幾何的直観と対称性

蟹江　幸博
三重大学教育

平成５年８月31日付け原稿　ver0.95

1　はじめに

筆者は最近、「直観的能力は指導によって育成されうるか」、という昔からある素朴な問題に思いを致さざるを得ないような問題に出会った。その問題は、中学校でも、扱い方によれば小学校でも教えることの出来るような図形認識、特に空間的な図形認識の問題であった。もしかすると幼稚園でもこの問題をテストするところがあるかも知れないほど単純で簡単な問題にみえるのである。

始めのうちはまじめに考える気もしなかったが、喉に刺さった魚の骨のように、気になって仕方がない。出会う人ごとに話してみたが誰も要領を得た答えをしない。更に同僚の微分幾何学者にも尋ねてみたが、彼にも正しくない答え以外に思いつかないようであった。それどころか、彼の研究室の黒板の前で問題を説明しているうちに、正しい答えが成り立たないという証明まで出来てしまった。困ったなと言いながら彼の部屋を出たその途端、証明にギャップがあることに気がついた。

ほんの些細な隙間だが、もしかするとその隙間を埋めると正しい答えに到達するかも知れない。そう思うと問題に対するしこりが解けていくような気がした。つまり、正しい答えは筆者の幾何的直観に反していて、気持ちが悪かったのだ。今では正しい答えを導くように直観がセットし直されているらしく、気持ち悪さは起こらなくなっている。直観とはある意味で偏見の体系だということらしい。

筆者も、余り幾何的直観に恵まれているわけではないが、それなりの訓練は積んできていると思っている。それなのに、最初のうちは正しい答えを想像することも出来なかった。これは問題ではないかと思った。単なる個人的な能力の欠如の問題とは言うことは出来ないのではないだろうか。筆者の受けた日本の教育のあり方が悪いというべきなのか、それとも教えることができない天性の個人的な能力の問題なのだろうか？

この疑問が脳裏に離れなくなった。幾何的直観はどのように指導されているのだろうか？また本来指導すべきことだろうか、すべきであれば指導する目的は何なのだろうか？それを実現するためにどういうことが可能だろうか？そのようなことを考えてみた。

直観力がもしも養成され得るものなら、それを養成することはどのような分野においても必要なことだろう。国際化も急激に進み、科学技術の発達も加速度的に進み、我々の社会の価値観は極めて多様なものになってきている。そしてその多面的で複雑な視点を、各人が持てるようになる必要がある。しかし、そのために準備すべき知識や技能は膨大で、初等中等教育での修得は困難なことになっている。

といって、大多数が進学するようになった大学教育が、その役割を果たすことは難しい。目的意識を持って大学に入学する学生が少ないことと、大学入学時の知識と各分野で要求される専門知識のとの乖離が一般的教育課程として実現が不可能にみえるほどに進んでしまっているのである。

従って教育の目的はむしろ、知識の量よりも、複雑で多岐に亘る物事を直観的に正しく見通す能力、またその理解の仕方が間違っているとき事態の進行の中で自分の間違った理解に気付き修正できる能力を養成することにあるというべきであろう。勿論そのために必要な知識や技能の教育をなおざりにしてよいわけではない。

しかし直観力の養成を教育の目標に挙げることは難しい問題を引き起こす。つまり、何かしらの指導や学習の成果として直観力が育成されたかどうかを判定することが難しいのである。

幾何的直観は、向上したか否かが比較的容易に判定できるものではないだろうか。そして一つの分野での直観力の発達が他の分野での直観力にも寄与すると期待するのは、決して根拠のないこととは言えないだろう。

この意味で幾何的直観の養成の問題は真剣に考えるべき問題であると言えよう。そうだとすれば、どのように実現したら良いのだろうか。色々と考えてみて、直観力の養成には隠れた対称性を発見する能力を伸ばすことだと思うようになった。そして、そのためにはいろいろな対称性を多面的に教えることがよいのではないかと思う。良い音楽を作るには良い音楽に接しさせることが良く、良い絵画を描くには良い絵を見ることが大切であるのと同じことである。作り出す能力が育たない場合でも、鑑賞する能力は育つし、むしろ多くの数学に直接関与しないで生きていく人達にはその能力の方が役に立つだろう。そこで対称性をどのように教えたら良いかについて考えてみた。本論文はそれに対する一つの試案である。というより、具体的にどう教えるかを教師が考えることができるための素材を提供するものと言えよう。

第２節では、図形・幾何教育の目標の中で養成されにくい直観力について、補助線の発見を例にとって論じ、直観力の養成のために必要なのは隠れた対称性を見出す能力を育てることだと提案する。そして図形の対称性の問題がどのように教えられており、又どのように教えることが出来るのかということを、平面図形の場合（第３、４節）と空間図形の場合（第６節）に論じる。

さらに対称性というものを静的にでなく動的に論じてみたい。第３節では内部対称性、第４節では外部対称性を論じている。種々の操作を施すことで対称性が

増えたり減ったりするだけでなく、別の形の対称性が生まれるようなこともあるということを多くの例とともに述べている。第５節では、身近な素材を使って教材化できるような形で示してみた。三角定規の総合的多面的な活用というスローガンを掲げてもよい。ある意味ではこの節が、算数・数学教育的な議論としてはこの論文の核心になっているとも言える。

そして最後の第６節で、元の問題との出会い、間違いの反証、幾つかの証明、小学生にも納得させられる提示（プレゼンテーション）など具体的に述べる。途中の対称性の議論に興味の無い人は最後の節だけ読んでもよい。そこでは謎解きのスリルを味わってもらえるようにしたいと思っている[1]。

2 幾何的直観とは？

2.1 図形・幾何教育の目標

まず指導要領を見てみよう。図形の指導とは、それを通して、論理的な思考力と直観力を育成することにその目標をおき、小学校では更に、具体的な操作・実験・実測を通してこれらに必要な基礎知識・技能を身につけさせることも求めている。中学では、単なる数学的な論証能力の育成だけでなく、見通しを持ち自発的に追求していこうとする態度の育成が大切で、論理的な思考力とそれに関連する直観力の育成が重視されている。

さて、一般的にこのことがどう受け止められているだろうか。幾何や図形の学習で何を教わったかを挙げてくれるように頼んだとすれば、殆どの人はユークリッド幾何の初歩という答えをするであろう。つまり、三角形の合同定理や二等辺三角形の底角は等しいという定理を挙げる人が多いのではなかろうか。確かに象徴的には正しいかも知れない。しかし、そうした定理の学習の際、一体何を目指し、何を目的として教えているのだろうか。

ユークリッド幾何を教える古典的な立場からは、公理・公準・定義から、直感的には直ちには分からないような命題（定理、命題、補題、系）を、厳密に証明して見せるところにある、つまり厳密な論理運用の実例だと考えられることが多いのではないだろうか。堅牢な基礎の上に厳密な論理で構築された幾何学の殿堂の美しさ、またどの一部も永遠の不滅性を持っている、ということを人類の叡智の成果として賛えることにあると言うことも出来よう。

[1]筆者は大学院修了以来、教育学部で教鞭を取っており、いわば教師の教師としての立場にあるので、どうしても読者を教育学部の数学専攻生、つまりは小中学校の教師予備群に設定しがちである。学生に聞かせる説教が話しの中に混じってしまうかも知れない。一応読者としては初等教育の算数・数学の教師、自分の子供の教育に熱心な母親、及びその予備群を考えているが、又教えられるべき対象としての児童・生徒諸君でも自分自身を教えるという心構えで読んでもらえばよいと思う。

2.2 補助線を見つけるのは直観力の力か？

それでは、論理的思考力がもっとも貴ばれているようにみえるこうした学習の際に、幾何的直観の名で語られるのは一体何なのだろう。例えば命題の証明における適切な補助線を引くことの出来る能力はその代表的なものの一つであろう。確かに図の中に描かれてない証明に役立つ線を思いつく瞬間を観察していたとすれば、直観以外の何者でもないように感じられるだろう。しかし、実際に起こっているのはどういうことなのだろう。問題となっている図をじっと見つめていると、自然に補助線が浮き上がって見えてくるのだろうか。これが直観力が優れているということだと思われているのだろう。もしかすると天才ならそういうことがあるかも知れないが、筆者の経験からすると少し違うようだ。

問題となっている図をじっと見る。じっと見ていると、網膜にか脳の視覚中枢にか、線や点が少しずつ焼き付けられる。そこで色々な線を引いてみる。始めのうちは実際に紙の上の図上に引いてみるのがよいが、慣れてくると、脳の中に焼き付けられた写真（というより写真の乾板）の上に引くことが出来るようになる。

線を引くと新しい図形が見えてくる。それまでに見えていた図形に合同な図形や相似な図形、また何か見慣れた図形が見えてくることがある。それら新しく見えてきた図形が補助線を引く前には思いもよらないものだったら、占めたもの。大抵はその線で決まりだ。

しかし、新しい線を引いても目を惹くような新しい図形が出来なかったら（ここでは“ 出来なかったら ”が問題ではなく、“ 面白い図形に気が付かなかったら ”ということが問題である場合も多いのだが)、その補助線は諦めて、別の線を引くことになる。この時重要なのは、前に試した補助線の候補は完全に消しておかないといけない。だから実際に紙の上に描くのは不経済ということになる。紙の上で補助線を引いた場合は、もう一度別の場所に問題の図を描き直した方が良いと思う。今度の補助線も駄目で、駄目だと分かってから、前に引いた補助線の方が有望だったことに気付くかも知れないから。

頭の中でなら線は何度でも引き直すことが出来る。前に試して諦めた線でも、何度でも引き直すことが出来る。そうこうするうちに段々と、補助線として有力な候補が見えてくる。問題の図を脳内のフィルムに強く焼き付けておくことが重要で、思考の力で引く線はフィルムの上で少し薄くなる、というより、少し薄く引くことが出来る。有望な線でなければ取り替えることになるから、原図で引かれている線とは違うほうが良いが、筆者の脳は精巧に出来ていないせいか、原図と違う色で引くことが出来たことがない。実用上は多少薄めに引ければよく、それが出来れば、頭の中で描いたり消したりがうまくゆく。

上達の秘訣を一つ披露しよう。いわば、心を無にして、引くことの出来るすべての線を次々に引いてみる。線を引くとき出来るだけ予断をせず、可能な線を描いては消し、描いては消すのである。そうすると自然に有望だと思う線を引く回数が増えてくる。自然にと言っても、本当はうそで、心を無にしすぎてはいけな

い。目標、つまり何を示すために補助線を引こうとするのかを忘れはいけないのだ。原図と目標をしっかりと心に捉えて、可能なあらゆる（過程としての）補助線を引いていく。補助線を引くたびに、目標との距離を測って（この測り方が問題ですが)、近そうな線は少し濃くしてやる。これをすばやくやると、残像の原理が働いて、正しい（とそのとき感じている）補助線が、脳の中で焼き付けられ、目の前に浮かび上がってくる。

結局、補助線が自然に浮かび上がってくる理屈を述べただけじゃないかという非難が聞こえてくるようだ。確かにそれはそうなのだが、“ 天才は 99%の汗と 1%のひらめき ”というエジソンの言葉[2]を確認するのはいいことだというだけでなく、このように過程を分解してみることで、実際の学習に於いても指導可能な方法が考えられないかと思ったからである。幾つか考えられると思うが、思いつくまま、一つの方法を提案してみよう。

