，まさに総合者として捉えることが適当ではないかと考える．例えば，プトレマイオスの “ハルモニア” について，山本建郎氏は,「ピュタゴラス流の思弁的方法論と，アリストクセノス流の知覚的方法論の統一がなされた感もある」と評している．なお，アリストクセノスは，アリストテレスの弟子であり，アリストテレス的方法論に忠実に展開されたハルモニアに関する著作が遺されている．詳しくは，[8, 日本語訳] を参照のこと.

[66] 以下の 1 から 6 に挙げた書名は通称である．[36] と [42] の序論を参照した.

[67] 実際，両分野の主著は，それぞれ,『アルマゲスト』と『テトラビブロス』と呼ばれるが，こうした書名は後代の通称であって，現存する写本の表題のうち，プトレマイオス自身が用いた可能性が高い（[36, p.x]）ものとして知られるのは，それぞれ，“マテマティケース・シュンタクセオス (*μαθηματικῆς συντάξεως*)” と “マテマティケース・テトラビブロウ・シュンタクセオス (*μαθηματικῆς τετραβίβλου συντάξεως*)” であるとされている．つまり，“マテマティケース・シュンタクセオス” と “マテマティケース・テトラビブロウ・シュンタクセオス” は，それぞれ,『数学集成』および『四巻の数学集成』と訳すことができる．いずれも，天文も占星も，表題からうかがうことはできないが，一対の著作と考えるべきものである．両著作の位置づけは，後者の序を読めばはっきりする．これについては，第 2.2.4.3 節と参考文献 [16] を参照のこと.

最初に,『数学集成（アルマゲスト）』の序文を採りあげる．プトレマイオスの著作の執筆時期は未詳であるが,『数学集成』は，その内容から判断して，西暦 150 年頃の作であろうといわれている（[35, 英語訳, p.vii] ）．また，他の著作に引用されていることからも，初期のものと想定されている．

『数学集成』の序文は，次のように始まる.「真の哲学者たちが哲学（フィロソフィア）の理論（テオレティケー）的な部分を実践（プラクティケー）的な部分と別にしたことは，シュロス[68] よ，私の思うところでは，まったく正しいことでした.」続いて，実践的な哲学に関しては,「多くの人が，教えを受けることなく，数々の徳行を身に付けることが可能である」が，理論哲学については,「教授されることなしに，理論的な了解に達することは不可能である」と説かれる．さらに，哲学の与える「最も大きな恩恵」について，前者は「実務的な活動」に従事することで得られるのに対し，後者の理論的哲学では「理論における進展」を通じることによるとされ，したがって,「我々の行いを高貴で規律ある傾向へと導く」ために妥当であるのは,「我々の時間」の多くを「（理論を教えるための）知的な事柄」，特に,「数多の美しき，殊に数学的と冠されることども」に捧げることであると述べられる．

次に，プトレマイオスは，当時の知の標準的な枠組みであったと思われる，アリストテレス的な学問の分類について概説する.「アリストテレスは，理論的な哲学を，さらに，大変適切なことに，三つの部門に分かちました．自然学（テ・フュシコーン）へ，数学（ト・マテマティコーン）へ，そして，神学（ト・テオロギコーン）へ，です.」そして，“質料（ヒューレー）”,“形相（エイドス）”,“運動（キネセオス）”という，アリストテレス的哲学の基本概念を用いて，自然学や数学，神学の説明が，宇宙の最初の運動の第一原因であり目に見えぬ不変の “神性” にかかわる部門である “神学”，白さや熱さ，甘さや柔らかさといった，月下の世界に存在する可壊な物体の性質にかかわる “自然学”，そして,「形相にかかわる性質と場所から場所への運動を決定し，形状や個数，大きさ，場所や時間等々の探求につとめる部門」としての “数学” について，説明が与えられる．また，“数学” は，他の二つの部門の中間にあたることが，理由とともに説かれる．

ここまでの説明は，おおむね，アリストテレス的な知の枠組をなぞるものであったが，ここで，プトレマイオスは，理論的諸学の優劣について，次のように結論する．

> 理論的哲学の最初の二つの部門 [神学と自然学] は，知識（エピステモニケー）というよりは推察（エイカシア）と称すべきものでしょう．神学は，その完全に不可視で把握不能な性質ゆえに，そして，自然学は，質料の不安定で不確実な性質ゆえに，哲学者たちがこうしたことどもについて合意に達する望みは，この先もありえないのです．そして，数学こそが，その探求に献身する者に対し，厳密に近づいていくならば，確実にして揺るぎない知識を与えることができるのです．というのも，その種の論証（アポデイクシス）とは，議論の余地のない方法，すなわち，数論（アリトメティケー）と幾何（ゲオメトリア）によって手続きが進められるのですから．

数学を神学や自然学より “上” にみるこのプトレマイオスの見解は，神学を人間の知的活

[68]“シュロス” は，人名である．当時の著作は，標準的には,「しかるべき人物に献呈する」という様式をもつが，プトレマイオスのこの著作では，それが，シュロスと呼ばれる人物であったということになる．なお，この人物については未詳であって，実在を疑う説もある．

動の最高位におくアリストテレスの見解とは異なものとして，古来より著名なものである．

以上の序文に見られるプトレマイオスの“数学観”の特徴として，(1) 理論や実践にかかわるアリストテレス的な知の枠組の遵守，(2) （アリストテレス的立場とは異なる）数学の神学・自然学への優位性，(3) 方法としての「数論と幾何に基づく論証（アポデイクシス）」といった諸点を指摘することができるだろう．

#### 2.2.4.3 『四巻の数学集成（テトラビブロス）』の数学観

次に,『四巻の数学集成（テトラビブロス）』の序文を見てみよう．

この序文は，先行する『数学集成（アルマゲスト）』と同様，シュロスなる人物に呈する形式で述べられており，次のように始まる.「天文を通じた予知（プログノースティケー）の手段としては，シュロスよ，二つのものが最も重要であり妥当です．ひとつは，順序においても有効性においても先に来るものですが，太陽や月，星々の動きが，お互い同士の，そして地球との関係において，時々刻々と形成する相（スキーマティスモス）を把握するものであり，二つ目は，こうした諸々の相のもつ性質（フュシケー）に拠って，相の変化がその影響下にある諸々にもたらすことどもについて考察することです.」そして,「最初の方の予知」に関する自著，つまり,『数学集成（アルマゲスト）』に触れながら,「最初の方は，たとえ二番目のものとの組み合せによる結果が得られないとしても，自身の見通し（テオリア）を持つことが望ましいわけですから，貴殿には，そのための著作（シュンタシス）において，論証（アポデイクシス）の方法を用いて，可能な限り詳しく解説いたしました」といったふうに続けられる．

次に，プトレマイオスは，この書物では「論証（アポデイクシス）」とは異なる“方法”を採用すると述べ，さらに，その正当性について，次のように説明を加える．

> さて，本書では，二つ目のものの，哲学（フィロソフィア）によって統べられる，自己完結的（ホサウトース・アウトテロウス）ではない説明（ロゴス）を与えてみたいと思います．天体の影響下にあるものどもは，その質料としての性質によって脆弱で可変であり，正確な把握が困難であるがゆえに，最初の著作で扱ったような，常に同一の不変な法則に支配されている，確実で無謬の規則を，ここで明らかにすることはできません．そうは云っても，取り囲む天体に起因することが明白に跡付けできる，大多数の一般的な出来事を適切に観察することまで排除するものではないのです．

上述の序文は，プトレマイオスの数学観が,『数学集成（アルマゲスト）』のそれに比べて，変化していることを感じさせる．この変化の特徴的な点として，“数学”が前著で峻別していた“自然学”の対象領域に入り込んでいることと，前著で“数学”の優位性を担保していた「論証（アポデイクシス）」以外の方法を認めていることが挙げられよう．

こうした“数学観の変化”は，偶発的なものではなく，プトレマイオスの思想の発展として捉えるべきではないかと思われる．この変化の原因のひとつとして推定されるのが，“数学を適用する領域の性質”の変化である．つまり，“数論と幾何に基づく論証”の方法が有効であった“天文現象”では顕在化しなかった，“観測と数学的概念の齟齬”とでもいうべき問

題の存在である．例えば，プトレマイオスは,『ハルモニア』の第一巻第一章の冒頭で,「ハルモニアは，諸々の音の高低の差異を把握する能力である．ハルモニアの判別者は聴覚と理性であるが…近似値を発見し，精確な値を受け容れることが感覚に固有であるのに対して，近似値を受け容れた上で精確な値を発見することが理性に固有であるからである．…つまり感覚的な受容能力は，まず第一に，感覚対象について比較的大まかに捉えた差異を基礎に据えるが，それからは理性的な受容能力によって正確で共通な把握へと導かれるのである」と述べている．さらに，“音” 以外の例として,「視覚によってのみ描かれた円はしばしば正確であるように見えるが，それは，理性によって構成された円が本当に正確な円の再認へと導き上げるかぎりにおいてである（[8, 日本語訳, p.111]）」とも述べている．

結局のところ，研究の対象が，天文学から，音響論，光学，地図論等々の “数学的諸学” と総称される領域へと拡がっていくにつれ，“論証の方法” の不十分さが明らかになり，また，それに応じるように，プトレマイオスの数学観も拡充していったものと想像される [69].

#### 2.2.4.4　プトレマイオスにおける数学の射程

それでは，プトレマイオスにとっての「数学（マテマティケー）」の射程は，最終的にどこまで拡がったのだろうか．

最晩年の著作と推定される『ハルモニア』の第三巻では,「天体の運行や人間の魂」もまた「本性の上でロゴス的 (λογικωτέρων τὰς φύσεις)」であることから，数学の分野となりうることが詳細に論じられている．

そして，そこで,「ロゴスにもとづくものに共通する学は，特に数学と呼ばれる (τὴν κοινήν τῶν παρὰ τὸν λόγον ειδων ἐπιστήμην, ιδίῶς δὲ καλουμένην μαθηματικήν)」とされるのだが，このプトレマイオスの見解は,「数学」の名が冠せられる諸学科に共通するものは何かという問いに対するひとつの答えと見ることができるだろう [70].

ここで，“ロゴス” という言葉は,『ハルモニア』の “音の調和” について論じている多くの部分では，整数比のことを意味している．しかし，前段の “見解” の部分などでは，“ロゴ

[69]“ハルモニア” の問題は，自然の解明を目指す人間にとって，常に，躓きの石であった．ルネ・デカルトの処女作『音楽提要』も，ハルモニアを論じたものであったことが思い出される．

[70] なお，この問いに関連して，プロクロスの『エウクレイデス原論第一巻註解』に,「数学的諸学を一体化させる紐帯 (*ὀ σύνδεσμος*; coniunctio) に関してであるが，それをわれわれは，エラトステネスのように，比例 (*ἀναλογία*; proportio) と考えるべきではない．というのは，比例はあらゆる数学に共通の特色と言われ，現にそうであるけれども，数学の共通の本性に，いわば遍く浸透し本質的である他の多くの特徴があるからである（[34, p.43]．訳文は [38, pp.400–401] による）」という一節がある．この文章からは，エラストテネスを代表とする人々にとって，アリトメティケーとゲオメトリアのように異なる種別の学科を「一体化」させるものが「比例（アナロゴス）」であると思われていたことが窺える.（その源は，エウドクソスによると伝えられる “数（ポソン，離散量）と量（ペリコン，連続量）の統合” で，その完成された形態がエウクレイデス原論の第五巻に示されている．なお，数と量の峻別については，第 2.2.2.3 項を参照のこと.）なお，プロクロス自身は，数学的な諸学科に上から被さって全体を束ねる「冠石」の役を果たすのは，哲学に属する「ディアレクティケー」であるとする．そして,「哲学の最も純粋な部分である弁証法（ディアレクティケー） (*ὴ διαλεκτική*; Dialectica) は，数学の上を注意深く飛び，その全体の発展を包み込み．それ自身で，個別の諸学に，完全化し，批判的，知的なさまざまな力として貢献する — それらは，分析 (*ἀναλυτική*; resolvens)，分割 (*διαιρετική*; dividens)，定義 (*ὀριστική*; definiens)，論証 (*ἀποδεικτιλεή*; demonstras) の手順である（[34, pp.42-43]．訳文は [38, p.404] による）」という．ここに，プラトンの強い影響を見ることは易しい.（例えば,『国家』第 7 巻のディアレクティケーに関する論を参照のこと.）

ス”は，ハルモニアという「音の高低を弁別し，調和の存在を見出す人間の能力」が見出した（整数比という表現形態をもつ）“もの”と同様な意味で，各種の人間の能力をそれぞれの領域に適用したときに見出すことのできる“もの”を指している．前者の意味の“ロゴスは，”英語では，通常，“ratio”, や“proportion”と，後者は“reason”と訳されるし，日本語でも，前者は“比”や“比例”，後者が“理”や“理法”と区別して訳されることが多い[71]．プトレマイオス自身の文脈を解釈すれば，ハルモニア的な能力によって事象から把握されるものが“ロゴス”であり，音の高低に見出される“ロゴス”を表現するひとつの形態が整数比ということになるのだろう．

こうして,「ロゴスについての学」が「数学（ヘ・マテマティケー）」と規定されるとき，天体の運行も，人間の魂の活動も，そこに“ロゴス”が見出される限り，それについて論じるのは「数学」の役割ということになる[72]．