最初の段階の方法としては、問題の図をいくつも描いておき、可能なあらゆる補助線を一つずつの図に描きこみ、それらを並べてみる（同時に見ることが出来るようにすることが大事)。その問題を解くことが可能な段階の生徒になら、多分これで、どれが有望かが分かるはずだと思う。分かれば、その各々の図で、やれることをやれば良い。

分からない場合が問題だ。その時には、その各々の図（原図にある補助線を描き込んだもの）の中に、線を引いたことによって新しく出来た図形は何かと考えさせる。そして、その新しい図形を考えることが目標に向かって一歩前進しているかどうかを考えさせる。目標に近付いたことがすぐには分からない場合には、取り敢えずその図は捨てて次の図でやってみる。用意した図を一通りやってみれば、有望そうなのが幾つか見つかることもあれば、一つも見つからないこともあるだろう。

有望なのが複数見つかると言うことは、裏を返せば、どれがよいのかの決め手がないということでもある。その場合には更に一歩を進めねばならない。幾つかの候補をじっと見て、何度も何度も見比べてみる。

一つも見つからないときも同様で、一つ一つの図をもっと丹念に見直しする必要がある。そして最後に、考えている図ですべての補助線の可能性が尽きているかを考えてみる。

いちいち違った図を描く手間が大変だと思えば、少し手軽な方法もある。原図をボールペンのような消しゴムで消えないもので描き、補助線の候補をくっきりと見えて消しやすい柔らかめの芯の鉛筆で描くことにすれば便利だろう。

更に手軽な方法としては、少しぐらい擦っても汚れないようなもので、例えばボールペンとか硬めの芯の鉛筆などで原図を描いておき、補助線を引く代わりに透明な（セルロイドのような材質の）定規を置くだけで済ますことも出来るだろう。

[2]実際にはこうは言わなかったらしいが

2.3　隠れた対称性

ところで、一番重要な要素でありながら、どうしたら良いのか明言しなかったことがある。それにいらだちを感じている読者もあるだろう。それは、目標への近さをどのように測るかということである。ある状態が他の状態よりも目標に近付いているとどうしたら感じられるのか？今の補助線の場合でも、線を引いて原図に新しい図形が生まれたとして、まず、そのことに気が付かなければならない。その為には、新しく生まれている図形を予め知っている必要がある。問題の解決に必要な、ある典型的な、若しくは対称性の高い図形を知っているとか、また原図にある或る図形と新しい図形との間の何かしら特徴的なかかわり方（例えば、合同・相似であるとか、点と点とを結んだだけのつもりが別の直線と平行だったとかいうこと）を知っているとか推測できるとかいったことが必要となるのである。

このような能力は、一言で言うならば、“ 隠れた対称性 ”を見出す能力ということになるのではないだろうか。

隠れた対称性を見出す能力を養うには、まず高い対称性を持つものに慣れることも必要だろうし、更には対称性の多様さを知っていることも必要であろう。

次の節からはしばらく、対称性の指導に関する問題点について考えてみることにしよう。以下の長く細かな議論に入る前に一言断っておく必要があるようだ。この節で述べたような補助線の引き方の指導に対する提案にしても、このまま現実的な提案として受け入れ難いであろうことは、筆者も承知しているつもりである。多くの生徒の心の中で起きる多様な状態に対して、一人の教師が同時に対応することの難しさもあるだろうし、何より時間が掛かりすぎる点が問題となるだろう。更に、これらの作業をやりとおすにはかなりの集中力が必要であり、そうした集中力の無さこそが問題であって、生徒の集中力をつけるのが先ではないかという議論もありうるし、それもあながち不当な議論とは言えないだろう。

しかし、筆者の提案や議論は、その通りに現場で実行されなくても良いのである。そのほんの一部でも、現実の指導の役に立つならそれで良いと思っている。教師が期待するようには生徒は理解してくれないものだ。十分すぎるほどの準備をしていったつもりでも分かってくれない生徒はいるだろう。生徒に失望する前に、しかし生徒が理解できなかった原因が、教師すら理解していない問題そのものの困難さにあるかもしれないと考えて欲しいのである。

だから通常の指導には必要がないほど、問題について数学的にまた認識論的に議論をしてみるつもりである。問題によってはくど過ぎると思われる議論もあるけれど、くどいなと感じたら一度目はその部分は読み飛ばせばいい。くど過ぎるほどの議論がある場合には、問題の根底にそれほどの問題があるのだなと思ってくれるだけでもいい。生徒がその部分を理解してくれないとき、生徒の無能さゆえでなく、問題の複雑さや深さのせいだと思うことが出来れば、生徒を見る教師の眼が優しくなってくれるかも知れない。そんな思いが、このような議論を敢えてしている理由の一つなのである。

3　対称性について（平面図形の場合）

本節と次節で高い対称性を持つとはどういうことか、また対称性の多様なあり方やその相互の関りかたについて、教育現場で実行されている、実行することの出来る、実行されると良いといった形で述べてみることにしたい。その次の節では、あからさまには対称性を問題にしていないような状況でも、背景に対称性が深く潜んでいる場合のあることを幾つか例示してみたい。

3.1　回転対称

　対称性が高い平面図形はどんなものかと考えてみれば、まず正多角形が思い浮かぶだろう。少し図を描いてみよう。正三、四、六角形である。

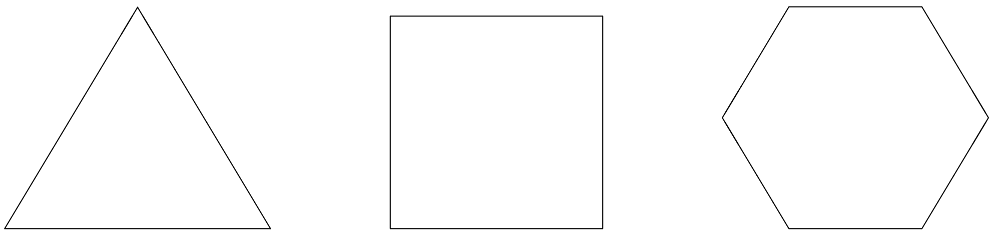


図 1: 正多角形

さて、正多角形は対称性が高いというのはどういう意味であろうか？

最初に気がつくのは多分、回してみることだろう。数学的には、重心に関する回転対称性ということだ。正 n 角形なら重心の周りに $\frac{360}{n}$ 度回転させると元の図形に重なる。回転角は正三角形なら $120°$、正方形なら $90°$、正五角形なら $72°$、正六角形なら $60°$ などとなる。重心とはその図形（が物質で出来ていれば）の重さを代表する点のことで、例えば指をその重心に当てて支えれば、傾かず水平な状態で静止する（理想的には）ということを意味する。このとき、指に乗せたまま回してやることが出来、ある一定の間隔で開閉するカメラの眼には止まっているようにみえることが可能になる。

例えば正三角形と正方形とではどちらが対称性が高いと言えるだろうか？これは殆どどちらの図形が好きかという好みの問題のようにもみえる。正三角形の場合は $120°$、つまり、$0°, 120°, 240°$ の三種類の回転で不変だが、正方形の時は $0°, 90°, 180°, 270°$ の４種類の回転で不変になる。一般に正 n 角形なら n 種類の回転で不変になるのだから、n が多いほど対称性が高いと言える。n を大きくして ∞ に近付けていけば、正 n 角形はどんどん円に近付いていく[3]。確かに円は対称性が高い。重心（この場合円の中心になる）の周りに何度で回転しても円は変わらない。つまりあらゆる回転に関して不変なのだ。

[3]どんな風にかはきちんと議論する必要があるが

3.2　線対称

しかしまた、別の対称性もある。線対称というものがそれだ。何かある直線を引き、その線に関して折り返してみても図形が変わらないということだと説明されるものだ。筆者などは天の邪鬼なものだから、折り返すと図形が半分になってしまうじゃないか、と思ってしまう。

それはそれとして、線対称というのは、実はかなり説明しにくいものなのだ。引いた線の上に鏡をおいて、その鏡に映った像と元の図形が一致するときその線に関して線対称であるという、という説明もある。これも嘘とは言わないまでも、簡単に実現しようがないものである。置いた鏡に映っているのは、鏡の手前側にある図形の像であって、鏡の後ろ側にある図形については、見えないのだから、何も分からない。像と向こう側の図形が重なるときと言っても、実際には重ねようがないのである。

実際上に使われている感覚は、三次元（我々の空間）の中でこの直線に関して回転させて重なるときというのを採用していることが多い。これにも少し問題があって、紙の表裏が反対になる。実際の空間で回転させようとすれば、何か紙のようなものの上に図形を描かざるを得ず、回転させれば、裏表が反対になって元の図形は見えない。どうやって重なりあうと考えられるのか分からない。

この困難は、数学的に言えば、平面の合同変換群の中で、運動からなる部分群の中に線対称変換が入っていないということで、平たく言えば、上で困っていたように、折り返しの変換は図形を動かす（平面内で）ことでは実現することは出来ないということである。

しかし、出来ないと言っただけでは、折り返したら重なるじゃないかと考える生徒は納得しないだろう。実際に生徒が納得してくれるかどうか分からないが、分かって貰うよう努力してみよう。

例えば正三角形には三本の対称軸がある。頂点と対辺の中点とを結ぶ線であり、頂角の二等分線であり、頂角から対辺への垂線である。この線が回転対称の中心[4]を通っているので、対称になった角だけ回転させればまた対称軸になる。従って正三角形の対称軸は三本である。

一般の n のとき、正 n 角形の対称軸は n 本ある。これは考えればすぐ分かる。対称軸 ℓ は正 n 角形の境界と二点で交わる。その交点がある頂点であれば、その頂角の二等分線でないといけないし、頂点でない辺の点であれば、その辺の垂直二等分線でないといけない。交点の近くでだけ見れば、対称軸の候補は $2n$ 本あるが、二本ずつが組みになって一本の直線になるのだから、対称軸の候補は n 本であり、実際にこの n 本は対称軸になっている。n が奇数なら、交点の組み合わせは（頂点、辺の中点）という組み合わせだけであり、回転すれば対称軸はみな同じものだが、n が偶数なら、交点の組み合わせは（頂点、頂点）と（中点、中点）の二

[4] この点が重心であり、内心であり、外心であり、垂心であることに正三角形の高い対称性が顕れている

種類になり、対称軸も二種類できる。

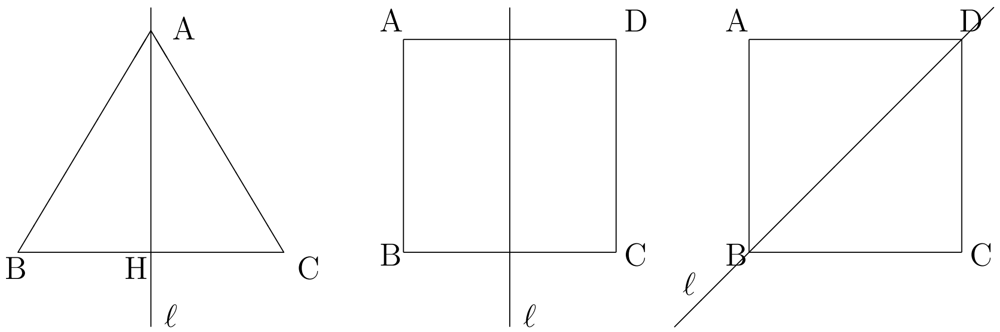


図 2: 線対称

正三角形の場合なら、三角形の合同定理を使えば $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ は合同であることが分かるから、直線 ℓ に関して折り返すと重なるじゃないかと、幾何の好きな生徒なら言うかも知れない。この時、教師はどう対処するのだろう？