## 2.3 方法論の必要性

### 2.3.1 類型化の試み

我々は歴史的な事実の詳細自体に興味があるのではなく，実践に役立つパターンを取り出すことに主眼があった．そこで，ほんのさわりではあるが，“プラトン的数学観”を類型化することを考えてみる．

“プラトン的数学観”を時間発展に沿って振り返ってみると，第 2.2.2 節で述べたように，大きく，(A) 数論と幾何等々の複数の学科の合併としての「数学」から，(B) 離散・連続等々の示差特徴による分科目への分割構造をもった単一の“一般量の学”としての「数学」へと変化していることがわかる．

まず，(A) のタイプの数学観は，少なくとも初期には,「離散量」と「連続量」を別種のものとして，統一的に捉えることを拒んでいたことから，この場合の「数学」は独立な複数個の学の集まりということになる．つまり,「複数型」とでも言うべき数学観になっていた．

それに対して，その後，エウドクソスによると伝えられ，エウクレイデス原論の第五巻に結実する“比例論”の導入によって，(B) のタイプの数学観が生まれることになったのだが[73], (A) のタイプと対比的に“学の本質的な複数性”を問題にするなら，こちらは,「単数型」とでも呼ぶべきだろう．

---

[71] そもそも，“ロゴス”という言葉の語源は，[45] に拠ると，復元された印欧祖語における“leg-”と推定され,「(秩序立てて）集める」といった意味合いをもっていたようである．ここから,「数える」や「計算する」といった意味が導かれることになる．(第 2.1.2.1 節で取り上げた「ロギスティケー」も，この系統の言葉ということになるだろう．）また，この“leg-”という祖語からは,「話す」という意味が派生したとされる．(人を集めて「話す」のか，数えることが「(声に出して）話す」ことなのか，よくわからないが.）この派生的な意味の方からは,「言葉」といった意味が導出されてくることになる．なお，ratio や reason の祖語とされる“rē(i)-”も,「数える」という意味をもち，そこから,「計算する」や「考える（推測する)」といった意味が導かれていったとされる．

[72]『ハルモニア』で展開されるこうした思想は，これを「天人相関の数の理法」とみるとき，ヘレニズム世界を離れ，世界史的な普遍性を獲得することになる．東洋におけるこうした“数”の伝統については，例えば，隋代の蕭吉の『五行大義』([41]）を参照のこと．

[73] 脚注 70 参照．

もちろん,「数学」の複数性と単数性は日本語ではわかりにくいが，とくにヨーロッパ系の言語では，用語自体の複数と単数の表示があるために意識されやすく，現在でもそれを争点とする議論がされることがある．

いずれにしても，プラトン的数学観からは，共時的に「複数型」と「単数型」という二つの数学観の類型が導出され，通時的には,「複数型」から「単数型」へと変化したとすることができるだろう．

### 2.3.2 類型化の限界と方法論の必要性

前節では，プラトン的数学観を“類型化”して,「単数型」と「複数型」の二組を取り出してみた．では，第1章で扱った「四科（クァドリヴィウム）」と称される「数学」は，単数型なのか，それとも，複数型なのだろうか．

「四科（クァドリヴィウム）」自体がひとつの類型であり，その類（クラス）には，いろいろな時代の「四科」が含まれていて，初期の時代の「四科」は複数型だが，後期の「四科」は単数型だとする，答え方もあるだろう．しかし，後期の時代であったとしても，ある集団（例えば“学校”）で教えられていた「四科」は，すべて「単数型」と言っても良いのだろうか．

そもそも，ある時代に，ある地域なり，集団なりで教えられていた「四科」が単数型か複数型であるかは，どうすれば判定できるのだろうか．同じ集団であっても,「四科」は複数型と思っている者（教師，もしくは学生）と,「単数型」と思っている者がいるということがないのだろうか．

つまりは，数学観に「単数型」と「複数型」を区別することは，今も通用する基本的な区分ではあるが，これが類型であるとして対応する類（クラス）を考えると，整合性のない混乱が起きる．アリストテレス的数学観や,「論証」というものの特徴に着目して類型化を考えることもできるが，結局のところ，同種の“整合性のなさ”に逢着することになる．

類型を具体的な事象に適用するときに生じるこうした“整合性のなさ”の一番の問題は，脚注37で示したように，同一事象が異なる複数の類に含まれてしまうという点にある[74]．結局のところ，上述の現象は，適応される事象によることではなく，むしろ，“類型化”という方法自体の限界を示していると考えたほうが良いだろう．このことは，同時に，類型化ではない，新たな方法論の必要性を示唆している[75]．

---

[74] この問題を回避しようとして，ホワイトヘッド＝ラッセルのタイプ理論風に，ある時代，ある集団，ある人ごとに異なる「四科」があって，等々の煩雑な操作を必要とする処置をすることも考えられるだろう．しかし，そうした煩雑ささえ我慢するならば正当化ができるのかということも問題である．

[75] こうした問題意識から導かれる「方法論」については，第4章を参照されたい．

# 3 数学の普遍性を把握するために

前章で「数学の多様性の記述」についての予備的な考察を行ったので，第 1.3 節で述べたように，本章では，多様性の記述の対象となった領域を規定する普遍性をどう捉えるかという問題を考えてみたい．

前章で概観したなかで，最も広大な "数学" の領域を与えるのは，プトレマイオスの「ロゴスの学」という "数学" の規定だろう．この規定自体が "ロゴス" というものによる普遍性の把握となっているが，今の我々に必要なのは，実際の数学の教育に役立つような把握の仕方なのであった．ところで，"ロゴス" はまた「言葉」でもあった[76]．数学を言語の一種とみることは，広く共有された数学観でもある．そこで，本章では,「言語」を "導きの杖" として，数学の普遍性について検討してみたい．

## 3.1 数学と言語

### 3.1.1 数学は言語か

「数学は自然科学の言語である」という言説がある．そうした主張の典型として，しばしば引用されるのは，ガリレオ・ガリレイの次の文章だろう[77]．

> 哲学は，眼の前にたえず開かれているこの最も巨大な書（すなわち，宇宙）のなかに，書かれているのです．しかし，まずその言語を理解し，そこに書かれている文字を解読することを学ばないかぎり，理解できません．その書は数学の言語で書かれており，その文字は三角形，円その他の幾何学的図形であって，これらの手段がなければ，人間の力では，その言葉を理解できないのです．それなしには，暗い迷宮を虚(むな)しくさまようだけなのです．

ガリレイの主張に登場する「数学の言語」の原語は "lingua matematica" であるから．むしろ,「ラテン語」や「日本語」いった言葉と同様に「数学語」と訳した方が良いかもしれない．では，この「数学語」という "言語" は，我々が日常で用いている "言語" と同じものなのだろうか，それとも，単なる比喩にすぎないのだろうか．

答えは，もちろん，言語の定義によることになる．近代言語学の祖とされるフェルディナン・ソシュール系の言語学者で，機能派の代表であるアンドレ・マルティネの「言語」の定義は次のようなものである．

> 言語とは，コミュニケーションの道具で，それによって人間の経験が，意味内容と音表現とを備えた単位，すなわち記号素に，共同体ごとに違うやりかたで，

[76] 脚注 71 を参照のこと．

[77] [11, p.13，日本語訳 p.57]．参考までに，原文を引用しておくと，次のようになっている；La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola ; questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

おのずから分析されるものである．この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う[78]．

ここには，ソシュールによって言語の性格として強勢がおかれた，(1) コミュニュケーションの手段であること，(2) シニフィエ（意味）とシニフィアン（表現）の結合したシーニュ（記号）を単位とするシステム（体系）であること[79]，(3) シニフィエとして音声を使用していること，が含まれている．

「言語」をこのように定義すれば，ガリレイの “lingua matematica” を「言語」とみることは困難だろう．実際，そこには，大きく二つの問題がある．ひとつは，“コミュニケーション” である．コミュニケーションを人と人の間に成立する相互作用と解すれば,「人間の書いた本を読む」ことは著者と読者のコミュニュケーションの一つの形態と見なすことも可能だろうが，“宇宙との交信” は普通の意味でのコミュニケーションとは見なされない．この問題は,「コミュニケーション」を人と人の間に成立するものに限定せず,「人と環境との相互作用」と拡張すれば，一つの解決法にはなる[80]．

もう一つの問題は，“音声による表現” である．ガリレイの比喩は，宇宙を「文字 (scritto) を用いる言語 (lingua) で書かれた書物 (libro)」に喩えるものだった．つまり，ガリレイの “lingua matematica” は「幾何学図形を文字とする」ものであって，“音声” によるものではないことになる．もっとも，この点については,「数学」だけに留まらず，そもそも「音声ではなく文字を使用する言語」自体がマルティネの定義による言語ではないことになる．

### 3.1.2 文字システムの機能

ここで，“言語” とは何かの問題は措いて，音声を用いる “言語” を「音声言語」，文字を用いる “言語” を「文字言語」と呼ぶことにしよう．マルティネ的な定義が “音声言語” に限定されている理由としては，しばしば，(1) 時間的にも空間的にも人類の言語的な営みは圧倒的に音声言語が優位であること（文字の使用期間および使用者の限定性）と，(2) シニフィアンとしての文字は「音声を転写しただけのもの」という見方の存在が挙げられる．

後者の見方，つまり，文字言語が音声言語を「文字に転写した」ものであるという見方は，言語というものの人間の営みにおける役割からみるとき，素朴に過ぎることが知られている[81]．しかし，文字が単なる「音声の転写」ではないのなら，それでは「文字とは何か」ということが問題になる．

[78] [25, 日本語訳 pp.23–24]．こちらも，原文を引用しておく; Une langue est un instrument de communication selon lequel l'expérience humaine s'analyse, différemment dans chaque communauté, en unités douées d'un contenu sémantique et d'une expression phonique, les monèmes ; cette expression phonique s'articule à son tour en unités distinctives et successives, les phonèmes, en nombre déterminé dans chaque langue, dont la nature et les rapports mutuels diffèrent eux aussi d'une langue à une autre.

[79] なお，マルティネの定義の後段（「この音表現が，こんどは弁別的かつ継起的な単位，すなわち音素に分節され，音素は言語ごとに数が一定していて，その性質と相互連関も一つの言語ともう一つの言語では違う」）は，“記号系” の言葉で述べれば，言語という系がいわゆる（マルティネの提唱による）有限生成の二次分節をもつことを要請していると理解することができる．

[80] 第 3.3 節を参照のこと．

[81]「文字が音声の転記」ではないとしても，言語学者の多くは，“音声言語” とまったく独立した “文字言語”

今，例えば，スピーチなどの録音の文字起こしといった日常的な経験を振り返ってみれば，音声で発せられた「話（パロール）」と文字で表示された「文章」とは確かに異なる性質のものであることに気づかされる．そうしたイメージを持って,「文字（というより文字システムの使用）の機能」について考えてみるなら，クルマス [7] が述べている次の見解も納得できるだろう．つまり,「文字というのは，表記されている言語についてはよく知っているので，詳細な音声的情報をほとんど必要としない読み手，つまり，テキストのなかの有意味な単位を同定するのにそうした情報に頼らないような読み手が対象となっていることが前提」であり，そのため，文字システムは,「不必要な音声的情報は除き，さらには音韻論的情報までも省略」して「発話を分割するための規約化 (conventionalize) された技術であり，その結果として出てくる単位が，語，形態素，音節，音素のような言語学的構築，さらにまた，句や文のような上位のレベルの単位と解釈することができる」ものだということである（[7, 第 2 章]）．

文字システムの特徴としては，[7] においてクルマスが指摘する次の 2 点も興味深い．

まず,「学習の必要性」である．一般に,「教えられることもなくすぐに理解できるなどという文字は，存在しない」のであり,「言語学的な関心を抱いている研究者の大半 」は「指導することで学習できる符号体系であることに加えて，学習可能性の原則が具現化されているような図形システムのことを，文字と認めている」のだという（[7, 第 2 章]）．

2 つ目は，文字システムは，その使用が「習慣的 (habitual) ではなく，規約的 (conventional) である」ということで，つまりは,「（記号論的な意味での）コードをもつ」ということである．クルマスによれば，そもそも「習慣的 (habitual) というのは，慣行 (practice) を確立するが，この慣行は，ある一定の準拠集団のメンバーによって，正しい，よい，あるいは適切であると認められ，実演して見せたり，実例を示すことで世代から世代へと伝えられていくもの」にすぎないが,「規約的 (conventional) の方は，独立して存在するコードを確立する」ものである．なお,「コードとは，記号を用いるための規約的な決まり」であり，習慣の場合に，例えば絵図のような何がしかを伝達するものではあっても，“慣行” を共にするメンバー以外が解読することが不可能であるのと異なって，文字は「自身に関する情報をコードに則って符号化している」から，慣行を共にしない他者でも「解読することができる」ようなものである（[7, 第 2 章]）．

ここに挙げた 2 つの特徴は，現在の我々が数学に対して抱くイメージと共通したものがあるように感じられるが，それは「数学」の本性的な性格を規定しているのか，それとも，数学を表現するために使用している文字言語の性格の反映にすぎないのだろうか.「数学は言語か」という問いに答えるにはそれにも答えることになるのだろう．

結局のところ,「文字 (writing) と話し言葉 (speech)」とは「様々な複雑な形で関係」はしているが,「異なる体系 (system)」であるということになる（[7, p.33]）．

---

というものの存在にも懐疑的である．しかし,「文字」の使用が音声言語とは異なる，しかし大きな，影響を人間の営みに与えたということは，かなりはっきりしたことである．このあたりの事情については，例えば，基本文献である [28] を参照されたい．

### 3.1.3　数学と文字言語

数学と言語の関係について，別の面から考えてみよう．

ここでは，言語の表現に使用する媒体に着目してみる．音声言語の使用媒体は「音波（空気の振動）」であり“聴覚”を用いるものだが,「文字言語」の場合は，動物の骨や皮，木板や粘土板，植物繊維を編みあわせたもの等々の媒体であって，主として“視覚”（ときには触覚）を用いる．結果として，少なくとも，音声を音波として再現可能な記録装置（レコード，テープレコーダー等）が発明されるまで，音声言語は「記憶」は可能でも,「記録」はできなかった．こうした媒体の性質の差に由来する,「口頭による話」の「一過性で（時間的に）“線状”に提示される」という性格と,「文字による文章」の「長期保存可能で空間的（多くは平面的）に引照可能である」いう，対照的な性格を指摘することができる．

口話と文書のこうした性格の違いを考慮に入れれば,「文字言語の使用なしに，エウクレイデスをはじめプトレマイオスといった精緻な論証を用いる原論型のギリシア語系数学の高度な達成は不可能だった」といっても良いのではないだろうか．もちろん，エウクレイデスを持ち出すまでもなく，今の日本の中学校における図形の性質の証明でも，口頭だけで可能であるとは思えない．少なくとも，数学のある部分については，文字言語の，それなしに存在しえないという意味で，深い影響下にあるというとが言えるだろう[82]．

## 3.2　「操作」から数学を見る

言語と数学の関係について，さらに別の側面から話を続けよう．

「素朴な社会では，大きな数を表示する（音声的）数詞を持たず，例えば「１，２，３，

[82] 古代ギリシアで“論証数学”が発達した原因については，さまざまに論じられている．もちろん，その理由はひとつではないだろうが,「文字言語の必要性」という観点からは，次の事実が指摘できる．

文字は，歴史的には，大雑把にみて，(1) シュメールの楔形文字や中国の漢字のような“（意味の単位である）語 (word)”を表示する「表語文字」，(2) アッカド楔形文字や日本語の仮名のような“音節 (syllable)”を表示する「音節文字」，(3) いわゆるアルファベットのような音韻的分節 (phonemic segment) の単位である“単音 (phone)”を表示する「単音文字」，の順に発達した．特に，最後の「単音文字の体系」は，母音の無表示や補助的な記号を使っての母音表示というセム語系の文字体系を経て，母音と子音が同等な資格をもつ文字体系にいたって“完成”されたとされるが，この「完成した文字体系」の発明者（使用者）こそ，論証数学の産出と同時期の植民都市に暮らすギリシア人であったことが知られている．（詳しくは，例えば，[7] を参照.)

このギリシア式アルファベットの使用によって，ギリシア人は音声言語の転写と見紛うばかり文字言語を手に入れた．その文字システムは，保存性と引照性に優れながらも，規格化の圧力は軽微であり，したがって学習が容易である．こうして，当時のギリシア人たちは，共同体のほぼ全員が使用者となりうる文字言語を得たことになる.（逆に言えば,「論証」といった概念がいまだ知られていない共同体では，例えば，長期にわたる学習を要する楔形文字や漢字を使用して，エウクレイデスの原論的な“文章”を書くことは困難であっただろう.）

このギリシア式アルファベットを使用することで，文字化することによって生じた知識の蓄積が可能となったことや，その知識の利用が共同体の多数に解放されたことは，当然ながら，さまざまな社会的な変化を生み出す．“知識”の一般人への開放は，後世“ソフィスト”と呼ばれるようになる「職業的教師」を生み出したが，そうした人々の活動の中から，論証的な数学も生まれたのではないかと想像される.（ギリシアの地理的周辺で生まれた“文字化された知識”を取り扱うソフィスト的な伝統は，アリストテレスにおいてその頂点を迎える．読み書きは奴隷階級の専門職の役割とする風潮の残滓の残る本土アテネでは，アリストテレスが同僚から“アナグノーステース（朗読する人）”と揶揄されたという伝承には，こうした事情があったかもしれない.）

論証数学が古代ギリシアで初めて生じたというなら，その原因にも，古代ギリシアが初めてであったものが相応しい．その意味で，ギリシア式のアルファベットの発明と使用は，その第一の原因に挙げることができるのではないだろうか.

たくさん」と言った」ということが伝わっている．その真偽はともかくとして，そもそも「音声的な数詞をもつ」ことと「数の概念をもつ」ことは“同値”なことなのか，という問題から始めることにする．

### 3.2.1　結縄数学

素朴な社会において，“数学的な営み”がどのように行われるかを考えてみよう．例えば，「縄に結び目を作ったもの」を数表示の媒体とするような数学，つまり,「結縄数学」がある．（詳細はたとえば，台湾高砂族の分派であるアミ族の事例で採り上げた [18] にある.）

「結縄」は，いくつかの性格を重ねもっている．まず，“数えるという操作”を実現する装置になっている.（ひとつ，ふたつ，と「唱える」のではなく,「結び目を作る」ことによる．もちろん，唱えることもあっただろうが，唱えなくても構わない.）次に,「数えるという操作が終了した結果」を記録する「媒体」でもある．もちろん，視覚的（触覚的にも可能）な媒体であり，聴覚的な音声媒体よりは「文字」に近い．

さらに，結縄は，数の“加える”および“減じる”という演算を実行する装置でもある．こうした演算は，結び目を継起的に作ったり（加法），ほどいたり（減法）するという“操作”で実現されることになる．また，そうした演算の結果を表示する「媒体」でもある．

結縄の使用者が，上述のような操作を学習者として繰り返し実行し，熟練者となった頃には,「結縄」自体が 数や演算の概念を表示していると思うことができるだろう（おそらく「文字」も同様だろう）．家畜の頭数を（規約（コード）を共有する）他者に示す必要があれば，その個数を表示する結縄を見せれば済むわけで，そこに音声的な数詞（シニフィアン）は必要でない．これで見れば,「音声的な数詞」の存在が「数の概念」の存在の必要条件であるわけではないということになる．

### 3.2.2　言語と「操作」

数学と言語の関係で考えるとき,「操作」をどう捉えるべきか，という問題がある．数学の場合,「操作」とは，最も基本的には,「数えること」であり，あるいは，筆算やそろばん，電卓でも良いが，具体的に実行される「数の計算」,「方程式を解くこと」,「行列式を計算すること」,「コホモロジー群を計算すること」等々，あるいは，図形でなら「作図」といった，“手を動かす”類のもののことになる.「数学が言語」であると考えるのならば，こうした「操作」は，言語のどういう機能に対応するのだろうか．

そもそも,「コミュニュケーションの手段」を言語の機能の第一として強調することは，ソシュールに始まる．それ以前，少なくともギリシア思想を継承する文化にあっては，言語の主要な機能として「記述」と「推論（思考の手段)」の二つを挙げていた．

「記述」は，人間が自身を取り巻くさまざまな事象からなる外部世界や感情・意志等の内部世界を“認知”した結果を“表示”するという働きであり，対象に何がしかの変化を生じさせるような「操作」とは直接的には関係しない．他方,「推論」という機能の中核は，特にアリストテレス的な伝統の下では，“命題計算”的なものに形式化されうるもののことで

あって，数学と同種の意味での「操作」といっても良いだろう．

ところで，上述の二つの機能は，いずれも，音声言語と言うよりは，文字言語の機能という方が相応しいだろう[83]．

もちろん，音声言語では不可能だというわけではないが，第 3.1.3 項で述べたような，文字言語の保存性や引照性なしに,「記述」も「推論」も十分な機能を発揮することは難しいのではないだろうか[84]．こうして,「操作」という切り口から見るとき,「数学」は文字言語に近く，音声言語に遠いということは言えそうである．

### 3.2.3 始素言語と始素数学

言語が文字言語的に捉えられていた時代に，それでは共同体や年代によって多様な姿を見せる言語の本質（普遍性）を捉えることはできない，と考えたのがソシュールである．このソシュールに影響を与えたのは，アメリカ合衆国の言語学者ホイットニー[85]の「言語は社会制度の一種である」という主張だった．

ホイットニーの主張が内包するものを十分に展開するためにソシュールが採用したアイデアが，言語を，(1) 人と人のコミュニケーションの手段であり，(2) 音声を媒体とする，と規定するというものであった．遺された講義録をみると，このアイデアに基づく，状況を理念化したある種の言語過程のモデルを設定し，このモデルを素材に思考実験をおこなうことで，ソシュールが，言語が本来的に備えている性質を掘り出していくさまを窺うことができる[86]．

数学の普遍性の探求にあたって，ソシュールのこのアイデアを生かすことができないだろうかと考えた．

まず，本稿では，言語の普遍性を調べるためにソシュールが設定したような“音声を媒体としコミュニュケーションの手段である最も単純な言語モデル”のことを,「始素言語 (prime language)」と呼ぶことにする．そして，数学においても，同じように,「始素数学 (prime mathematics)」を設定したい．

かなり乱暴で，厳密な概念規定と言えるようなものではないが，この「始素数学」として，“結縄を媒体とし第 3.2.1 項で提示した操作を備えた”ものをイメージしてみよう[87]．つまり，“数えること”，“加えること”，“減じること”といった「操作」を,「数学」の中核的な機能とみなすことにしてみるのである[88]．

---

[83] シュメールにおける文字（楔形文字）の発明が，生産管理における数値記録に由来するという有力な仮説もある（[40]）．

[84]「言語の起源が何か」という問題の立て方はナンセンスであるという見解もあるが,「音声言語の起源は，記述でも推論でもなく，人を動かすための指示・命令にある」とする考え方もある．例えば，[23] を参照のこと．

[85] 日本人にとっては，明治期,「日本の国語を簡易化した英語に取り替えることの是非」を問う森有礼に対し，その否を説諭したことで知られている．

[86] 第 3.3.1 項を参照のこと．

[87] アミ族のような素朴な無文字社会における人間の営みとしての「言語」と「数学」は，ソシュール的な始素言語とこの始素数学の，それなりに良い精度の近似になっているだろう．もっとも，本稿では議論の筋道を示すため，状況を簡易化しているが，実際には，＜数える＞という操作は,「縄の結び目」だけでなく,「指を折る」,「数詞を唱える」等々も含まれるだろう．

[88] もちろん，始素数学が唯一である必要性は，理論的にはない．ただ，目標として，第 3.3.5 項で述べるよ

### 3.3　数学と言語の普遍性を統合的に捉える

ソシュールは，我々の用語でいう“始素言語”を解析することで，(1)（単語にあたる）シニフィアンとシニフィエの対からなる記号（シーニョ）という概念の導出を行い，(2) 記号と記号の結合が（文法にあたる）コードに規定されていること，そして，(3) 記号の集合は，共時的には，コードによって規定される閉じた系をなすことを示し，この系のことを「記号系」と名付けた．こうして，言語を「そのラングが記号系の特殊なもの」と規定することで，多様な顕れを見せる言語の普遍性の把握をおこなった．

ソシュールの“記号系”を，そのままでは十分な取り扱いが困難な，少なくとも始素数学に備わるような,「操作」を包含できるように一般化することで,「言語」と同時に「数学」の普遍性も把握可能にすることを目指してみた．ソシュールの記号系を「操作」にまで拡張するという試みは，ピアジェとプリエートの業績に見ることができる．本節では，二人の見解を簡単に紹介し，その上で，我々が目指すべきものを輪郭なりと描いてみたい[89]．

#### 3.3.1　ラングと記号系 — フェルデナン・ソシュール

ソシュールは，まず，言語のもつ社会的側面 (côté social) と個人的側面 (côté individuel) という二重性に着目し，前者を“ラング (langue)”，後者を“パロル (parole)”という，著名な概念に結晶化する[90]．講義の筆記録に遺されたソシュール自身の説明では,「ラングは個人における言語活動の能力 (faculté du langage) の使用 (usage) を許すために社会集団によって採択された必要な慣例 (convention) の全体である〈定義〉．言語活動の能力はラングから截然とした事実であるが，これなくしては行使されない．パロルによっては，ラングたる社会慣例を手段としてその能力を実現する個人の行為が示される〈定義〉([39, p.419])」とされる[91]．

本項では，“ラング”の方に注目してみたい．ソシュールは，“ラング”の正体を明らかにするため，発話者と受話者の二人が「言語」によって通話を行う状況をモデル化した最簡のシステムを想定して，一種の思考実験を行った．

そもそも，言語によるコミュニュケーションの仕組みとは，単純化すれば，発話者が伝達したい意味内容[92]を物理的に伝達可能な媒体（音声）で表示（コード化）し．受話者は伝達された媒体（音声）からそれが表示している意味内容を復元（デコード化）するということである．

ソシュールは，意味内容と伝達可能媒体を抽象化して，それぞれ，“シニフィエ (signifié)”，“シニフィアン (signifiant)”と呼び，この両者の対をひとつの単位とするものを“記号（シーニョ）”と

---

うに，ある大きな枠組みのなかで，始素数学と同型な系を部分系として含む系を「数学」として定義したいということである.（始素言語に対しては，同様に,「言語」の定義が得られる.）

[89] 目指すべきものを構築するための，プログラムといったほうが良いかもしれないが.