良く出来ましたと誉めてやるべき場合もあるかも知れない。しかし、今は手放しに誉めて良いわけではない。今の論点は２つの図形が線対称で重なるということはどういうことかなのだから。更に言えば、三角形の合同定理を証明する際、折り返し変換で重なるときに合同であるということを使っているのだから。

回転対称の場合、ある図形 S がある回転により図形 T に写されて、その T と S が重なるかどうかを問題にしていた。問題にしている図形 S が全体として写されている。むしろナイーブなイメージとしては、“ 移されている ”というように受け取られているようだ。移されるというイメージを持つことが出来るのは、物体が“ 運動 ”によって写されているためである。

しかし、線対称のときは、必ずしもそう感じられてはいないような気がする。ある図形 S（例えば図１で $\triangle ABC$）があったとする。適当に直線 ℓ を引いて、二つの部分 $S_1(=\triangle ABH)$ と $S_2(=\triangle ACH)$ に分割したとき、S_1 を ℓ に関して折り返せば S_2 に重なる、というイメージになっていないだろうか。（筆者の網膜の底に蝶の羽の動きが浮かび、どこかでバタンバタンとドアが開け閉めされる音が聞こえてくる。）図形 S 自身が動いていって鏡映像に重なるというようにはなっていないのだ。

“ それなら上に述べてあるように、三次元空間の中で直線 ℓ の周りを回転させてやれば良いではないか。裏表があって困ると言うなら、裏表はないと考えたら良いではないか。例えばプラスティックの薄い板の上に図形を描いて、回転させて裏になったとしても透き通ってみえるものを考えればいいだろう。”という反論もあり得るだろう。しかし、本当にそれで良いだろうか？

この反論に答えるためには、運動ということについてもう少し深く考える必要があるようだ。図形を動かすというのは、その図形が何か物質で出来ていたとし

て、初めは静止しているその物体をジーッと動かしていくことだと考えられる。勿論、“ ジーッ ”と動かす代わりに、“ スーッ ”と動かしても良いし、“ ベターッ ”と動かしても構わない。動かす前と動かした後の結果だけがあるのではなく、動かしていく途中があるということが問題なのであって、この途中というのがどんな経過をたどっても構わないが、その経過が“ 連続 ”的であるという保証が必要なのである。

連続的に図形を動かしていくと、形が変わらない（運動の前後の図形が合同である）だけでなく、変わらないものがもう一つある。それは向き付け（orientation）と呼ばれるものだ。線分や直線の向きなら慣れているから分かりやすいが、平面図形に向きがあるという認識はあまり慣れていないのではないかと思われる。

3.3 二次元での向き付け

二次元の図形の向き付けについて説明しよう。図形 S の各点 p に対して、点 p を中心とした円を考え、その円の内部を p の近傍（点 p の近くの点の集まりということ）と言う。実は円でなくても、凸多角形でも任意の凸な図形を囲む曲線でも構わない。もっと言えば、凸でなくてもよい、あるちょっとした条件を充たす図形なら、p の近傍と言ってよい。そしてその条件というのは、p を中心とする十分小さな円を描けばその内部をすべて含んでしまうというものである。だから結局、小さな円を点 p の周りに考えると言うだけでよいのだ。

近傍というとき、p を中心とする円の内部だけ考えてもよいということなら、大きさ（半径）だけの違いで同じ形と思ってよい。形は同じと思ってよいのだが、円には境界として円周がついていて、円周はきれいな曲線だから、どちら向きに回るかという意味で向きを決めることが出来る。右回りか、左回りかということである。

図形 S に含まれる、点 p を中心とする無数の同心円を考えるとき、右回りの円と左回りの円が混在する理由はない。非常に近い二つの円、例えば半径 1cm の円の向きと半径 1.0000001cm の円の向きが違っているのは困る。近いところにある円の向きはすべて同じであるようにしたいし、そうすることは出来る。図形 S に含まれる、点 p を中心とする無数の同心円の回り方を、一斉に右か左のどちらか一方の向きと指定することができるが、このことを点 p の周りの向き付けを定めるというのである。そこで例えば、すべて右回りであるとしよう。

この点 p を中心とするある小さな円 γ を考える。γ の内部にある点 q は点 p に近い点であると考えられる。この点 q の周りにも、q を中心とする同心円群が考えられるが、その向きもすべて右回りにすべきであろう。というのは、円周の向きはその円周の各点での接線の向きも定めているわけで、この同心円の中には円 γ と接するものがあるのだから、その接点での共通接線の向きが一致しているべきである。

こうして円と円とに重なりがあるときは、その合併集合のすべての点の周りの向き付けを同じにすることが出来る。だから、色々な重なり合う円で覆ってしまえるような図形は同じ様に、すべての点の周りの向き付けを同じにすることが出来ることがある。このとき、この図形は向き付け可能であるという。

平面全体は向き付け可能で、従って平面の部分集合である平面図形（これが平面図形の定義）はすべて向き付け可能なのだ。だから、わざわざ向き付け可能性について議論することは余りなく、向き付け出来ない２次元図形があるかもしれないといったことは思いつきもしないことになりやすい。

メビウスの帯は向き付け不能な２次元図形として有名だから、知っている児童・生徒がいて反論してくることがあるかも知れないが、ここで言っていることは、だからこそメビウスの帯は平面の部分集合としては実現できないということである。

まず、平面全体が向き付けられることを示しておこう。簡単な説明がある。平面上の１点を選んで原点 O と呼ぼう。O を中心とする同心円群は平面全体を覆い尽くす。平面の任意の点 $p=(x,y)$ に対し、p を中心とする例えば半径 1 の円は、O を中心とする半径 $1+\sqrt{x^2+y^2}$ の円と接する。従って、点 p の周りの向き付けは原点 O の周りと同じに出来る。

この説明とは別の少し回りくどい証明の方が良いかも知れない。平面に直交座標 (x,y) を入れる。x,y が共に整数であるような点 $P=(x,y)$ を格子点という。

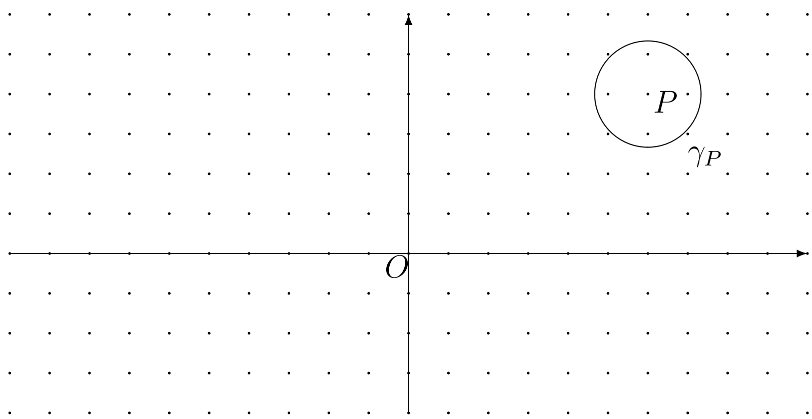


図 3: 格子点

各格子点 P を中心に半径 1.3 の円 γ_P を描き[5]、円 γ_P の内部の点 p は円の中心 P と**線分で結べる**こととする。こうすれば、格子点 $P=(x,y)$ と $Q=(z,w)$ は、$|x-z|+|y-w|=1$ のとき、線分で結べることになる。平面上のすべての点 p はどれかの円 γ_P の内部に含まれるから、p と格子点 P とが結ばれ、格子点 P は原点 O とは格子点を結んでいくことによって結ばれるから、従って原点 O と折れ線で

[5]半径は $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ より小さく、1 より大きければ幾つでもよい。

結ぶことが出来ることになる。上で定めた以外の線分は存在しないものと考えていることを注意しておく。

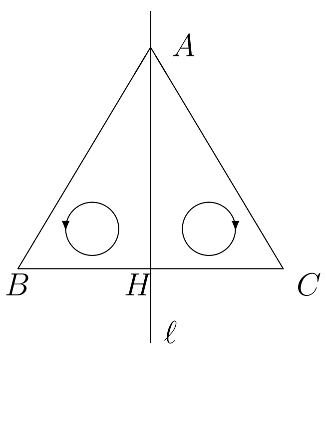
原点 O の周りの向き付けを定めれば、任意の点 p の周りの向き付けも自動的に決まることになる。点 p と O とを折れ線で結べば、直接線分で結ばれている点同士は、ある円 γ_P の内部にあることになり、次々と向き付けが決まっていくのである。更に平面が単連結という性質[6]を持つことから、点 p と O とを結ぶ折れ線をどのように取っても、点 p の周りの向き付けは一通りに定まることが分かるのである。

この証明が分かるようなら、向き付けが回転でも平行移動でも変わらないことは殆ど自明であろう。ほんの少し動かすだけでは向きが変わらないのは向き付けの定義からも明らかなことで、“ ジーッ ”と動かすということは、時間を引き伸ばして考えれば少しずつ動かすことの繰り返しだと思えるのだから、運動では向き付けは変わらないということになる。

また球面も単連結だから向き付け可能だし、円柱を側面だけ考えた曲面は単連結ではないけれど向き付け出来ることは容易に納得出来るだろう。そして、地球の表面は球面と同じと思えることから、地球上のどこで作った時計をどこに持っていっても、同じ向きに針の回ることが保証されているのだ。時計を“ 動かして ”行く限り、時計の回る向きは変わらないのである。

3.4 線対称は運動では得られない

やっと線対称が運動では実現できないことを証明できる。正三角形での図 4 の左図を見てみよう。対称軸 ℓ の右に置かれた時計は線対称で左に写されて反対向きに回ることになる。線対称変換が運動で実現されているなら時計の回り方は変わってはいけない。長方形でも同じことである。



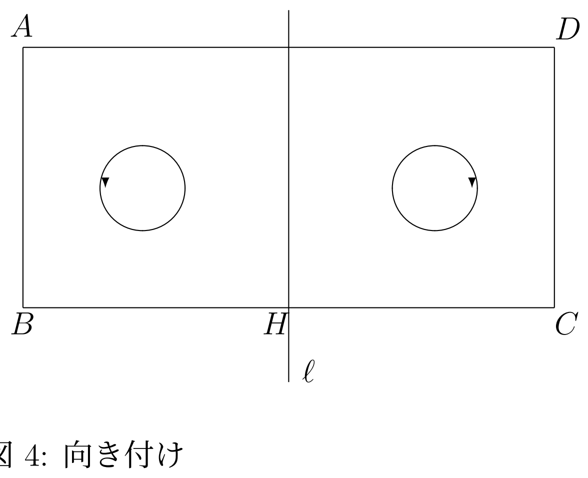


図 4: 向き付け

[6]任意の閉曲線が 1 点に連続的に変形されるという性質である。閉曲線に膜が張れることだと言った方が分かりやすいかも知れない。

さて、これで生徒が納得する説明が出来るようになっただろうか？ℓ を回転軸として三次元空間の中で回転させたら重なるじゃないかということに対して、答えていないようにもみえる。２次元の運動なら向き付けは変わらないが、３次元の運動なら向き付けは変わっても良いというのだろうか？