[90] ソシュールの言語学については，文献 [39]，[19, 第 3 章] 等を参照のこと.

[91] 音声言語言語では，ラングとパロルに区分されるわけだが，文字言語であれば，さらに加えて，“記録としてのエクリチュール”が残るという見方も成り立つ．アリストテレスの「デュミナス（可能態，能力)，エネルゲイア（現実態，活動)，エンテレケイア（終極実現状態)」という三類型のひとつの例とみなすこともできる.

[92] ソシュール自身の言葉を用いれば，発話者の“脳裏に生じた「意識事実 (faits de conscience)」”である.

定めた．

「記号」については，次の三つが強調される．(1) まず，個々の記号については，シニフィエとシニフィアンの結合が恣意的なことである．ある種の果物をシニフィエとするシニフィアンを,「りんご」に選ぼうが,「apple」と定めようが，自由であって，規約であるという以上の意味をもたないということになる．(2) 一方，記号と記号の結びつきは，恣意的とはいかない．荒っぽい例えだが，人間のある種の行為をシニフィエとするシニフィアンを「食べる」にするか「eat」にするかは自由だが,「りんご」と「食べる」,「apple」と「eat」が結びつくことは許されても,「りんご」と「eat」の結びつきは許容されない．つまり，記号同士の結びつきは，コードと呼ばれるシニフィエの関係性を反映した “規約” に則っている必要がある．このように，記号を要素とする集合にコードで規定される関係性を併せて考えたものを，ソシュールは，“記号系” と呼んだ．(3) 最後に，通話者は，この “記号系” を使用して伝達したい内容を “コード化” するわけだが，伝達された内容を受話者が “デコード化” できるためには，受話者が通話者と共通の “記号系” を使用していなければならないことになる．つまり，この “記号系” は，個々の使用者に依存するものではなく，その “記号系（言語）” を使用している（言語）共同体に属するものということである．

ずいぶん大雑把な説明になってしまうが，結論を言えば，大きくは英語や日本語等々，細かくは地域や社会階層等々ごとに存在するさまざまな種類の「言語」が，すべて共通して「言語」である所以 を，ソシュールは,「すべての言語は，そのラングが記号系の一種である」という枠組みで捉えた．我々の言い方では「言語の普遍性」ということになる．なお，ソシュールは，記号系という枠が「言語」より広いものであることと，その枠における言語の特徴づけ等を内容とする「記号論（セミオロジー）[93]」と呼ばれる新たな研究分野の必要性を提案している．

ところで，言語の普遍性を「記号系」として捉えたとして，なぜ多様性が生じるのかということだが，ひとことで言えば，それは時間の作用によってパロールが変化することによる．つまり，自然言語という記号系は，ソシュールの造語した言葉でいう，“共時的[94]” にこそ安定した系だが，“通時的” には変化していくものである．そして，その変化の仕方によって多様性が生まれることになる．

さらに言えば，時間変化を起こす最も本質的な原因は，ラングとしての記号系が（上述の (3) で述べたように）“共有的 (communal)” なものであるのと同時に，記号系の使用であるパロールが “個有的 (individual)” なものでもあることによっている．つまり，目的をメッセージの伝達のみに特化したモールス信号系のような人工的なものと異なり，自然言語の場合は,「思考の手段」等々といった “個人的” な使用が可能であり，そうした使用の結果，既存のコードでは規定不能な状況が生じてしまうことにある．

いずれにせよ，ソシュールが構想した “記号系” は,「コミュニュケーション」を中心に据えたため,「記述」と「操作（推論）」という言語の機能のうち，前者に適合的な概念規定になっていた．もちろん，第 3.2.2 項で見たように,「操作」的機能は音声言語には希薄な機能だったから，音声言語に限定するかぎりでは，大きな問題ではないかもしれない．しかし，

[93] 日本語の用語としては，ソシュールの提唱した semiology が「記号学」，index，icon，symbol の三種を基本概念に展開されたパース流の semiotics が「記号論」と区別されることがある．

[94] 熱力学でいう準静的状態のようなもの．

数学について考える際には,「操作」という機能をどう捉えるかということは,「記述」以上に大きな問題である．そこで，ソシュール的な “記号系” の枠組みに「操作」を取り入れることを試みてみよう．

### 3.3.2　認知行為のモデル化 — ジャン・ピアジェ

まず，著名な発生的認識論の提唱者であるジャン・ピアジェを採り上げる．

ピアジェの興味の中心には，人間の認知機能 (cognitive functions) の発達の仕組みの解明を通じた認識論 (epistemology) への貢献があった．まず，“認識” についての “常識的” な見方と，ピアジェ自身の見方の違いを，[31, §1] に従って見てみる．

ピアジェによれば,「常識的な見方では，外部の世界は主体の身体をその中に含みながらも，主体とはまったく切り離されたものとして捉えられて」おり,「こうした考え方に従う」と，“認知 (cognition)” というものは，結局は，客体のありさまの主体への “模写 (copy)” に他ならないということになる．したがって,「このような経験的見解では，知能 (intelligence) の内容は外部からやってきたものであり，それを組織化する協応 (coordination) は言語および象徴的手段によってもたらされるにすぎない」ことになる．

その一方で，ピアジェは，認識が “模写” という受動的なものであることを否定する．実際,「客体を認識するためには，主体は客体に働きかけ (act)」て,「客体を変換させる (transform)」必要があるとされる．結局のところ,「認識は，その起源に関していえば，客体から生ずるのでもなく，主体と客体との間の（最初は解きほぐしがたい）相互作用 (interaction) から生じる」もの [95] なのだとされる．したがって，そもそも「客観性は，経験論者が考えるような最初の与件 (initial property)」ではなく,「客観性を獲得するためには，一連の知的構成体 (constructs) を必要とし，それを何度も作り直しながら次第に客観性に近づいていく」ことが必要だという．つまり，ピアジェの見解では，人間の “認知” を成立させる重要な要素のひとつに「操作」があることがわかる [96]．

ピアジェは，人間の認知機能 (functions cognitives) を，操作的機能 (fonction opératives), 形象的機能 (fonction figuratives), 記号論的（セミオティク）機能 (fonction sémiotique) の三種に分類する（[30, pp.12–14]）．“操作的機能” は「基本的行動から，高等な操作にいたるまで段階づけられており，それが対象を変換する能力によって性格づけられる」ものであり，“形象的機能” は「対象を変換しようとはせず，語のもっとも広い意味で，対象の模倣を提示しようとする」ものとされる．“記号論的（セミオティク）機能” について説明するためには少し準備が必要となる．

ピアジェのいう “記号論的（セミオティク）” はソシュール的な “記号（シーニュ）” 観に基づくものだが，シニフィアンの種別についても，次のような,「心理学的には以下のように特徴」づけられる，ソシュールの用語法を採用している（[31, §16]）．(1) “標識 (index)” は,「シニフィエから分化 (differentiate)

[95] この考え方を端的に表わすのは，人間の認知活動を,「知覚を入力とし，外的対象の変換を出力とするフィードバック・システム」として捉えるもので，例えば，ピアジェの著書 『記憶と知能』（[30]）の序章 §2 の図 1 の “ブロック線図” を参照されたい．

[96] ピアジェ理論の枠組では，数学は「操作」と関係が深い．実際，ピアジェによれば,「論理的数学的構造は対象から抽出されることを意味しない．逆にそのような構造は対象の固有性からではなく，反省的で構成的な抽象によって，対象に加えられた作用から抽出されたのである（[30, p.12]）」とされる．

していないシニフィアンであって，シニフィエの一部やシニフィエの因果的結果のこと[97]」であり，(2) “象徴 (symbol)” は,「シニフィエから分化はしているが，シニフィエと何らかの類似性を保持しているシニフィアン[98]」であり，(3) “記号 (sign)” は，象徴と同様にシニフィエから分化しているが,「規約的 (conventional) であるため多かれ少なかれ恣意的 (arbitrary) なシニフィエ」であって，象徴が「（象徴遊びや夢の場合のように）純粋に個人のものであるのに対し，常に社会的なものである[99]」とされる．

ここで，認知機能の三種の分類にもどると，最後の「記号論的（セミオティク）機能」は,「存在しない対象や知覚されていない事象を，象徴や記号（つまりシニフィエから分化したシニフィアン）によって表示する」ものであり,「言語に加えて，象徴遊び，心像，描画および延滞模倣（目の前にモデルが存在しないときの模倣）」を含むようなもののこととされる（[31, §16]）[100].

この枠組みの中では，“言語” はどのように位置づけられるのだろうか．ピアジェは,「言語は記号論的機能に属しているものの，部分的にしか形象的でない」ものであるとし,「幼い子どもほどその言語は形象的であるが，年長になるほど，とりわけ形式的操作においては形象性を失っていく」ことになると述べている（[31, pp.717–718]）．したがって，我々が興味をもつ「数学」と「言語」の関係は，この文脈では，操作的機能と記号論的（セミオティク）機能の関係に包摂されることになる．

ピアジェの描く “操作” と “記号” の関係の基本的枠組みは，発達的な観点からは（子どもから大人へという生物学的な意味での発達でも，大人になってからの学習過程といった意味での発達でもよいが），ひとことで言えば，操作的機能から形象的機能を経て記号論的（セミオティク）機能に至るというものになる．

ここで，“操作” から “形象” に至るにあたっては，ピアジェが導入した「シェム (shème)」という概念が重要になる．ピアジェによれば,「シェムは行為において繰り返され一般化されうるものをさす」とされ，例として「たとえば，棒やその他の道具で物を “押す” とき，“押しのシェム” というのは押すという行為に共通するところのものである」と説明される（[31, p.719]）[101]．我々の関心に引き付けていえば,「数える＝縄に結び目を作る」という行

---

[97]「たとえば，乳児にとって人の声を聞くことは何者かがそこにいるということの標識である」と例示されている．

[98]「たとえば，象徴遊びにおいて，白い石はパンを，草は野菜を表わすように」と例示されている．

[99]ソシュール的な記号は，シニフィアンとシニフィエの対のことだから，ここで示されているのがシニフィアンの分類であるなら，その一種に「記号」が来るのは，厳密にはおかしい．正確には,「象徴ではない記号のシニフィアン」のことと読み直す必要があるだろう．こうした混乱の原因のひとつに，ここでは，シニフィアへの言及がないことが挙げられるかもしれない．大雑把に言えば，ピアジェにとってのシニフィエは，シニフィアンの種別によらず，後述の “シェム (shème)” と呼ばれるものになる.（脚注 102 を参照のこと.）

なお，ここで扱われているのはピアジェの用語法であり，象徴もシニフィアンではなく記号の一種，標識もシニフィアンとシニフィエが分化していないという自明な記号だと思って，記号一般の「標識，象徴，それ以外の記号」という分類と見なす立場もある．

[100]ここにも多少の用語法の混乱が見られる．前段でのシニフィアンの分類で「象徴」と「記号」を分けたが，機能としては,「象徴」と「記号」の両者を合わせたものを「記号論的（セミオティク）」と呼んでいる．ピアジェの用語法ではなく，一般的な文脈では，言語も含めて「象徴的機能」と呼ぶこともあるが，ピアジェ的に「象徴的機能」をここの意味での「象徴」を用いるものに限定するなら，象徴的機能より「記号論的機能の方が広い意味をもつ」ことになる（[31, p.717]）．

[101]「シェム」と似た用語に,「シェマ (shéma)」がある．こちらの方は,「操作」ではなく,「形象」の方に関係する用語であり,「記憶的イメージ (memory images)」（より一般に「心像 (mental image)」と言ってよい）は,「イメージ自身も図式化 (schematized) されているが，それはシェムとはまったく異なった意味においてで

為（操作）を繰り返すうち，縄の素材や長さ，結び目の作り方等々の具体性が捨象され，ひとつの“もの”に定式化されていく．それを，“「数える」のシェム”と呼ぶことになる．

以上に準備された概念装置類から想像がつくように，操作的機能から形象的機能を経て記号論的（セミオティク）機能に至る過程は，次のように説明される（[31, p.717]）．

> 標識から象徴，記号への移行（言い換えれば，記号論的（セミオティク）機能を特徴づけるシニフィアンとシニフィエの分化のはじまり）はおそらく模倣の進歩に求められる[102]．というのは，感覚運動期の模倣はすでに具体的行為による一種の表象 (representation) となっているからである．模倣が延滞化し，イメージとして内面化してくると，それは象徴の源泉となり，言語獲得を可能にする交換 (commutative exchange) の道具 (instrument) となる[103]．

先の例を続ければ，結縄の操作を通じて形成された“「数える」のシェム”をシニフィエとして，(1) “象徴”を使用した段階では，模倣を通じて内在化された心像 (mental image) としての「結縄」（あるいは，物理的な実在（もの）としての「結縄」）がシニフィアンとなり，(2) “記号（音声言語）”の段階では,「かぞえる」という音声がシニフィアンとして選ばれることになる．

ピアジェにあっては，結局のところ，“操作”は，直接的にではなく，“シェム”という媒介要素がシニフィエとなることで，“記号系（言語）”と関係するという枠組みをもつことになる．

### 3.3.3　双面構造と共示 — ルイス・プリエート

本項では，アルゼンチン出身の言語学者で，記号学（セミオロジー）にも重要な貢献をしたルイス・プリエートを取り上げる[104]

プリエートの仕事の中でわれわれに関心があるのは二つのことで，一つは，本項の主題である「操作を記号系の対象に取り込むこと」であるが，もう一つは，前者の議論の前提となる「シニフィアンとシニフィエが対になって記号（シーニュ）をなす」というソシュールのアイデアを「クラスとクラスの対構造」へと拡張したことである．

最初に，後者の話題についての，ソシュールの影響を受けたデンマークの言語学者イェルムスレウによるアイデアから始めたい．イェルムスレウは，記号（シーニュ）の対を構成する“シニフィエ”に相当するものを「内容面 (indholdsplan, content plane)」に，そして“シニフィアン”

---

ある．というのは，イメージはいかに概略的 (schematic) であっても，それ自体はシェムではないからである．イメージの図式性を指示するために，シェマという用語を」使うのだとされる（[31, p.719]）．

[102] ここで問題とされているのは，シニフィアンの変化であることに注意．ピアジェにとって，シニフィエは，一般的に述べて，シェムであった.（例えば，[30, pp.13–14] を参照のこと.）

[103] 言語のもつ社会性（共有性）は，どこで獲得されるのだろうか．ピアジェの主題が各個体の発達過程の解明であるため，記号論的（セミオティク）機能のもつ社会性は，一般には，二次的な扱いを受けることになる．例えば，脚注95で述べたシステムでは，社会性の関与は，個人の内部で生じる種々のフィードバックに繰り込まれてしまう（[30, pp.14–15]）．

[104] 本項で扱う内容については，文献 [26]，[32]，[33] を参照されたい

のそれを「表現面 (udtryksolan, expression plane)」と名付け，それぞれが単一の要素からなるものではなく，自由度をもつものであると明示した [105].