これは半分だけ正しいと言うべきだろう。運動では向き付けは変わらない。しかし、２次元の運動で変わらないのは２次元の向き付けで、３次元の運動で変わらないのは３次元の向き付けなのだ。実は３次元空間の中で、２次元の図形の向き付けを考えることはそれ自体では意味を持たないのだ。

では、時計はどうなるのだろうか。時計は地球上のどこでも、いつでも同じ向きに回っている筈じゃなかったのだろうか。これは矛盾なのだろうか。

時計も我々の空間の中にある３次元の物体なのだから、運動では向き付けは変ることが出来ない。２次元の回転として向きを考えることに意味がないのである。時計にゼンマイなどの機械がなく透明で、裏からも針の動きが見えたとする。時計の表から見た時の針の回り方と、裏から見た時の針の回り方は反対に見えるだろう。時計の針自体の回り方が変ったわけではない。その見え方が変わったに過ぎないのだ。時計は針の後に文字盤を置き、文字盤とは反対側から針の動きを見るという約束の元に成り立っている。たとえ見ることが出来ても、時計を裏から見てはいけないのだ。

3.5 ３次元の向き付けについても少し

３次元空間の点にも向き付けを定めることは出来る。２次元の時と同じ様にすれば良い。空間の各点 p に（同心円群の代わりに）同心球面群を考えれば、球面は向き付け可能な２次元図形だったから、一斉に一定の向きを定めることが出来る。この時、点 p の周りに向き付けを定めたと言うのである。

さて点 p を通る平面 α を考えると、同心球面群との交わりとして点 p の周りに平面 α 上の同心円群が定まる。この同心円群に向きが自動的に定まるだろうか？この向きが自動的に定まるような機構はないのである。時計の場合と同様にこの平面 α のどちら側から見るかを指定しておかねばならないのだ。平面 α とある同心球面 S との交わりである円周 γ からある点 q を選ぼう。点 q での円周 γ の向きは、同心球面 S の上に定められている向きだけでは決まらないが、平面 α のどちら側から見るかも指定してあれば定まるのである。従ってこの点 p に於ける平面 α の向き付けが定まっていることになる。

だから、３次元での各点の周りの向き付けは、その点を通るある平面のその点での向き付けとその平面をどちら側から見るのかを指定することの２つを定めることと同値である。時計は見る方向が決まっており、時計をどの様に動かしてやっても（３次元の物体としての向き付けは変わらず）、針の回る向きは変わらないということになる。

線対称を直線 ℓ の周りの回転と見たら、平面内の向き付けは変わったように見えるが、平面を見る向きも反対になっているので、３次元の回転で向き付けが変わらないということとは矛盾していないのである。

今まで長々と議論してきたことは、何も、“ 線対称を折り返しと考えてはいけない ”と言っているのではないのである。線対称を純粋に２次元の対称性の問題と考えるなら、それは（２次元の）運動としては実現できないということと言っていただけである。線対称とは折り返しで重なることだと安易に言ってはいけないと言っているだけである。

とは言っても、折り返しで重なるというのもあながち捨てがたい理解の仕方であって、たとえば対称軸 ℓ の左側に勝手な図を墨で描いておき、右側の白紙を ℓ に関して折り返して写った図形を元に戻せば、それは左側に描いてあった図形と線対称になる。つまり、線対称の説明として、折り返しを一度しただけでは重なることの説明に難しさがあるが、折り返してからまた元に戻すという二度の操作はこの場合折り返しを二度行うことになり、結局は全然動かないという運動になる。全然動かさない運動の丁度半分の操作として、折り返しで重なることの意味を説明してみれば、分かりやすいと思う人もあるかもしれない。

折り返しが２次元の中で運動ではなくとも、３次元の中では運動とみなすことが出来るならば、わざわざ難しく考える必要がないと思う人も多いだろう。折り返しが運動でないことを強調する意味を分かってもらうには、３次元での折り返し、つまり面対称（本当の鏡での鏡映）で３次元の向き付けが反対になるという議論が必要かも知れない。向き付けが反対になれば、例えば電磁誘導に関するローレンツの右手の法則も左手の法則になってしまい、力の働く向きが反対になる。これまでの議論なら、下手をすると、単なる見かけの問題と言い捨てられかねないが、３次元での向き付けには現実的で無視できない重要さがあるのだ。

さて、平面図形に限定して、特に正多角形の持つ対称性を議論してきたが、ここでの対称性は１つの多角形だけに注目しているという意味で、その多角形の内部対称性であると言うことも出来る。しかし、平面図形には、また外部対称性とでも言うべき対称性がある。これについては節を改めて述べることにしよう。

4 外部対称性（平面図形の場合）

4.1 対称変換は全平面で

3節で述べた対称性は内部対称性と言えるといった意味は、回転対称にしろ線対称にしろ、図形 S がある対称変換で図形 S 自身に写されるということにあった。もしかすると、対称変換で図形 S がひらひらと飛んでいって図形 S の上にそっと止まるというようなイメージを持つ人がいるかも知れない。もしかすると、タイムマシーンなどのように、図形 S がこの世界から一瞬消えて（たまたま同じなだけで）別の世界に現れるというイメージを持つかも知れない。多様なイメージを持つことは悪いことではないし、どのイメージが間違っているといったものでもない。

筆者が気にしているのは、数学的に言うと、対称変換の定義域が S で値域も S であると思っている人があるのではないかということである。そう思っていても、3節に述べたことは理解できるし、充分でもある。だから誤解を生むかもしれないと思いつつ、3節ではわざとそうとられる可能性のある述べ方をした。出来るだけ大上段な言葉使いをしたくなかったからである。しかし、本節の内容を述べるとなれば隠し通すわけにはいかない。

変換の定義域と値域は平面全体、少なくとも図形 S を含む十分大きな領域ととるべきなのである。例えば回転対称でも、実際に納得させようとすればどういうことをすることになるだろうか。例えば、図形 S（今は正三角形とでもしておこう）を重心の周りに 120° 回転させたら重なることを納得させようとすれば、２枚の紙を重ねて、正方形 S を切り取って、１枚の正三角形を止めておき、もう１枚の正三角形を 120° だけ回して重なることを見せるだろう。しかし、上になっている S を回していくとき、その途中はどうなのだろう。ジーッと回していく際、途中では図形 S は（合同なまま）変化しない信念があって初めて、結果として重なる２つの図形が合同であること、つまり 120° の回転で図形が変わらないことが納得されるのである。

この途中を理解するためには、どうしても定義域と値域を図形 S よりも広げておく必要がある。平面の中に正三角形 S がある。平面が正三角形 S の重心の周りに回転される。平面が動いていくにつれ、正三角形 S も動いていく。回転角が丁度 120° になったとき、魔法のように２つの正三角形が重なる。

この「魔法のように」という感覚を児童・生徒に味わって欲しいものだ。２枚の薄い透明な板を用意する[7]。１枚の板の上に正三角形を描く。重心も打っておく。重心は幾何的に精確に求めたほうが良いだろう。正三角形だから内心でも外心でも垂心でも好きな方法で求めればよい。教育的にと言って、物理的に求めるのは感心しない。なぜなら、正三角形 S を切り取って、錐の先のようなものの上に乗せて釣り合いのとれたところを重心とすればよいのだが、実際にこれをやるとど

[7]下敷きか OHP シートなどで適当なものがあるだろう

うしても誤差がでる。“ 重心だね ”と見せるだけなら、指でも当てて釣り合うことを示せば良いが、今は重心の周りに回転させて図形を重ならせようとしているので、小さな誤差が大きく響く。

さて、その上にもう１枚の板を乗せ、下の正三角形を写して描く（合同だと納得できるように丁寧に描くことが重要)。下の重心も写しておく。下の板を固定したまま、打たれた２点が重なったままであることに注意しつつ上の板を回していく。120° 回せば重なる。この 120° の提示の仕方だが、勿論重心とある頂点を結ぶ線を描いておけば、その線が回っていき、下の線との角度で回転角が分かる。この線が隣の頂点を通り過ぎる瞬間、２つの正三角形が重なり、１つに見える。このとき線の間の角度を測れば 120° になっている筈である。これが正当な示し方である。

しかし、回転角を見るには別の方法もある。板に大きく、板全体を横断するように基準の直線を引いておくのである。上の板にも写しておく。上の板を回していくにつれ、板がどれだけ回転したかは、この２本の直線の交角としても実現されている。同じことだが、この方法の方が正三角形 S よりもっと大きいものの間の対称性として感じられるかも知れない。

この方法を線対称の時にやってみるとうまくいくだろうか。正三角形 ABC に頂点 A から底辺に垂線 ℓ をおろした図 (図 2 左図) を１枚目に描き、上の板にも写しておく。直線 ℓ は板の端まで延ばしておく。そして、この線の両端に指を置いて、上の板をグルッと回せばよい。しかし、板を回そうとすれば下の板に当たるだろう。下の板に当たらないだけ上の板を持ち上げてからでないと回すことが出来ない。元の図から考えると一旦その世界から離れて言わば天空に持ち上げて回さなければならない。板が小さければ余り困難を感じないかもしれないが、本来この板は無限に広がる平面を表わしていた。回転対称の場合は板が無限に広がっていても回すことにそれほど困難は感じないですむだろうが、線対称の場合には板が無限に広がっていては無限に持ち上げても回せるかどうか定かでない。

ストレートにこう感じるかどうか分からないが、何かしらこうした点をうすうす感じて、線対称を分かりにくい[8]と感じる生徒もいるという可能性があることを、現場の教師は分かっていて欲しいのである。

4.2 パターン IV_0(正方形)

さて、変換とは本来平面全体（乃至十分広い領域）の変換であることを注意したが、平面での合同変換と言えば、平行移動が直観的には最も理解しやすいものだろう。しかし平行移動というものは自明なものを除いて同じ図形に重なることはない。あくまで、違う図形が平行移動で重なるということになる。平行移動で

[8]訊いてみると、回転対称よりも線対称の方が理解しやすいし説明もしやすいと考えている教師が多いようである。

重なるとき２つの（違う）図形は合同と呼ばれるが、決して同じ図形だと言っている訳ではない。本当は回転対称でも線対称でもそう思うべきなのだけれど。

平行移動で図形がどう変わるかという話題は余りに哲学的かもしれないので、それは分かっているとしよう。一度平行移動すれば合同な図形が得られるが、何度も繰り返して平面全体を埋め尽くせるかという問題を考えてみよう。

そういう図形の一番初めの候補は正方形ということになるだろう[9]。一辺の長さが a の正方形 $OABC$ を考えよう (図５左)。

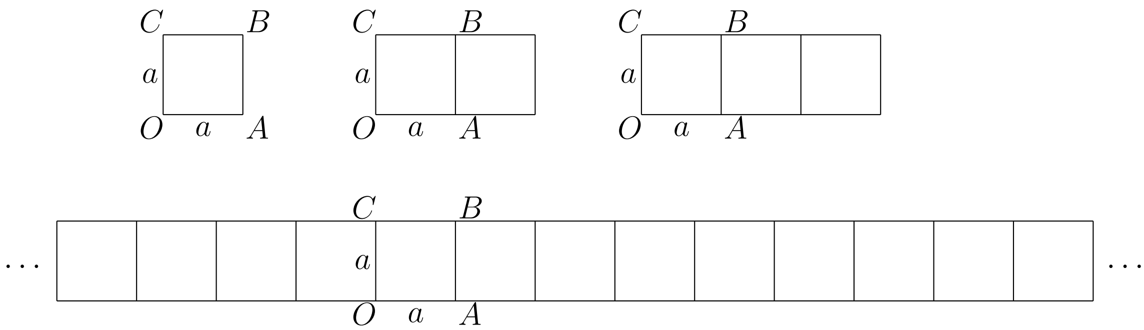


図 5: 正方形に正方形を、くっつけていく＝ずらしていく

正方形 $OABC$ を $\overrightarrow{OA}$ の方向に a だけ平行移動すると、辺 AB の右側に同じ正方形がくっつく格好になり、横が長さ $2a$ の長方形が得られる。もう一度同じ平行移動をすれば横が $3a$ の長方形になり、次々に移動を繰り返せば、辺 AB の右方に横がいくらでも長い長方形が得られる。