プリエートの独創は，イェルムスレウが面 (plane) としたものを，クラス（集合）に一般化し，そこに集合論的な種々の操作を持ち込んだところにある．シニフィアンのクラスとシニフィエのクラスは，その対が「記号《シーニョ》」と呼ばれるに相応しいものであるために，集合論的に記述されるような特有の関係性をもつ必要がある．プリエートは，そうした関係を「双面構造 (bifacial structure)」と呼び，この双面構造をもつ二つの集合の対として「記号《シーニョ》」を定める，と定式化している．特に，プリエートは，記号的過程《セミオティク》に本有で自然な“単位 (unité)”を，ある種の極大・極小条件を満たす「記号《シーニョ》」として定式化し，それを，記号学者エリク・ビュイサンスの用語を借用して,「セーム (séme)」と名付けている [106] .

もう一つ，プリエートがイェルムスレウから継承したものに,「共示 (connotation)」がある.「共示」とは，大雑把にいえば，シニフィエのクラスの要素が，別種の“系《システム》”の要素からできているような状況を指しており，つまりは，シニフィエのクラスがある種の階層構造をもつことを示唆するものになっている．

ここで，わざわざ「別種の系《システム》」と言ったのは，コミュニケーションの手段として取り出された「記号系」に限らないからであり，結論からいえば，この系は，プリエートが“インストゥルメント”と呼ぶものからなる系《システム》になる．そして，この“インストゥルメント”によって，プリエートは，ピアジェ同様，認知と操作《オペレート》という問題と取り組むことになる．

認知と操作を結ぶ鍵として，プリエートが着目したのが，“道具 (outil, tool)[107]”だった．

---

[105] [12] を参照．また，この文献でイェルムスレウが指摘しているように， ソシュールが，シニフィアンやシニフィエを単一の実体と明記しているわけではなく，“面状”であることを示唆している箇所もある．

[106] 集合論的な議論を展開するにあたって，プリエートが拠ったのは，タルスキーの論理学の著作（第 2 版の J.Tremblay によるフランス語訳 “Introduction à la logique” であり，今，我々が親しんでいる集合論の記法とは少々趣が違っている．また，プリエートの双面構造は公理系として整理されるまでには至っていないのだが，大雑把には次のような“感じ”になる．

双面構造とは，外的空間 (external space) と内的空間 (internal space) と呼ばれる 2 つの集合 $U$ と $W$ ，それぞれのベキ集合の二つの部分集合 $\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{W}$，および，この部分集合の間の，$U, W$ における包含関係を保持するような写像 $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{W}$，の五つ組 $(U, W, \mathfrak{U}, \mathfrak{W}, \Phi)$ で与えられる構造である．さらに，言語（もしくは，コミュニケーションの手段としての“記号系”）の場合は，$A \in \mathfrak{U}$ と $B \in \mathfrak{W}$ が，$B = \Phi(A)$ という関係にあるとき，組 $\sigma = (A, B)$ を 記号 (sign) といい，$A$ を $\sigma$ のシニフィアン，$B$ をシニフィエと呼ぶことになる．また，$B$ が（$W$ の包含関係で）極小かつ $A$ が（$U$ の包含関係で）極大のとき，記号 $\sigma$ は,（エリク・ビュイサンスの導入した）セーム (séme) に対応する．さらに，マルティネのいわゆる“第一次分節”は，部分集合の族への分解に相当することになる．

乱暴に述べ，文章でイメージすると,「記号《シーニュ》」は「語」であり,「セーム」は「文（全体)」にあたる．文も語も，“意味の世界”では，それぞれが対応する意味のクラスをもつことになるが，語の連結で文が決定されるということは，文に対応する意味のクラスが，語群に対応する意味のクラスの族の共通集合となることを意味している．

実は，文字言語は別として，音声言語の場合,「語」という“単位”を取り出すことは，種々の困難性をはらんでいる．口話《パロル》から単位《ユニテ》を取り出すことの困難さを指摘したのはソシュールであったが，その課題と悪戦苦闘を重ねたのがイェルムスレウだった．プリエートは，単位を取り出す問題を,「一般のクラスを極大条件を満たすクラス群へ集合論的に分解する」という形式に読み替えた．プリエート自身は気づいていないかもしれないが，当然ながら，そうした分解が存在するというのは自明なわけではなく，分解したければ，何らかの完備化といった操作が必要になる．いずれにしろ，アイデアという意味では，イェルムスレウが理想数を求めて泥沼にはまったクンマーであるとすれば，プリエートはイデアルを導入したデデキントのようなものと評することができるかもしれない．

[107] この“道具”は，人工的なものばかりでなく,「手，歯，足」などの自然的なものも含むとされる．

人間は，“道具” を操作することで，世界について認知することががができるし，逆に，世界を認知することが “道具” の使用を可能とすることになる．こうして,「あらゆる人間の行為は，プリエートによって，常に認知過程と捉えると同時に，インストゥルメンタルな行為 (instrumental act) として捉え」られることになる（[26, p.101]）．

“インストゥルメント (instrument)” という言葉だが，プリエートは，著書 [33] において，この言葉と “道具 (outil, tool)” を区別して用いると宣言している．プリエートは，人間の営みにおける道具というもののもつ本有的な性格を,「目的を達成するための手段」とみる．「長さを測る」という目的を達成するための手段が道具の本質であって，したがって，それが，物差しであろうが，巻尺であろうが，同一の目的を達成できるのであれば，手段としての道具としては “同じ” ものと見なすべきということになる．つまり，目的も手段も，複数の要素からなるクラスをなしており，両者のクラスの対であることに，道具の本質があると考えるわけである．なお，プリエートは，目的，手段ではなく，それぞれを,「ユティリテ (utilité)」と「オペラント (opérant)」と呼ぶ．そして，ユティリテのクラスとオペラントのクラスの対として得られる概念が,「インストゥルメント (instrument)」であると規定される．

3.2.1 節の結縄を例にすれば，{ ＜数える＞ } というユティリテのクラスと，{ 「細い縄」,「太い縄」,「長い縄」, … } というオペラントのクラスの対として，インストゥルメントとしての＜結縄＞を捉えるということになる [108]．プリエートに心理学的な関心はなかったと思われるが，この “インストゥルメント” とピアジェの “シェム” にはあきらかに類似性がある．

ここまでくると,「ユティリテとオペラント」と「シニフィアンとシニフィエ」との類似性はあきらかであろう．実際，プリエートは,「ユティリテとオペラント」の対構造を規定するのが,「シニフィアンとシニフィエ」で導出した “双面構造” と相等であると主張している．さらにいうなら,「ユティリテとオペラント」の方が，つまり,「インストゥルメント」の方が一般性のある概念であって,「シニフィアンとシニフィエ」，つまり,「セーム」は，コミュニュケーションという特化された人間行為の仲介するための「インストゥルメント」の一種であるとされるのである．

我々の関心に即して言えば，プリエートは,「記号系」を「インストゥルメントの系」に拡張することで,「言語」と同等の立場で「操作」を包含できるようにした，と言うことができるだろう [109]．

[108] 脚注 87 で少し触れたが，＜数える＞と “意味” される操作には,「縄で結び目を作る」以外にも,「指を折る」だとか,「数詞を唱える」などがある．理論的には,「縄で結び目を作る」オペラントに対応するインストゥルメントを＜縄で数える＞,「指を折る」の対応物を＜指で数える＞,「数詞を唱える」の対応物を＜唱えて数える＞等々とすれば，まずは，各々が別種のインストゥルメントになる．そして，入れ子構造として，{ ＜縄で数える＞，＜指で数える＞，＜唱えて数える＞，… } という “インストゥルメントを要素とする” オペラントのクラスに対応するインストゥルメントとして 《数える》 が得られることになる．大雑把に言えば，プリエートが「共示 (connotation)」と呼んでいるのはこの入れ子構造のことと言ってもよいだろう．

[109] プリエートの定式化では,「記号系」も「インストゥルメントの系」も,「言語」のもつ社会性（共有性）を反映しているように見えない．大雑把に述べると，プリエートの定式化では,「シニフィアンとシニフィエ」も「ユティリテとオペラント」も，それぞれの要素となるクラスは全く任意なものではなく,「相互了解の体系 (système d’intercompréhension)」と名付けられた共同体の成員に共通なある系の要素に含まれるものでなくてはならないとされ，ここに社会性の反映が与えられていることになる．もちろん，こうした位置づけだけでは，言語の通時的な変化を十分に捉えることは難かしいだろう．

### 3.3.4　記号系から統号系へ

本節では,「数学」について考察する際に欠かせない「操作」を，記号系との関係でどう捉えれば良いかということを問題としてきた.

まず，ピアジェもプリエートも，この問題が「人間の認知構造」そのものを問題としているという態度では一致している．しかし，ピアジェが，この課題を，実験科学的手法や生物学を包含する発達心理学という大きな枠組みのなかで捉えるのに対し [110] ，プリエートの方は，あくまで言語を “記号系” としてより適切に捉えることを目的とし，思弁的で形式的な方法を採用している.

さて，我々の問題に戻ろう．“数学の普遍性” についての最初の礎として欲しかったのは，あくまで “理論的” に捉えるための枠組みであって，実践的な問題解決に “直接” 役立つようなものではない [111]．したがって，繁雑ではあっても形式的な明晰性を備えたプリエート的な枠組みこそ望ましい，と考えている．もちろん，記法の整備や，公理系としての整理は必要であろう.

いずれにせよ，議論のための便宜として，仮にも名前を付けておくことにしたい.

ここでは，“sign（記号）” や “instrument（インストゥルメント）” に替わる基本概念として “seme（セーメ）[112]” の用語を採用することとしたい [113]．また，日本語としては，今まで「セーム」を使ってきたが,「記号」との差別化をはかるために,「統号」という用語を用いることにしたい [114]．つまり，数学的な “操作” を言語と共に把握するための枠組みとして,「双空間構造 [115] をもつ “統号系” (*Seme System* endowed with Dual Space Structure)」を採用することになる.

さて，上で構想した “統号系” は，“操作” を言語のラングと同様な形式で包摂する系(システム)になっていた．したがって，本節の目的の一方である “操作” については良いとしても，もう一方の “社会性（共有性）” については，十分に把握しきれていない [116]．言語や数学の “社

[110] もっとも，ピアジェの目指す,「連合ではなく，同化」というアイデアは，プリエートのアイデアでこそ実現可能なのかもしれない.

[111] 第 1.3 節で述べたように，実際的な問題解決に役立つのは,「普遍性の把握」ではなく,「多様性の記述」の方だと考えている．なお，ソシュールは「記号学の正確な所在 (place) を規定することは心理学者にゆだねている．言語学者の任務は，言語を記号学的な事実の全体 (ensemble) における，一つの特別な体系 (système) としているのは何かを，定義することである（[39, p.33]）」と述べている．ソシュールのいう “心理学者” は，今なら，脳科学者とでもいった方が良いかもしれないが，我々の興味は，ソシュールのいう “言語学者” の側にある.

[112] プリエートの用語「séme（セーム）」は, ギリシア語の σημε をフランス語風にラテン文字化したものだが, ここでは，英語風に「seme（セーメ）」とラテン文字化してみた.

[113] プリエート自身は,「ユティリテ，オペラント，インストゥルメント」の 3 つ組を，ソシュール的な流れで得られた「シニフィアン，シニフィエ，セーム」を包含する，より一般的な用語としている．ただ,「ユティリテ，オペラント，インストゥルメント」の構造を規定している “双面構造” は，そこに人間が “意味” を見出すところのものを本質としているという点において，そこから規定されるものとしてなら,「シニフィアン，シニフィエ，セーム」の方が相応しいのではないかと考えることもできる.