勿論方向を逆にして、$\overrightarrow{AO}$ の方向に a だけ平行移動していけば、辺 OC の左方に次々とこの正方形をくっつけていくという感じになる。左右とも無限に続ければ、この平面を横断する幅 a の帯が得られることになる。得られた幅 a の無限の長さの帯（リボン）が長さ a ずつで区切られている。その１つ１つの正方形を別の色で塗るなり、１つおきに同じ色で塗ったりすれば、帯に模様が出来る。このようなとき正方形による帯のパターンが得られたと言っても良いだろう。

更に、$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CO}$ の方向に a だけの平行移動を繰り返せば、無限の長さの十字形が得られる。また別に、元の正方形 $OABC$ に対してだけでなく、左右に動かしたすべてのものに対して $\overrightarrow{OC}$ 方向 a だけの平行移動をすれば、幅が $2a$ の帯のパターンが得られる。上下にこれを繰り返せば、平面全体が正方形 $OABC$ に合同な正方形で隙間なく埋め尽くされることになる (図６右)。

こうした状態を後で引用するために、言葉を用意しよう。ある図形 S とそれに合同な図形によって平面全体が隙間なく埋め尽くされるとき、S を**基本図形**とする**パターン**が得られたという。この意味で、図６の右図は、正方形を基本図形とするパターンであり、パターン IV_0 と呼ぶことにしよう[10]。

[9]タイル張りの壁や床などを思い浮かべても、まず正方形というのが自然だろう。

[10]特別な四角形である正方形を使った特別なパターンだという意味の便宜的な名前である。以下

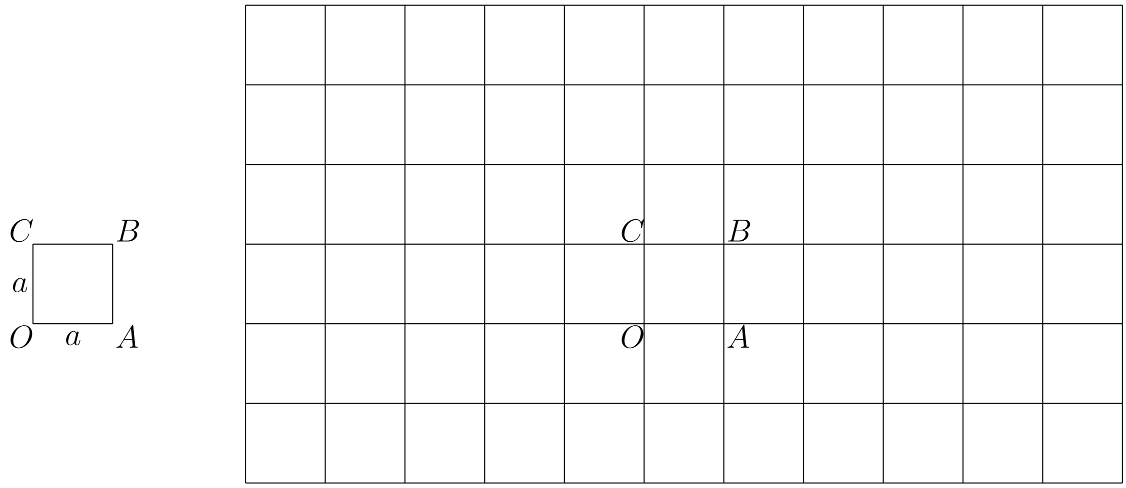


図 6: 正方格子、パターン IV_0

$\overrightarrow{OA}$ 方向 a だけの平行移動という言い方は感覚的には分かり易いかもしれないが、多少曖昧なところもあるし用語としての重複もあるので、**矢印ベクトル** $\overrightarrow{OA}$ **の平行移動**という言い方を導入しよう。

矢印ベクトル $\overrightarrow{OA}$ というとき、普通始点 O から終点 A への方向と長さ、つまり点 O から点 A までの距離、を同時に考えていることだと理解されているだろう。しかしここで、方向とは何かという問題が起きる。方向とは何かを説明するのは容易ではない。教えてみると分かるが、方向について持っている各自のイメージにはかなり異なったものがある。

むしろ単に平面の点の順序対 (O, A) だと考えたほうがはっきりする[11]。その前の点 O を**始点**と呼び、後ろの点 A を**終点**と呼べばよい。そして、方向とは何かを問わない代わりに、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動 $T = T_{\overrightarrow{OA}}$ を平面 α の変換 $T : \alpha \longrightarrow \alpha$ として確定した意味を与えればよい。

そこで、平面 α の任意の点 P の像 $Q = T(P)$ を次のように定めるのである。α 上に点 O, A, P をとる。OA は有向線分である（図 7 左）。点 O と P を結び、OA, OP を２辺とする平行四辺形を作り新しく得られた頂点を Q とするのである（図 7 中）。この時、矢印ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と矢印ベクトル $\overrightarrow{OA}$ は同じものだと考えるのである。つまり、平行四辺形の対辺同志の表わす矢印ベクトルは同じであると考えるのである。

平面の各点を同じ矢印ベクトルの分だけ移動することが平行移動であり、この

取り敢えずのパターンの名前の原則は、基本図形の多角形の辺の数をローマ数字で表わし、添数は特別に良いパターンを 0 とする以外は出現順に付けてある。この種の議論が認知されるようになったら整理し直すつもりである。

[11] What?を問うことを止め、How?を問うことにしたニュートン以来の数学（自然科学）の基本姿勢に従ったまでである。つまり、方向とは何かを問わず、方向を指定すると何が起きるか、またどういう手続きが同じ方向を定めるかということを問題にするのである。

意味で矢印ベクトル $\overrightarrow{OA}$ は方向を定めていると言っても良いだろう。

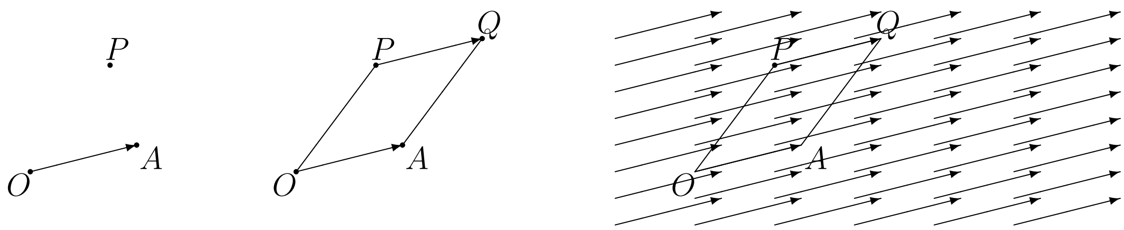


図 7: 平行移動

パターン IV_0 が１つの正方形から平行移動を繰り返すことによって得られていることを、生徒に体感させる工夫には色々あるだろうが、１つ述べておこう。まず、目の粗い方眼紙を用意する[12]。透明な板をその上に乗せて、１つだけ方眼紙の正方形を写し取る。方眼紙の上で板を上下左右に滑らすように動かして、正方形が次々に各方眼に重なる様子を見せる。どれだけ動かしたら重なるかを良く観察させ、記録させる。更には、この方眼紙を OHP シートにコピーして、方眼紙の上に重ね、丁度**同じ**動かし方をしたときにパターン全体が重なることを見せるとよい[13]。

4.3 パターン III_1(正三角形)

次に、一辺が a の正三角形 OAB を考えて（図 8 左)、正方形でやったことと同じことをやってみよう。勿論正三角形は正方形とは違うのだから、まったく同じ様にはいく筈もないが。

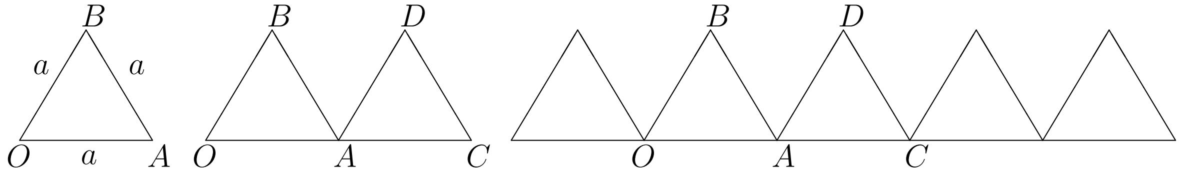


図 8: 正三角形を左右へ

$\overrightarrow{OA}$ 方向の平行移動は出来るだろう（図 8 中)。これを左右に続けていけば、鋸の歯のようなものが出来ることになる（図 8 右)。

[12]目は大きいほうがよい。余り小さいと１つの目が表わす正方形に注意が向かないだろう。児童の年齢に合わせて目の大きさを考えたほうがよいだろう。

[13]方眼紙から正方形を１つだけ切り取って、それを動かしてどの方眼にも重なることを示すなどは、次善の策というべきだろう。１つの正方形が動くだけでなく、平面全体が動くことを自然に体感させるのが狙いなのだから。

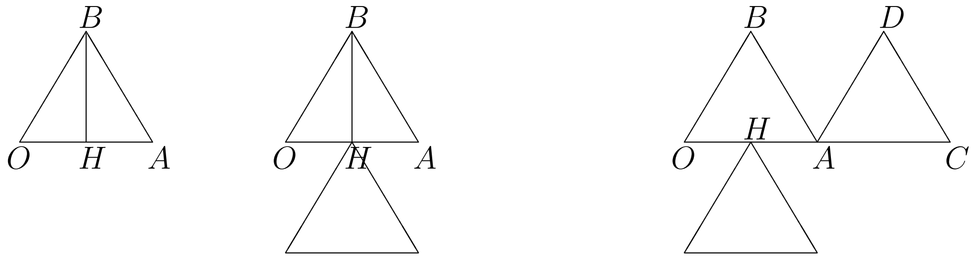


図 9: 正三角形を下と右へ

これでは隙間が多すぎて平面を埋め尽くせないような気もするが、まずは正方形でやったようにもう一つの方向を OA に垂直な方向にとってみよう。頂点 B から OA に下ろした垂線の足を H とすると、BH の長さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ となる（図 9 左）。$\overrightarrow{BH}$ 方向に長さ a の平行移動をすると、元の $\triangle OAB$ から離れてしまって隙間がありすぎるので、代わりに長さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ の平行移動をすると、辺 OA の中点が新しい正三角形の頂点の位置に来る（図 9 中）。これにベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動を重ねてやれば図 9 の右図になる。