[114] プリエートの著作の訳者の丸山圭三郎氏は「セーム」を「統号記号」と訳しているが，記号の一種というより記号より基本的であるという趣きで,「統号」と呼ぶことにしたい．なお，“seme” の語源は，ギリシア語の σημε であり，署名を意味したらしい．“人間の名前” を口にしたり書いたりすることの禁忌をめぐる古代的な思惟を思い浮かべれば，σημε の訳語は，東洋漢字圏の伝統の下では「名号」がふさわしいのかもしれない.

[115] プリエートは，イェルムスレウに由来する plane を尊重して “双面構造” という用語を用いていたが，一般性を強調するため，“平面” ではなく “空間” とすることにしてみた.

[116] これは，“記号系” 自体のもつ困難さを引き継いでいる．実際，脚注 103 や脚注 109 で述べたように，ピア

会性（共有性）”を十分に反映するためには，“共同体”の上にあって，構成員である各個人に“分有”されたものが，上述の意味の記号系なり統号系であるような“系”であるべきだろう．

こうした“系”は，手順としてはよくあるものではあるが，次のように構築されることになるだろう．

まず，共同体の各構成員に付随する“統号系”を考える．（こうした状況を明示するために，この種の統号系を，“局所統号系 (local seme system)”と呼ぶことにする．）次に，個々の構成員の集合体としての共同体を基礎空間とし，ファイバーを個々の構成員の局所統号系とするようなファイバー空間を考え，しかるべき“大域切断面 (global sections)”の集合として，我々の欲しかった“大域統号系 (global seme system)”を構成することになる．これこそは，ソシュールが「（ラングは） パロルのやりとりによって同じ共同体に属する主体のなかに預託された宝庫 (trésor déposé) であり，各人の脳裏 (chaque cerveau)，より正確にいえば，個人の集合の脳裏 (cerveaux d'un ensemble d'individus) のなかに，潜在的に存在する文法体系である．ラングはいずれの個人においても完全なものではなく，大衆のなか (dans la masse) にしか完璧に存在しないのである」と述べた（[39, p.30]）ところの，“ラング”という言語の社会的側面の本質であろう．

もちろん，ことはそう簡単に進むわけではない．まず，異なる構成員の局所統号系の間のしかるべき“同値関係”が定められていないと，“断面 (section)”を定義することが困難になる．しかし，そもそも意味の疎通が可能であるからといって，発信手と受信手のもつ統号系（記号系）が“同型”であるとは限らない．哲学者のヴィトゲンシュタインは，むしろ積極的に，それは同型ではありえないと主張しており，そこで成立する関係は，同値（同型）関係ではなく，「家族的類似性 (Familienähnlichkeiten, family resemblances)」に他ならないとしている[117]．つまり，“同値関係”に替え，推移律を満足するとは限らない“家族類似性”に則って統号系の間の関係性を繋いでいく必要があるから，実際には，ある種の完備化を行った“人工的な系”としてでなければ，“大域統号系”は存在しえないだろう[118]．

---

ジェにせよ，プリエートにせよ，“記号系”はあくまで各々の主体に属するもので，社会性（共有性）の方は，いわば，アド・ホックに繰り込まれることで実現されていた．

[117] ウィトゲンシュタインは，“言語というゲーム”を支配している類似性について，「わたくしは，このような類似性を“家族的類似性”ということばによる以外に，うまく特徴づけることができない．なぜなら，一つの家族の構成員の間に成り立っているさまざまな類似性，たとえば，体つき，顔の特徴，眼の色，歩き方，気質，等々も，同じように重なり合い，交差し合っているからである」と述べている ([48, p.36])．

[118] マックス・ヴェーバーの次の評言は，このあたりの事情を指していると思っても良いだろう．「幼稚な文献学者は，ある言語を，まずは“有機体説的”に，つまり規範によって支配された超経験的な全体として念頭に浮かべ，科学の課題は，何が文法規則として妥当すべきかを確定することにある，と考える．“文語”を論理的に加工し … その内容を規則にまで還元することが，通常“文献学”が設定する最初の課題である．ところが，これにたいして今日，指導的な文献学者は，“各個人の話し言葉”こそ，文献学的研究の対象である，と宣言している．しかし，そうした構想を立てること自体が，もっぱら，文語のなかに相対的に確定した理念型があって，無限に多様な話し言葉を徹底的に究めようとするさいにも，そうした理念型を（少なくとも暗黙のうちに）使用することができるからこそ，可能なのである（[46, 日本語訳, p.143]）．」逆に言えば，ヴェーバーのいう“理念型”は，（局所統号系からなるファイバー空間を）完備化した大域統号系の要素を取り出すことに対応していると思うことができる．

### 3.3.5 数学の普遍性

我々が範としたソシュールは“言語の普遍性”を「言語とは，そのラングが記号系の一種であるものである」として把握した．これに倣って数学の普遍性を捉えるには，まず，言語の場合のラングとパロールに対応するものを規定しなければならないが，数学の場合も，ソシュールのアイデアを適用すれば，おおむね同様な概念規定が可能ではないだろうか[119]．ただ，ラングとパロールという用語では，言語に寄りすぎている感が強いので，より一般的な名称を使い，「共有方式 (communal schema)」と「個有的使用 (individual usage)」と呼ぶことにする[120]．

数学の共有方式は，言語のラングにあたるものであるから，前 3.3.4 項で述べた（大域）統号系の一種になるわけだが，それだけでは，数学と言語の違いが表わせない．ここでのアイデアは，第 3.2.3 項で述べた「始素数学 (prime mathematics)」を芯にするということである．つまり，最簡“モデル”である「始素数学」を考え，“数学”と呼ぶ以上は「始素数学」を共通に含んでいるべきであるし，逆に，この「始素数学」を含んでいるようなものを「数学」と呼ぶことで数学の多様性を束ね得る普遍性を捉えることにしてはどうだろうか．

始素数学の共有方式を部分系として含むような統号系を「数学的統号系 (mathematical seme system)」と呼ぶことにすれば，“数学の普遍性”は，「数学とは，その共有方式が数学的統号系であるものである」として把握されたことにならないだろうかということである[121]．

なお，第 2.2.4.4 項で挙げたプトレマイオスの数学観（「ロゴスにもとづくものに共通する学は，特に数学と呼ばれる」）との関係でいえば，「数学的統号系である共有方式」がロゴスであり，その共有的使用が「数学」ということになるだろう．

---

[119] 古典的な公理主義なり，ブルバキ的な構造主義なりに親しんでいる者にとっては，数学が，ある種の規約的な部分と，それをさまざまな状況の中で実現するような営みの部分に分けられること自体は，違和感はないだろう．ただ，こうした公理やブルバキ的な構造は，言語の場合での“規範文法”に相当するものと見るべきだろう．ソシュールにおけるラングとパロールの区分は，“社会的（共有的）”な規約の側面と“個有的”な使用の側面の，共時的には前者が後者を規定しながら，通時的には後者が前者を規定するという，相互依存的な関係性が本質であったから，規範文法的な，前者が一方的に後者を規定するようなものは，ある種の自明性をもった特殊な場合としてはともかく，歴史的に人類が“数学（もしくは類似した名称）”と称した営みの多様性や教育の対象としての把握には適していない．

[120] チョムスキー風に，competence と performance と呼ぶという選択肢もあるが，ここでは，イェルムスレウの用語の方を一部借用した（詳しくは，[18] を参照）と．なお，“共有的 (communal)”と“個有的 (individual)”は，言語だけでなく数学についても，特に教育の観点から取り扱う際には，最も基本的で重要な区分になっている．

やはり言語の例（つまりラングとパロール）だが，「今日の天気は fine だから，気分は très bien だね」という文は，何がしかの意味を読み手に伝えているという意味では，立派に“パロール（言語の個有的使用）”になっている．一方，「これは日本語なのか」という問うなら，本来的には，ラング（言語の共有方式）の問題になる．乱暴に言ってしまえば，受け手に意味が伝わるという言語の機能を満たしていることが「パロール」であり，したがって，原理的には，パロールはすべて“個有的な使用 (individual usage)”になる．ただ，原理的にはそうであっても，その言語を共有している集団におけるしかるべき規約に則っていると承認されるような表現，つまり“共有的使用 (communal usage)”は，近似的にしか成立しないとしても，教えたり学んだりする対象としては，実務的に重要な役割をもっている．「規範に則っている言語表現」という言語教育においては当然視される事象が，数学の教育においてしばしば軽んじられる傾向があるのは，この“共有的”と“個有的”の区分が意識化されていないからなのかもしれない．

[121] 文字言語は言語であるかといった類の問題も，同様のアイデアで，始素言語のラングを部分系として含むような言語的統号系を定めておき，「言語とは，そのラングが言語的統合系であるようなもの」と規定することで，より精密に議論できるようになるだろう．また，この統号系という枠組みによって，教育との関係で捉えたソシュールによる言語学の分科構想を数学の場合に拡げることができる（[19]）．

# 4　教育数学の試み

## 4.1　プラットフォームとしての「教育数学」

本稿の「はじめに」で，教育数学とは，まずは「教育を明確に意識しながら数学を営む」という姿勢であると述べた．もちろん,「数学の教育」と呼ぶことが可能であるような営みは，それがどのようなものであったとしても,「教育」というものについての何がしかの了解が前提されていなければならない．しかし多くの場合，そうした了解が営みの当事者たちに意識されてはいないようである．そうした状況と対比的に,「教育数学」では，“明示化された教育観” の下で数学を営むことを想定している.（「数学の教育」という実践的な営みを規定するものは，教育観だけではない．第 1 章で見たように，数学観も，また，重要な役割を果たしている.）

数学を教えたり学んだりといった行為の底に横たわる “教育観” や “数学観” は，通常，行為の当事者がそれを意識化したとしても，行為者が属する部分社会が暗黙裡に共有している見解の断片しか出てこないだろう．それに対して,「教育数学」において前提される “教育観” や “数学観” は，暗黙裡の断片ではなく，明示化され系統立ったものであるべきだと考えている．もっとも,（たとえ理想的なものであったとしても）どこかから出来合いの “教育観” を持ち出して，現実の数学の教育活動を無理やりその頸木に繋ぎとめようということではない．また,「教育数学」が現実の教育に役立つものであるためには，この現実のなかで実現可能なものであることが必須であることは言うまでもない．

このように，明示化され，系統的に整理されており，数学の教育に携わる人々が共通に利用可能であるような “教育観” や “数学観” のことを，議論のための前提とか土台であるとかという意味で,「プラットフォーム」ということがある．教育数学の目的のひとつは，数学の教育を実践したり論じたりするための「プラットフォーム」を提供することにある．

それでは，数学の教育を実践し論じるための「プラットフォーム」とは，どのようなものなのだろうか．最終的には，脚注 5 や脚注 20 で述べた “構造化された一覧” といったものになるのかもしれない．しかし，この一覧的な記述について，その単位を伝統論理学的な概念（類型）にするとうまくいかないことは，第 2.3 節で示した通りである．したがって，プラットフォームとしての教育観や数学観を提示するためには，“概念” 以外の “単位” を組織的に用いる「方法論」が必要になる．

本章では，“教育観” の記述を例として，こうした多様性を記述する「方法」について簡単に触れながら，教育数学という試みの構想の一端を紹介してみたい．

## 4.2　型式と枠式

まず，多様な “教育観” を整理するための基本的な切り口として,「目的」と「手段」をとってみよう.「目的」と「手段」は，教育に限らず，人間の有意味行為が関与する事象（教育はその一種）を把握するための基本的な枠組みとして，マックス・ヴェーバーによって強調

されたものである [122].

例えば,「製造業で設計職に就くために必要な知識や技能を身につける」ための教育と,「民主社会の一員として，政治的・経済的に適切な判断を下すために必要な知識や身につける」ための教育とでは，“目的” という切り口が教育観の相違を表わしていると見ることができる．このように，“目的” の細分として,「職能型」とか「全人型」等々をとることができるが，さらに「職能型」の細分として「製造業型」や「設計職型」，等々を設定していくこともできる．同様に，“手段” についても様々な型や部分型を設定していくことにしよう．最終的に，得られた型や部分型のラベルを，型同士のしかるべき関係や，型と部分型の包含関係を反映するような一覧にすることで，目的–手段という枠組みを表現できるだろう．そうした “構造化された一覧” で “教育観” を記述しようというのが，基本的なアイデアである．

ところで,「目的–手段という枠組み」は，教育に関係する諸々の事象を整理するための区分としては，“相対的” なものであって，絶対的に固定化できるようなものではない．例えば,「消費税や貯蓄・借用金の利子等々の計算ができる」ことは,「消費者として適切な行動がとれる」という “目的” に対する “手段” だが，一方,「小数の計算ができる」ことは，“目的” としての前者（「利子等々の計算ができること」）に対する “手段” と見なせるだろう．同様に,「筆算による計算ができる」ことは,「小数の計算ができる」という “目的” に対する “手段” と見なすことができる [123].

“目的と手段” のこの “相対性” は，関心の対象でありうる個々の事象を，目的と “見なす” ことも，手段と “見なす” こともできることを示している [124]．したがって，そうした事象の総体を，“目的” というクラスと “手段” というクラスに（排反に）分けることはできない [125].