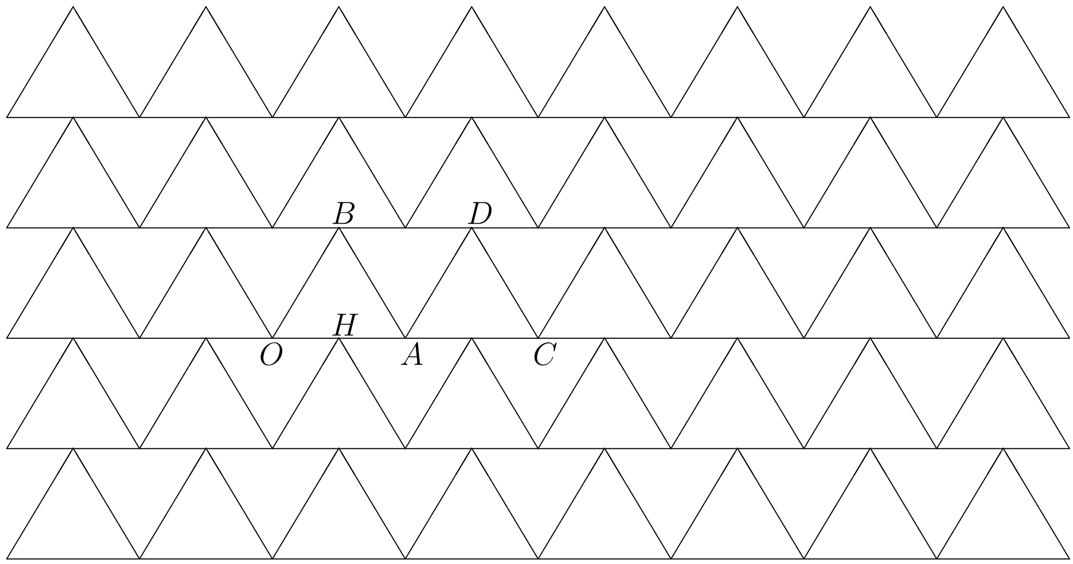


図 10: 正三角形を上下左右へ、パターン III_1

$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AO}$ 方向の長さ a の平行移動と、$\overrightarrow{BH}$、$\overrightarrow{HB}$ 方向の長さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ の平行移動を繰り返しても、平面を埋め尽くせるとは思えないかも知れないが、実際にやってみることにしよう。左右上下に数回ずつの平行移動をした図（図 10）を見ると、埋

め尽くせてしまうようにも見えてくるだろう。このうち $\triangle OAB$ を平行移動して得られるものだけ塗り潰すと、抜けている部分が塗られている部分と同じパターンの上下を反対にしたもののように見えるだろう。

$\triangle OAB$ をまず水平に、それから垂直に平行移動していったものを考えれば、鋸の歯状のものを上下に積んでいくという形になるが、歯の抜けた部分がそれぞれまた同じ正三角形になっている。例えば $\triangle ADB$ は線分 AD, DB, BA によって囲まれて出来てしまった領域だが、すべての辺の長さが a で等しいことから $\triangle OAB$ に合同な正三角形になる。

平行移動で埋め尽くそうとして、抜けた領域として得られた三角形が元と合同な正三角形であるという説明も悪いものではないが、ここでは別の説明をしたほうがいいだろう。この議論の趣旨は、図形を合同変換によって動かしていくことで得られるものという流れの中にあるのだから。

さて $\triangle ADB$ は、$\triangle OAB$ から線分 AB の中点を中心に $180°$ の回転をして得られる（点対称と言っても良い）。$\triangle ADB$ ばかりでなく、この同じ回転で、塗り潰されたパターン（全平面に広がったものと考えている）は、抜けた領域のパターンに写っている。

ここでもしかすると、世界がグラッと揺らぐような感受性を持つ生徒がいるかも知れない。一種の眩暈を感じる生徒でもよい。（いても良いじゃないかという気持ちと、そう感じさせるだけの技術を持った教師がいて欲しいという願望が言わせているらしい[14]。）

さて、話を戻そう。AB の中点の周りに平面全体を回してしまったが、$\triangle OAB$ を回して $\triangle ADB$ を得ただけの所に戻ってみよう (図 11 左)。これをまた AD の中点の周りに $180°$ 回転させると $\triangle ACD$ が得られる (図 11 中)。これは単に $\triangle OAB$ を右に長さ a の平行移動をしたものだった。

AB の中点、DA の中点、CD の中点、等等に関する $180°$ 回転を繰り返していけば右の方に、また左の方に BO の中点等々の周りの $180°$ 回転を繰り返していけば、幅 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ の無限に長い帯が得られ、正三角形による帯のパターンが得られたことになる (図 11 右)。

これは左右に無限に長い鋸の歯を、AB の中点に関して $180°$ 回転して得られると言っても良いし、また鋸をこの平面からグイッと引き抜いて上下をひっくり返してから抜けているところにはめ込んだものと思ってもよい。

何はともあれ、一定の幅の帯が出来たのだから、帯の幅だけずらしていけば全体が覆えることになる。つまり、$\vec{BH}$、$\vec{HB}$ 方向の長さ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ の平行移動を繰り返

[14] ファーブルの昆虫記に感激した子供は生物（学）に興味を持つ以上に文学を志す傾向にある、というようなことがあっても良いのではないだろうか。昆虫の生態に興味を持つことと、昆虫学に興味を持つこととの間にあるギャップは無理に埋めないほうがよい。数の神秘に興味を持ち、図形の美しさに魅せられても、それが算数・数学の“ 勉強 ”が好きな子供だとは限らないし、それはそれで良いのではないだろうか。一方で、算数・数学の出来が悪くても（試験の成績などで）、数学の好きな子供もいるのだということを教師は忘れないで欲しい。

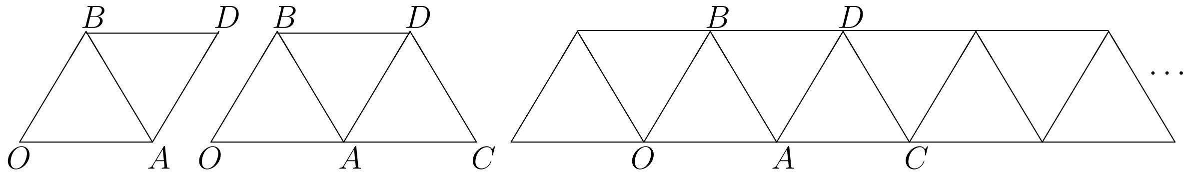


図 11: 正三角形による帯のパターン

していけば、全平面を埋め尽くすことになる。このパターン (図 10) を III_1 と呼んでおこう。

ところで、辺の中点に関する 180° 回転は、ある意味で、他の辺に沿って辺の長さだけの平行移動という変換の平方根だと思うことも出来る。数の場合の平方根でも根は 2 つあったように、この場合でも別の平方根に当たる変換があるのではないかと思うとすれば、それは良い感覚と言えるだろう[15]。しかし例えば、頂点 A の周りに右回りの 60° 回転が平方根になっていると思うのは早合点というものだ。A の周りの 60° 回転を 2 度行えば、確かに平行移動して得られる正三角形に重なりはするが、変換としては同じではない。回転では頂点 A は動いていないが、平行移動は不動点を持たないのだから。

パターンを重視して言うことにすれば、AB の中点の周りの 180° 回転と異なって、点 A の周りの 60° 回転は帯のパターンも平面全体のパターン III_1 も保たないのである。

基本図形を正三角形とするパターンの議論は 4.11 節まで延期して、以下では四角形に対して議論を続けていくことにする。

4.4　パターン IV_1(平行四辺形) とパターン IV_2(長方形)

パターン III_1 では平行移動だけでは平面を埋められなかったので、辺の中点に関する 180° 回転も考えたが、正方形でのパターン IV_0(図 6) でも同様の対称性があったのだ。その時は、辺の中点に関する 180° 回転と平行移動は変換としては異なるものの、得られた図形は同じと考えることが出来たので、パターン IV_0 を作るのには不必要だっただけである。

しかしながら図形の対称性を重視するという立場に立つなら、パターンを変えない合同変換がどれだけあるかを考える姿勢も忘れてはいけない。少し考えてみれば、平行移動以外のパターン IV_0 を変えない合同変換として、頂点に関する 90° 回転、辺の中点に関する 180° 回転、正方形の重心（対角線の交点）に関する 90° 回転に気がつくだろう。

[15]結果として同じにみえるが、点の周りの 180° 回転にも、右回りと左回りがあり、それが正負に対応していると言ってよい。

最後の重心に関する回転は“ 内部対称性 ”の議論でも出てきたものだ。そこでも議論されていた線対称、即ち、対辺の中点を結ぶ直線に関する鏡映と対角線に関する鏡映もパターン IV_0 を保っていることが分かる。また更に正方形の各辺を延長した直線に関する鏡映もパターンを保っている。

これを見ても前節の議論でのように問題にしている図形だけを動かして考えるより、平面の変換が偶々その図形を保っていたと考えるほうが深いことが分かるだろう。正方形が重心の周りに回転するとき、この無限に広がったパターンも回転していたのである。

さて、学校では正方形のほかにも色々な四角形を教えている。長方形、菱形、平行四辺形、等脚台形、等脚でない一般の台形、それにどんな特徴もない一般の四角形などである。これらを対称性の観点から区別しようとしても、上で内部対称性と呼んだものだけではうまくその差を際立たせることは難しい。外部対称性と呼んでいるパターンの形成力がこの差を際立たせる道具として有効であることも示していきたい。ある図形 S に着目したとき、S を基本図形とするパターンのうち、対称変換を一番多く取れるものが S によって違うとか、また一番多いものでなくとも他の図形では得られない種類の対称性を持つパターンが得られるとかいったことで特徴付けられないかと考える訳である。

正方形はさすがに対称性が高く、パターン IV_0 には非常に沢山の対称性があった。しかし例えば一般の平行四辺形を考えよう（図 12 左図）。「一般の」というのはここでは、$a \neq b$ とか内角がある特定の角度でないという意味である。

$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AO}$ 方向の長さ $a = |OA|$ の平行移動と、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{CO}$ 方向の長さ $b = |OC|$ の平行移動を繰り返して行えば、平面が埋め尽くされることが分かる（図 12 右図）。このパターンを IV_1 と呼ぼう。パターン IV_1 で他に許される変換には、頂点に関する $180°$ 回転、辺の中点に関する $180°$ 回転と、平行四辺形の中心（対角線の交点）に関する $180°$ 回転（点対称と同じ）があるが、パターン IV_0 で許された他の変換はこのパターンを保たないことが分かる。特にどんな鏡映も許さない。

辺に関する $180°$ 回転は平行移動と同じ図形を与えるし、中心に関する $180°$ 回転も新しい図形を生まない。従って一般の平行四辺形では、辺に沿っての平行移動が基本的と言える。

ここで、少しだけ数学的な言葉を導入しよう。話が複雑になってくると日常会話だけではどうしても気詰まりになってくる。言いたいことに比べて使わねばならない言葉の数が多いから、巻き舌になったみたいになる。人と人との会話なら、相手の眼を見ながら“ 阿吽の呼吸 ”で通じ合えるかもしれないが、理論的なこととなると通じて欲しいという思いだけではどうにもならないことになる。巻き舌にならないようにするために、言葉の節約ということを考える。ある程度の長さの文章でしか説明できないことを一つの言葉にまとめてしまう。このまとめるという働きは、何かの自然な原理によっているのでもなければ必然性がある訳でもないことが多い。どう定義するかは勝手なのである。それ故にこそ、言葉を定義する文章は誰が読んでも同じ意味にとることが出来るような、いわば“ 無味乾燥

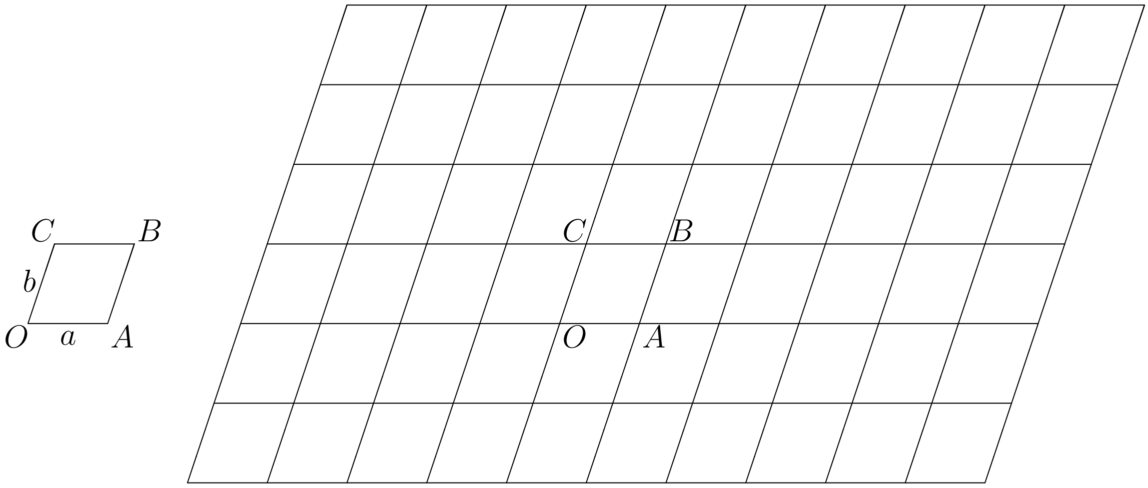


図 12: 斜方格子、パターン IV_1

な ”言葉で綴られねばならない。その規範を守っていれば、“ わび ”や“ さび ”の分からぬ外人さんとでも、完全に意思の疎通が出来るのである。

難しいことではない。算数でもよくやっていることだ。例えば正三角形という言葉はここでも何度も使っているが、すべての辺の長さと内角が互いに等しい三角形という意味だった。すべての辺が等しい三角形のことだと思っている生徒がかなりいるだろう。すべての辺が等しい三角形は内角も等しくなってしまうから、「これは間違いだ」と言うわけにはいかない。いかないのだが、むしろ間違いと言ったほうが良いことの方が多い。定義と性質を混同しない方が良いと言っているのである。つまり、その方が対処できる対象が広いのである。

四角形で考えてみればすぐに分かる。すべての辺が等しいだけでは菱形にしかならず、正方形にしたければ内角も等しくないといけない[16]。つまりすべての辺の長さと内角が互いに等しい多角形としての正多角形という概念があって、そのうち辺の数が３であるものが正三角形であるという定義の方が一般的な文脈で捉えることが出来るというわけである。

定義というのは所詮言葉の約束ごとで、何が正しいという原理など無いのだから、だからこそ出来るだけ一般的な文脈で規約しておいた方がおぼえやすいし、又間違いも少ないということである。

述べるのは複雑なのではあるが事柄として頻繁に起きることとか、議論の中で繰り返し引用される性質とかを、簡潔で印象深い言葉で述べられたとしたら、それが良い定義なのである。適切な概念を捉えたということになる。

さて、言葉の節約のために、$\overrightarrow{OA}$ 方向の長さ $a = |OA|$ の平行移動と呼んだもの

[16] こうすれば内角が自然に直角になるのであって、内角が直角である菱形を正方形と言うのではない、正方形になるのである。

を、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動と言い換えたことについて考えてみよう。ベクトルという概念を援用したのだから、スカラー倍も定義に取り入れたことになる。つまり、ベクトル $-\overrightarrow{OA}$ の平行移動とはベクトル $\overrightarrow{AO}$ の平行移動のことであり、ベクトル $2\overrightarrow{OA}$ の平行移動とはベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動を 2 度行うことであり、$x > 0$ に対して、ベクトル $x\overrightarrow{OA}$ の平行移動とは、$\overrightarrow{OA}$ 方向の長さ $x \times |\overrightarrow{OA}|$ だけの平行移動のことである[17]。

更には和の概念も取り入れたことになる。例えば、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動に続いてベクトル $\overrightarrow{AB}$ の平行移動を行ったとすれば、二つのベクトルの和 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ を考えれば、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ の平行移動と同じ変換になることが分かるというわけである。

勿論、ベクトルという言葉を使った瞬間に、スカラー倍と和に対する操作が可能になったと言うのではない。上のことは例えば、スカラー倍の時にでも $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}$ であることと、ベクトル $2\overrightarrow{OA}$ の平行移動とベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動を 2 度続けて行った変換が同じになるということに対応していると言うようなことも含めて、証明を要することである。証明を要することではあるが、ベクトルという言葉を使った瞬間、その様なことが成り立つことを予感させるのである。

そしてこの予感させるということがこの言葉を使うときの利点でもある。しかしこういう利点があるからこそ、不用意な言葉を使ってはいけないのだ。何かを予感させる言葉を使ったとして、その何かが成り立っていないときは、論理の運用に悲惨なほどの混乱を生じることになる[18]。

話が逸れたが、もう一つ言葉を用意させて欲しい。上のようにある図形 S を平行移動なり、回転なり、何かの鏡映なりの平面の合同変換で写していって、平面全体が S に合同な図形で隙間なく埋め尽くされるパターンが得られるとき、図形 S をそのパターンの基本図形と言うことにしよう[19]。

話しを元に戻そう。パターン IV_1 で平行四辺形の辺の長さが等しければ、即ち、$a = b$ ならば、基本図形は菱形となるが、対角線が直交することから、パターン IV_1 は、二つの対角線に関する鏡映に関しても不変になることになる。

頂点の周りの回転が対称変換であって欲しければ、隣り合う辺が等しくならねばならず、菱形しか許さないが、更に、一点の周りの角が 360° であることから、内角はすべて直角であるか又は 60° と 120° の組み合わせでないといけない。

菱形で直角なら正方形であり、パターン IV_1 はパターン IV_0 に戻ってしまうが、頂点に関する回転を考えるとき菱形になるという制限は、回転していくとき最初

[17]従って、$\dfrac{x}{|OA|}\overrightarrow{OA}$ の平行移動は $\overrightarrow{OA}$ 方向長さ x の平行移動のことであるが、後者の言い方の方が分かりやすいこともある。場合に応じて言葉は使い分ければよい。

[18]敢えてこの混乱を利用する人種にならないようにする倫理感と、またその種の人間に騙されないようにする能力を養うことが、教育の目的であったりもする。

[19] 1 つの図形 S に対して、色々なパターンが得られる。それに応じて色々な対称変換（パターンを変えない平面の合同変換のこと）が得られる。恒等変換以外に対称変換がないようなパターンさえ存在するかもしれない。

に出会う辺と重なることを要請したことになっていたのである。最初でなくいつか重なればいいのなら、直角の時は基本図形は長方形でも良く、パターン IV_0 を上下にか左右にか引き伸ばしたようになる (図 13)。

このパターン IV_2 では、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の平行移動、ベクトル $\overrightarrow{OC}$ の平行移動、頂点に関する 180° 回転、辺に関する 180° 回転、重心（対角線の交点）に関する 180° 回転、対辺の中点を結ぶ直線に関する鏡映、各辺を延ばした直線に関する鏡映で不変になっている。パターン IV_0 の時と比べると、頂点と重心に関する回転角が 90° から 180° になっていることと、対角線に関する鏡映がパターンを保たなくなっていることが違う。正方形よりも長方形の方が対称性が低いということの顕れである。

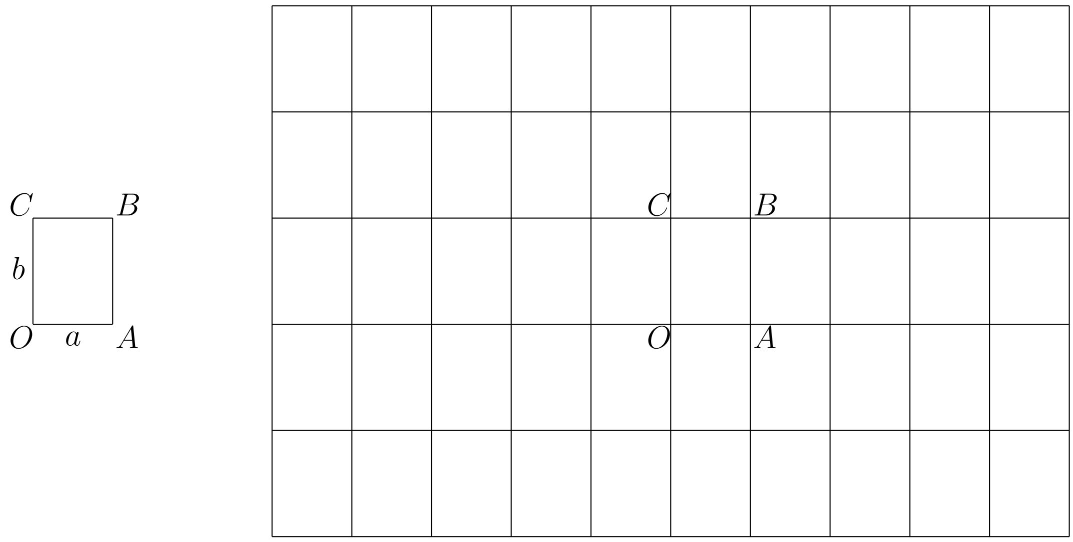


図 13: 長方格子、パターン IV_2

4.5 パターン IV_3(内角が $60°, 120°$ の菱形)

さて $60°, 120°$ の組み合わせの場合を考えよう。一辺の長さが a の菱形 $OABC$ で、$\angle AOC = 60°$ であるものを考えよう（図 14 左)。頂点 A の周りに回転させていくと、$120°$ 回転したところで四角形 $AEDB$ が得られる（図 14 中)。これはまた、頂点 B の周りに $60°$ 回転させたものにもなっている。更にまた、辺 AB に関する鏡映でも同じ図形、菱形 $AEDB$ が得られていることも注意しておこう。

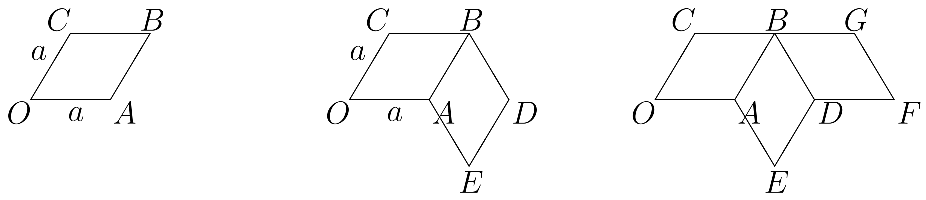


図 14: 内角が $60°$ の菱形

もう一度頂点 B の周りに $60°$ 回転させると、図 14 の右図になる。更に次々と、各頂点の周りに隙間のないように回転させていくと、パターン IV_3(図 15) が得られる。上の注意から、このパターンは元の菱形 $OABC$ から辺に関してパタンパタンと折り返していけば得られることにもなる。