[122] 例えば，ヴェーバーは,『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』論文（[46]）において,「意味をそなえた人間の行為 (sinnvollen menschlichen Handelns)」というもの全般について,「その究極の要素を抽出しようとすると…そうした行為が「目的 (Zweck)」と「手段 (Mittel)」の範疇（カテゴリー）に結びついていることがわかる」と述べている．なお，ヴェーバーは,「行為者」が何らかの「手段」を用いてしかるべき「目的」を達成しようと「意欲」している状況を設定した上で，そこで “学問的な考察の対象となり得る” ことについて，大略，次のように説いている．(1) 目的への手段の適合性の評価，すなわち，所与の目的について，いかなる手段が適合し，また適合しないかを，その時代的な知識の限界内で，ある妥当性をもって確定すること，(2) 所与の目的を達成する可能性がありそうな場合に，そのために必要な手段を現実に適用することに随伴して生じる結果（意図した所期の目的達成の他の副次的諸結果や犠牲）を確定すること，(3) 目的の根底にある，もしくは，ありうる「理念 (Idee)」を開示 (Aufzeigung）し，論理的な連関をたどって展開することによって，行為者が意欲し，選択する目的を，その連関と意義に即して，行為者自身に自覚させること，(4) 意欲された目的とその根底にある理想 (Ideale）を，ただ単に理解させ，追体験させるだけでなく，とりわけ，それらを批判的に「評価する (beurteilen)」こと（文献 [46] を参照のこと）．以上の 4 点は，目的–手段関係を有する行為に関する考察が学問的であるための，一種の判定基準を与えているとみなすこともできる．

[123] この例は,「目的–手段関係」の実際的な適用では，一種の入れ子構造をなすこともあることを示している．他にも,「消費税の（実際）計算」を目的として「小数の計算（練習)」を手段とするという見方もあれば,「小数の計算」を目的として「（動機付けのための）消費税の計算」を手段とする見方も成り立つ．

[124] ここで強調しておくべきことは，こうした目的–手段関係は，あくまで “判断主体” が，状況 (context) に依存はするものの，本質的には自らの自由意思で，そのように “見なす” ことにより，その関係性が成立することである．つまり，主体の意思決定に依存する複数性をもつことから，実践的な営みであるということになる．（脚注 18 参照）

[125] もちろん，中身としては同一の事象であっても，“目的” と見なすときと “手段” と見るときとを別のタイプに属していることにするため，同一事象のたくさんのコピーを作って，目的や手段のタイプごとの事象を作っておけば，クラスに分けることは可能である．ただし，脚注 74 でも述べたように，例えば，ホワイトヘッド＝ラッセル流のタイプ理論を思い出せば想像がつくように，そうした操作を行うのは煩雑に過ぎるだろう．なお，こうしたクラス分けを “理論的” に精密に実行するということは，第 3.3.4 項で述べた “統号系” を考えることに相当する．

つまり，ある事象が目的のクラスに属するとか，あるいは，手段のクラスに属するという言い方は事態を正確に表しておらず，むしろ，“見なす”（という主体の判断）によって，事象に目的型や手段型といったラベルを貼ると言う方が自然である．大雑把に言って，こうした見方で提示される「目的型」や「手段型」を，クラス分けに基づく「概念 (concept)」と対比的に,「型式 (morphic type)」と呼ぶことにしている．

さらに言えば，この型式としての「目的型」と「手段型」には，両者を組として捉えることで生じる役割がある．例えば，本節は冒頭で，マックス・ヴェーバーが「人間の有意味行為は “目的と意味” のカテゴリーと結びつく（脚注 122）」と述べたことから始めたのだが，それでは,「意味の有する人間の活動」と「意味を有さない人間の活動 [126]」との区別をどのようにするのかという問題を考えてみよう．ここで，人間の（「反射」等々も含む）活動の総体に，目的型と手段型という型式を適用可能な領域を想定し,「我々の関心は，この二組の型式が適用可能な領域である」と宣言し，その領域に含まれる事象を「人間の行為」と呼ぶといったふうにすることもできる．こうした議論の進め方は,「行為」という既成の用語の用法の制限による明確化と見なすこともできるし,「行為」という言葉に定義を与えていると考えることもできる．このように，議論する人びとの関心の対象領域を取り出すため，あるいは，そうした領域を整序するため，複数の型式を組にしたものを,「枠式 (morphic frame)」と呼ぶ．これは，複雑なものを無理やり単純化して理論化するよりも，複雑さをそのまま受け入れた議論ができるための枠組みであると考えてほしい．

第 4.1 節では，“教育観” を記述する枠組みを “構造化された一覧” として表現するというアイデアについて述べた．我々が実際に行いたいことは，この一覧の要素（単位）である “ラベル” を，事象からなるクラスに付したもの（類型 class type) ではなく “型式” とすることであり，さらに，“一覧” を複数の “枠式” からなる構造化された図式にすることである [127]．比喩的には，“教育観” を記述する “言語” として，こうした「枠式」の「型式」からなる構成要素を “単語” に，“枠の組構造” が “文法関係” に相当することを想定するということである．

---

[126] いわゆる「反射」（神経系を通じた刺激に対する生活体の反応）などが「意味を有さない人間の活動」である．

[127] “型式群から構成される枠式” は，伝統的論理学において，概念群から構成される「ポルフュリオスの樹 (Arbor Porphyriana)」の類似になっている．

伝統的論理学における古典的な例を挙げると,「人間」という概念の内包が「実体的・有形的・有生的・可感的・理性的」であるということは，“対象の総体” の次のような秩序づけが反映されている．この秩序は，まず,「実体的 (Substance)」な対象の総体を,「有形的 (Corporeal)」なものと「無形的 (Incorporal)」なものに区分し，さらに，有形的な対象群を「有生的 (Animate)」と「無生的 (Inanimate)」に，続けて，有性的な対象群を「可感的 (Sensible)」と「無感的 (Insensible)」に，可感的対象群を「理性的 (Rational)」と「非理性的 (Irrational)」に区分するといったものである．万象のありさまを概念的に把握するためのこうした系統樹が，周知のように,「ポルフュリオスの樹 (Arbor Porphyriana)」と呼ばれる．(例えば，文献 [43, p.27] を参照.）

「ポルフュリオスの樹」は，万象のために設定された一種の “座標系” であり，先の例でいえば,「人間」の座標が（実体的，有形的，有生的，可感的，理性的）と与えられていると思うことができる.「枠式」の場合は,「型式」が「概念」より事象への適応の恣意性が高いことを反映して，万象に大域的に設定された座標系というよりは，多様体としての万象に適用される局所座標のモデル空間といった趣の強いものになっている．

## 4.3　形式と実質

教育数学を展開する上で「形式型」と「実質型」という二つの型式が鍵となる [128]．本節では，この「形式型」と「実質型」について概説しておこう．

前節で,「小数の計算」や「筆算による計算」を例に,「目的型」や「手段型」といったラベルを考え，それを「型式」と呼んだ．それでは，そうしたラベルを貼られる方の，子どもが実践している「計算練習」や，教師が実行している「子どもに計算の仕方を説明したり，練習をさせたり」といった営みの方は，どう見れば良いのだろうか．

例えば計算練習の場合なら，個々の子どもや教師が計算という「営み」を実践しているとき，通常，そこに,「目的」や「手段」といったことがらが意識されることはないだろう．個々の人間によって実践されている「個別」の営みは，まさに "多様" そのものであって，「目的」や「手段」といった物差しを当てれば，それに応じた何がしかを読み取ることのできる母胎といったものと考えることができる．

そこから何がしかを切り離して取り出すための基準である "目的（型）" や "手段（型）" は，個々の人間の営みという「個別 (particular)」に対して,「一般 (general)」と総称されることがある.「一般」と「個別」の区別は，人間が自身を取り巻く（外的であれ内的であれ）環境を認知するための基本的な仕組みのひとつである．

もっとも，この「一般」と「個別」の区分という仕組みは，"絶対的" なものではない．あくまで，"相対的" であり "対比的" なもの [129] であって，ある状況で「一般」として把握されたものが，別の文脈で「個別」と見なされることは珍しくない [130]．人間の認知機能は，局所的に一種の入れ子構造をなしているが，"一般と個別" はその要素的構造のひとつになっている．

この "一般と個別" の相対的な対比性をより明確に表現する日常的な用語に，"形式と実質" がある．実際,「個別」の立場から「一般」を見れば,「形式」的なものに映る．それに対して,「一般」の側から見える「個別」は,「実質」的なものである．まさに,「一般」と「個別」の関係性は,「形式 (formal)」と「実質 (material)」のそれと重なって見える [131]．

[128] 例えば，脚注 5 で,「言語の記述」と「言語による記述」という比喩を用いて,「記述の二重の意味」に触れたが，これなども,「形式型記述」と「実質型記述」と呼ぶのが相応しい．

[129] 二つのモノを見るとき，視点のとりかたによって，こうしたモノがそれぞれ異なる平面に含まれているように見たり，同一平面に含まれるように見たりすることができる．あくまで，比喩としてではあるが，前者のように見るとき "相対的"，後者のときを "対比的" と呼んでいる．一言で言って，相対的はタテの関係であり，対比的はヨコの関係といっても良い．

[130] 今の日本の初等中等教育を例にとれば，( 1 ) 実際に教室で営まれている授業が「個別」であるのと "対比的" に，授業のシラバスは「一般」であるが，( 2 ) 教育課程という「一般」と "対比的" にはシラバスは「個別」であり，( 3 ) 指導要領という「一般」に対して教育課程は「個別」であり，( 4 ) 教育基本法という「一般」に対して指導要領は「個別」と "見なす" ことができる．

[131] 例えば,「教育観」を整理する重要な枠組み一つとして「目的」を挙げたが,「製造業で設計職に就くために必要な数学に関する知識や技能を教える」といった "目的" も,「民主社会の一員として，政治的・経済的に適切な判断を下すために必要な数学に関する知識や技能を教える」という "目的" も，そうした目的を実現するための実際の授業といった「実質」的な「個別」と対比的に,「形式」的に表現された「一般」である

「一般」としての "目的" を形式的なものとして捉えることには，積極的な意味がある．例えば,「P をすることができる能力を身につける」という目的と,「P をしないことができる能力を身につける」という目的を考えてみよう．外見上はどうであれ,「この両者を同時に満たす」ことに還元できるような "目的" については，それを達成する「実際の授業」は存在しないはずであり，そうした授業を実施したという主張がなされているな

ここでは，用語として，“一般と個別” ではなく，“形式と実質 [132]” の組合せの方を採用することにしたい [133]．もっとも，“一般と個別” であっても，“形式と実質” であろうと，“相対的” で “対比性” な特徴を捉えるためのものだから，我々の文脈では，それぞれが「型式」であり，組として「枠式」とするのが適当であるということになる．つまり，採用する用語としては,「形式型 (formal type)」と「実質型 (material type)」ということになる．

本稿の「はじめに」の脚注 3 で,「内的教育数学」と「外的教育数学」という区分について述べた.「実質型」と「形式型」という枠式を用いれば，“教育の場にある数学の総体” に,「実質型」を適用したものが「内的教育数学」であり,「形式型」に相当するものが「外的教育数学」であるということになる [134]．なお，脚注 3 の区分に従うなら，本稿で扱った内容は,「補助的教育数学」に含まれるものということになるだろう．

---

ら，その主張が間違っているか，そうでなければ，一般として前提されている目的の方に何がしかの誤りが含まれていることになるだろう．

つまり,「一般」の総体は,「形式」的な操作を伴う，それ自身の内的な秩序を備えた “世界” をなしており,「実質」を備えた個別からの抽象によって得られた「一般」を素材として含んではいても,「個別」の総体と同型な “世界” を形造っているわけではないことになる

[132]アリストテレスの用語である “エイドス（形相）とヒューレー（質料）” と言っても良い．

[133] 「形式」と「実質」の基本的な関係について，簡単に触れておこう．これには,「形式」から「実質」に向かう方向と，逆に,「実質」から「形式」へと向かう方向が考えられる．この種のことを論じるには，ソシュールに従って，通時的と共時的の区別をしなければならない．

まず，通時的に捉えてみよう．ここで，“通時的” に捉えるということは,「形式」はあっても「実質」がない状態，あるいは，その逆の状態になる．今,「実質」から「形式」へと向かう方向は，与えられている「実質」から「形式」を創り出すことに対応するが，要するに，実質のなす事象群から着目すべき特徴類を引き出し，それ以外を捨てることになる．つまり，抽象と捨象であるが，ここでは，両者の意味を合わせもったものとして「抽象 (abstract)」と呼んでおこう（「実質」から抽象によって得られたものが「形式」であるという意味では,「形式化 (formalization)」や「一般化 (generalization)」と呼ぶこともできる.）「形式」から「実質」へ向かう方向は，どうだろう．この場合は,「形式」をもとに，そこに抽象化されうる「実質」を “現実” に創り出すことに相当するが，このことを,「実化 (realize)」と呼ぶことにする（もちろん,「実質」からの抽象化によらない「形式」が存在することを前提している．例えば,「すべての生徒の基礎学力を養成する」という言明は “形式” であって，そういう「形式的な言明」がなされているからといって，目の前にいる個々の生徒の「基礎学力の養成」の可能性を保証することにはならない.「生徒」,「基礎学力」,「養成」といった “言葉” が既存であっても，結合された言表としては，関係する “実質” が存在する「形式的な言明」とは限らないということである．“実質” である一人一人の生徒の「基礎学力」を実演させることは，それぞれの状況に応じたそれぞれの工夫を必要とする実践的な営みに他ならない.）

次に，共時的に考えてみる．つまり,「形式」も「実質」も，すでに存在している場合である．この場合,「形式」から「実質」に向かうことを，その典型的な場面である「規則や原則などを現実に適用する」という意味で,「適用 (apply)」と呼ぶことにする．また,「実質」から「形式」に向かうことは，実質のなかに形式に相当する特徴を見出すという意味で,「評定 (evaluate)」と呼びたい．

なお，通時的と共時的の区別がある種理念的なものであることの反映として，具体的な場で,「これは抽象なのか評定なのか」であるとか,「実化なのか適用なのか」という問いに答える明確な基準があるわけではない．それは，判断の主体である行為者の置かれている状況（外的要因）や，行為者自身の観点の選択（内的要因）によることになる．したがって,「形式（一般）」と「実質（個別）」の関係性について，通時的と共時的を区別しない用語を選ぶこともできる．例えば，カントは,『判断力批判』で，Allgemeinen（一般）から Besondere（個別）に向かうことを “規定 (bestimmen)”，その逆方向を “反省 (reflektieren)” と呼んでいる（[47, p.87]）．

[134]多様性の混沌である “実質（実際の授業）” から取り出した（脚注 133 の用語でいう “抽象” した）“形式（一般的なもの）” について考察することは，外的教育数学の基本的な目的のひとつである．例として，ハイマン・バスが，デボラ・ボールと協同しながら，小学校のあるクラスの授業の記録を素材として実行した一連の業績を挙げることができるだろう.（例えば，[3]，あるいは，拙稿 [13] を参照のこと.）

### 4.4 今後の課題

第 3 章では，数学を「数学的統号系を共有方式とする使用の総体」として“普遍的”に捉えてみた．しかし，この捉え方は，いわば数学という広大な領域の境界を画定しただけであって，その領域内での活動を効果的に実践するためには，“多様性”の整序が必要である．つまり，教育数学を展開するためには，第 4.1 節で述べたように，数学の教育を論じるためのプラットフォームの構築が重要になる．このプラットフォームは，教育的あるいは数学的なさまざまな“実質的”活動から，安定性にすぐれ汎用性に富む“形式的”に“抽象”されたパターン群で構成されるべきだと考えている．本章では，このプラットフォーム構築の基礎工事に必要な“工法”として，型式と枠式を使用する方法についての紹介を行った．

最後に，教育数学のプラットフォーム構築についてもう少し具体的に述べるなら，第 2 章でその一端に触れた「歴史のなかの数学」や，本稿では触れられなかった「教育的実践のなかの数学」を素材として，そこから，数学の教育に携わる人々が共通に利用可能な“教育観”や“数学観”を型式として取り出し，系統的に整理して枠式化することである．これが，“数学の多様性の記述と普遍性の把握”の次にくるべき作業であり，筆者が現在取り組んでいる課題でもある．

## 参考文献


[1] アリストテレス『分析論前書・分析論後書』アリストテレス全集 2，(前書：今井知正，河谷淳訳，後書：高橋久一郎訳) 岩波書店 (2014）．

[2] アリストテレス『トポス論・ソフィスト的論駁について』アリストテレス全集 3，(トポス論：山口義久訳，フィスト的論駁について：納富信留訳) 岩波書店 (2014）．

[3] Bass, H. : *Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education*, Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, vol.42 (2005), No.4, 417-430.

[4] Berggren, J. L. , Jones, A. : *Ptolemy's Geography, An Annotated Translation of the Theoretical Chapters* , Princeton University Press (2000).

[5] Boethius, A.M.S. : *De institutione arithmetica libri duo*, In Gottfried Friedlein (ed), Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo: De institutione musica libri quinque: Accedit geometria quae fertur Boetii, Lipsiae in aedibus B.G. Teubneri (1867). [英語訳] Masi, M. : *Boethian Number Theory, A Translation of the De Institutione Arithmetica*, Rodopi B.V. , Amsterdam (1983).

[6] Condillac, E. B. de : *La logique, ou les premiers développements de l'art de penser*, Paris, (1780). [日本語訳] エティエンヌ・ボノ・ド・コンディヤック『論理学 — 考える技術の初歩』(山口裕之 訳) 講談社 (2016).

[7] Coulmas, F. : *Writing systems — An introduction to their lingusitic analysis*, Cambridge University Press (2003). [日本語訳] フロリアン・クルマス『文字の言語学 — 現代文字論入門』(斎藤伸治 訳) 大修館書店 (2014).

[8] Düring, I. : *Die Harmonielehre des Klaudius Ptolemaios*, Göteborgs Högskolas Årsskrift, vol. 36, n° 1. Göteborg, (1930). [英語訳] Translation and commentary by Jon Solomon : *Ptolemy Harmonics* , Brill (2000). [日本語訳] 山本建郎 訳 『古代音楽論集（アリストクセノス／プトレマイオス）』 京都大学学術出版会 (2008） 所載.

[9] Freudenthal, H. : *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel (1983).

[10] 藤澤利喜太郎 『算術條目及教授法』 丸善・三省堂 (1895).

[11] Galilei, Galileo, *Il Saggiatore* , in Opere, volume II, Milano (1832). [日本語訳] ガリレオ 『偽金鑑識官』（山田慶兒，谷 泰 訳） 中央公論新社 (2009).

[12] Hjelmslev, L. : *Omkring Sprogteoriens Grund-læggkese*, Festskrift udgivet af Københavns Universitet i anledning af Universitets Aarsfest, November(1943), 3-113. (in Danish.) [英語訳] translated by Whitfield, F. J. : *Prolegomena to a Theory of Language*, Revised English edition, Wisconsin (1961). [日本語訳] ルイ・イェルムスレウ『言語理論の確立をめぐって』（竹内孝次 訳） 岩波書店 (1985).

[13] 蟹江幸博，佐波学 『数学と教育の協同 — ハイマン・バスの挑戦 —』， 数理解析研究所講究録 1657 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力形成に関する研究』報告集）, (2009)， 23-73.

[14] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学序説 – 古代における教育と数学の類型 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 61 巻， 教育科学, (2010), 187 - 218.

[15] 蟹江幸博，佐波学 『「専門基礎としての数学」とは何か—教育数学の必要性—』， 数理解析研究所講究録 1711 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力に関する研究』報告集）, (2010)，49 - 88.

[16] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の諸相 (I) — 数学の多様性 — 』 三重大学教育学部紀要， 第 63 巻， 教育科学, (2012), 335 - 352.

[17] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学から見た「算術條目及教授法」』， 数理解析研究所講究録 1828 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題』報告集）, (2013), 1 - 49.

[18] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学の諸相 (II) — 数学の教育的側面 — 』 三重大学教育学部紀要， 第 64 巻， 教育科学, (2013), 177 - 191.

[19] 蟹江幸博，佐波学 『言語学から教育数学を構想する』， 数理解析研究所講究録 1867 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力とその育成法に関する研究』報告集）, (2013), 4 - 80.

[20] Klein, F., Schimmack, R. : *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907). ［日本語訳］『独逸に於ける数学教育 ふぇりっくす・くらいん講演』（林鶴一，武邊松衛訳） 大日本図書 (1921, 訂正再版 1922). （部分訳）ペリー／クライン 『数学教育改革論』（丸山哲郎訳）明治図書出版株式会社 (1972).

[21] Klein, F. : *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (3 Bande), B. G. Teubner, Leipzig 1908, 1909, Springer Berlin 1928. ［日本語，部分訳］『高い立場からみた初等数学 1–4』 (遠山啓 監訳) 東京図書 (1959/1960/1961/1961).

[22] Mahoney, M. S. :*The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601–1665* (2nd edition), Princeton University Press (1994).

[23] Maliowski, B. : *The Problem of Meaning in Primitive Languages*, In : Ogden, C.K. and Richards, I.A. : *The Meaning of Meaning* , London : Routledge and Kegan Paul Ltd. (1923). [日本語訳] マリノウスキー『原始言語における意味の問題』, オグデン, リチャード著 『新版 意味の意味』（石橋幸太郎 訳） 新泉社 (2001）所載.

[24] Marrou, H. I. :*Histoire de l'Éducation dans l'Antiquité* , Paris, Le Seuil (1948). [日本語訳] H.I. マルー 『古代教育文化史』（横尾荘英・飯尾都人・岩村清太 訳) 岩波書店 (1985).

[25] Martinet, A. : *Éléments de Linguistique Générale*, Armand Colin, Paris (1970). [日本語訳] アンドレ・マルティネ : 『一般言語学要理』（三宅徳嘉 訳) 岩波書店, (1972).

[26] Martinet, J. : *The Semiotics of Luis Jorge Prieto*, in T.A.Sebeok, J.Umiker-Sebeok (ed.), The Semiotic Web 1989 (pp. 89 - 108), Mouton de Gruyter (1990).

[27] 南川高志 『新・ローマ帝国衰亡史』 岩波書店 (2013）.

[28] Ong, W.J. : *Orality and Literacy*, Methuen & Co.Ltd. (1982). [日本語訳] W-J・オング 『声の文化と文字の文化』（桜井直文・林正宏・粕谷啓介 訳）藤原書店 (1991).

[29] 『プラトン全集 14 エピノミス（法律後編）書簡集』（水野有庸・長坂公一 訳） 岩波書店 (1975).

[30] Piaget, J., Inhelder, B. : *Mémoire et Intelligence*, Presses Universitaires de France, Paris (1968). [日本語訳] J. ピアジェ, B. インヘルダー 『記憶と知能』（岸田秀・久米博 訳）国土社 (1972).

[31] Piaget, J. : *Piaget's Theory*, in P.H.Mussen, (ed.), Carmicael's Manual of Child Psychology, vol.1 (pp. 703 - 732), John Wiley & Sons (1970). [日本語訳・解説] ジャン・ピアジェ 『ピアジェに学ぶ認知発達の科学』（中垣 啓 訳), 北大路書房 (2007）.

[32] Prieto, L. J. : *Messages et Signaux*, Presses Universitaires de France, (1972). [日本語訳] ルイ・プリエート 『記号学とは何か』（丸山圭三郎 訳）白水社, (1998).

[33] Prieto, L, J. : *Pertinence et Pratique*, Minuit, (1975). [日本語訳] L. プリエート : 『実践の記号学』（丸山・加賀野井 訳), 岩波書店, (1984).

[34] Proclus Diadochus : *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, ed. Friedlein, G. , Leipzig : Teubner (1873). [英語訳] Morrow, G.R. (tr.) : *A Commentary On the First Book of Euclid's Elements* (1992 edition), Princeton University Press (1992).

[35] Ptolemaios, C. : *Syntaxis Mathematica*, Opera quad exstant omnia Vol. I. (ed. Heiberg J.L.), 2vols. Leipzig (Teubner), (1898, 1903). [英語訳] Toomer, G.J. (tr.) *Ptolemy's Almagest*, Princeton University Press (1998). [日本語訳] 薮内清 訳 『復刻版 アルマゲスト』 恒星社 (1993).

[36] Ptolemaios, C. : *Ptolemy Tetrabiblos* (edited and translated by F. E. Robbins), Loeb Classical Library 435, Harvard University Press (1940).

[37] Saidan, A.S. : “ *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī* ”, D.Reidel Publishing Company, (1978).

[38] 佐々木 力 『デカルトの数学思想』 東大出版会 (2003）.

[39] Saussure,F.de.:*Cours de linguistique générale*, (edition critique preparee par Mauro, T. D. ), Paris : Payot (1972). [日本語訳] トゥリオ・デ・マウロ 『「ソシュール一般言語学講義」校注』(山内貴美夫 訳), 而立書房 (1976).

[40] Schmandt–Besserat, D. : *Writing Came About*（*Abridged)*, University of Texas Press (1997). [日本語訳] シュマント＝ベッセラ 『文字はこうして生まれた』(小口好昭，中田一郎 訳) 岩波書店 (2008).

[41] 蕭吉 『五行大義（上・下)』 (中村璋八 全釈) 明治書院 (1998）.

[42] Smith, A. M. : *Ptolemy's Theory of Visual Perception : An English translation of the Optics With Introduction and Commentary* , Transactions of American Philosophical Society Held at Philadelphia For Promoting Useful Knowledge, Vol. 86, Part 2 (1996).

[43] 須藤新吉 『論理学綱要 改訂版』 内田老鶴圃 (1971）.

[44] Thomas, I.(tr.) : *Greek Mathematical Works*, Volume I: Loeb Classical Library 335: Harvard University Press (1991).

[45] Watkins, C., *The American Heritage Dictionary of Indo-European Roots (Third Edition)*, Houghton Mifflin Harcourt (2011).

[46] Weber, M. : *Die "Objektivität" sozialwissenschaftlicher und sozialpolitischer Erkenntnis*, in *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Auflage, Tübingen (1988) SS. 146 – 214. ［日本語訳］『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』(富永祐治　立野保男 訳，折原浩 補訳） 岩波書店 (1998）.

[47] Weischedel, W. (ed.) : *Immanuel Kant. Kritik der Urteilskraft*, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft. 2, 8.Auflage, Verlag: Frankfurt am Main: Suhrkamp, (2014).

[48] Wittgenstein, L. : *Philosophical Investigations* (fourth edition), Blackwell Publishing Ltd. (2009). [第 2 版の日本語訳] 『哲学探究』(藤本隆志 訳，ウィトゲンシュタイン全集 第 8 巻), 大修館書店, (1976).