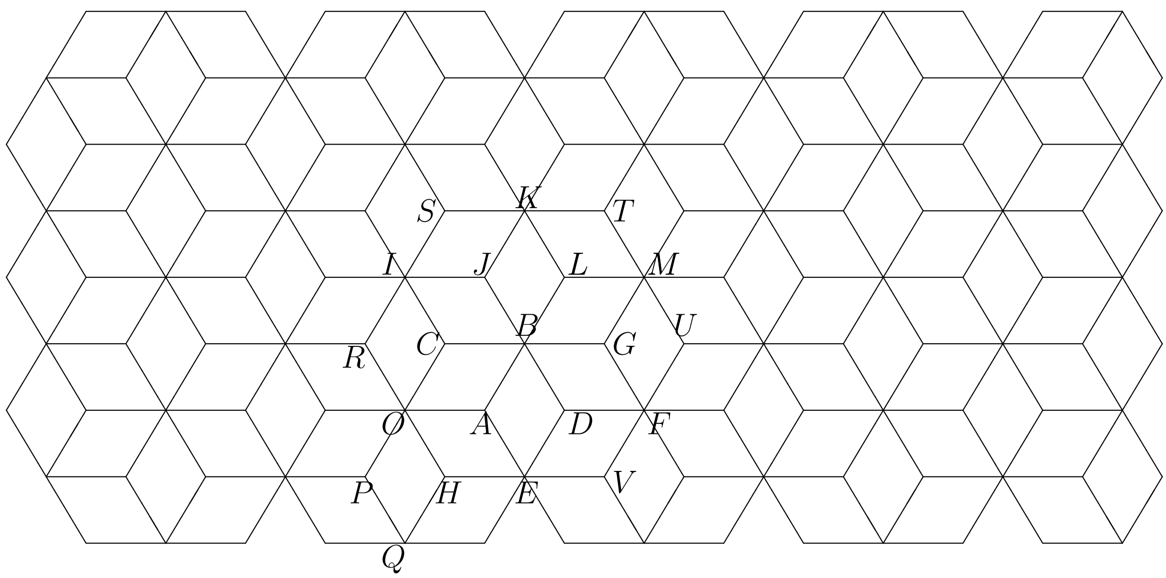


図 15: 菱形 (内角が $60°, 120°$) の回転、パターン IV_3

平行移動ということだけに注目してみるなら、図14右の菱形 $OABC, AEDB, DFGB$ は互いには写りあわないし、またパターン IV_3 に現れる菱形はすべて、このどれか一つに平行移動によって写されることが分かる。

単純に考えれば、水平にはベクトル $3\overrightarrow{OA}$ の平行移動でパターンは保たれるし、垂直にはベクトル $\overrightarrow{EB}$ の平行移動で保たれている。しかし、ベクトル $\overrightarrow{EB}$ は、幾何的には菱形の長いほうの対角線になっている。ならば、他の長い方の対角線、例えばベクトル $\overrightarrow{OB}$ 、$\overrightarrow{BF}$ の平行移動でもパターンを保つであろうか。確かに、これもパターンを不変にしていることが分かる。しかしこれは当たり前だった。頂点 B で考えてみれば、ベクトル $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$ は点 B の周りに $60°$ ずつの回転で得られているのだから。

水平方向のベクトル $3\overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}$ であるし、垂直方向のベクトル $\overrightarrow{EB}$ も $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BF}$ であるから、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ の平行移動とベクトル $\overrightarrow{OE}$ の平行移動を（逆を取ることも含めて）適当に合成すればパターンを保つ水平垂直方向のすべての平行移動が得られることが分かるだろう。実はそれだけでなく、パターン IV_3 を保つすべての平行移動はこのようにして得られるのである。数学的な言葉を使えば、パターンを保つ平行移動を与えるベクトルは

$$m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OE} \quad (m, n \text{ は整数})$$

の形で得られることが分かるのである。

簡潔でかつ紛れのない表現であることよ！言い逃れを許さないこの潔さ！これが数学の美しさだ。勿論ほかの種類の美しさも数学にはあるけれど、これが数学の際立った特徴であり美しさであることは誰もが認めてくれるのではないだろうか。

ついでと言っては何だが、パターンを保つ平行移動の全体はベクトルの和に関して群[20]になっており、**パターンの平行移動の群**と呼ぶことにしよう。パターン IV_3 の平行移動の群を $\mathcal{H}(IV_3)$ と書くことにすれば、$\mathcal{H}(IV_3)=\{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OE}\,|m, n$ は整数$\}$ ということになる。

折角群の記号を使ったのだから、右辺ももう少し数学らしく簡潔な表現にしよう。整数の全体を $\mathcal{Z}$ と表わす習慣がある。集合 $\{m\overrightarrow{OB}\,|m$ は整数$\}$ を $\mathcal{Z}\overrightarrow{OB}$ と表わせば便利だろう。そのとき、平行移動の群は $\mathcal{H}(IV_3)=\mathcal{Z}\overrightarrow{OB}+\mathcal{Z}\overrightarrow{OE}$ と表わすことが出来る。

平行移動はこれだけを簡潔に述べられたのだが、他のパターンを保つ変換はどうなのだろう。それには回転と鏡映があった。

一般にパターンの対称変換はパターンを変えないのだから、１つの対称変換を施したあとさらに別の対称変換を施すことが出来るので、対称変換の全体もまた群を作ることが分かる。合同変換の集まりなので $\mathcal{G}(IV_3)$ と書くことにしよう。また前節の議論からも分かるように、平行移動と回転とからは鏡映は得られないので、平行移動と回転のすべては $\mathcal{G}(IV_3)$ の部分群になり、平面の運動から得られるので $\mathcal{U}(IV_3)$ と書くことにしよう。パターン IV_3 に対して、３つの対称性の群

$$\mathcal{G}(IV_3)\supset\mathcal{U}(IV_3)\supset\mathcal{H}(IV_3)$$

[20]群とは単位元と逆元を持ち、結合律を満たす演算を持つ集合のことである。概念の成立のときから、群は「操作」そのものを数学の対象としたものであり、可能な操作の全体に構造があることの認識であった。

が得られたことになる。

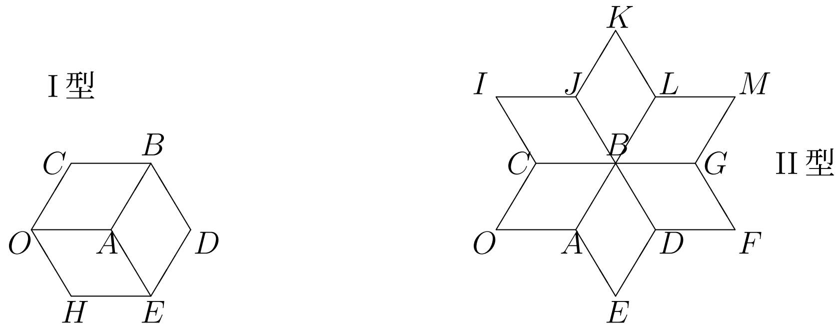


図 16: パターン IV_3 の頂点の星型近傍

元々頂点に関する回転が欲しくて内角が $60°, 120°$ の菱形を考えたのだから、そういう変換はある。勿論、一つの菱形から次の菱形を作っていくのに回転を使ったというばかりでなく、パターン全体がこの回転で不変になっている。当たり前の事だが頂点には 2 種類あると考えられる。その点での内角が $120°$ か $60°$ かの 2 種類である。始めの菱形 $OABC$ から点 A の周りに回転させていくと図 16 の左の図になり、点 B の周りに回転させていくと右の図になる。

これをそれぞれ頂点 A, B の周りの星型近傍と呼ぶことにする。頂点 A の星型近傍は B のそれ程星型には見えないかも知れないが、共通の名称が欲しいので許してもらうことにしよう。パターン IV_3 を議論している間、点 A のように $120°$ の内角を与える頂点を I 型、B のように $60°$ の内角を与える頂点を II 型と呼ぶことにしよう。

最初に気がつくことはパターンの中の頂点は I 型か II 型かどちらかの点しか存在しないということだ。一つの点に $60°$ の内角と $120°$ の内角が集まってくることはないのである。理由は、回転では、回転の中心の点は動かないという事からくるのだ。例えば上の図で点 A の周りを回転していくとき、A という点それ自体は動かないのだから、菱形における位置関係、つまり $120°$ の内角を与える頂点であることは変わらないのである。B のような点であっても同様なわけである。

くどいようだが、頂点の周りの回転が欲しかったからこうなったわけで、$60°$ と $120°$ の内角が隣り合って欲しければそういうパターンもある。$60 + 120 = 180$ で直線角が得られ、つまりはパターン IV_1 に戻ってしまう。パターン IV_1 で許される回転は平行四辺形の中心に関する $180°$ 回転と辺の中点に関する $180°$ 回転だけである。しかも許される回転は、菱形であってもなくも同じだけしかないし、ましてや内角が $60°$ であることで増えることはない。

さて、次に気がつくのは同じ型の点は線で結ばれていないということだ。例えば点 A は I 型だが、これと直接辺によってつながっている点は O, E, B のように II 型の点になっている。逆に II 型の点 B につながっている点 A, D, G, L, J は I 型の点ばかりである。

またII型の点Bと、最も近いII型の点O, E, F, M, K, Iとを結ぶベクトル$\vec{BO}$, $\vec{BE}, \vec{BF}, \vec{BM}, \vec{BK}, \vec{BI}$による平行移動がパターンを不変にしていたのであった。このベクトルを好きなように足したものが、パターンを保つ平行移動を与えるベクトル全体と一致するのだから、II型の任意の二点を結ぶベクトルが与える平行移動はパターンを保つことになる。

I型の点同志でも同じだ、ということは成り立たない。例えば、点A, C, DはすべてI型だが、ベクトル$\vec{AC}$の平行移動もベクトル$\vec{AD}$の平行移動もパターンを保っていないことは見れば分かる。

I型の点も実は2種類に分けられて、各々の種類の点同志で定まるベクトルはパターンを保つということもできるのだが、次節で少し違ったアプローチから考えてみることにしよう。

4.6 パターンIV_3の部分パターンVI_1(正六角形)とその部分パターンX_1とX_2

まずI型の点を一つ取る。点Aということにしよう。点Aを頂点とする菱形すべてを考えると、図16左の正六角形$OHEDBC$になる。点Aはこの正六角形の中心になっており、正六角形の方は点Aの星型近傍になっている。

この正六角形をパターンIV_3の許すすべての平行移動で写していくと、辺以外では交わらず、全平面を埋め尽くすことが分かる。ベクトル$\vec{OB}$の平行移動で写せば正六角形$BDFUML$となり、ベクトル$\vec{OI}=\vec{EB}=\vec{OB}-\vec{OE}$の平行移動で写せば正六角形$ICBLKS$となっている。こうして、正六角形$OHEDBC$を基本図形とするパターン$VI_1$が得られる(図17)。**蜂の巣**型のパターンとして有名なものである。

このパターンは又次のようにしても得ることが出来る。パターンIV_3で考える。点Aから始めて、点Aの星型近傍を取り、次にその外のI型の点でこの近傍に最も近い点を取る。例えば、G, J, R等である。そしてその星型近傍を取る。そしてその外のこれまでの図形に最も近い所にあるI型の点を選び、その星型近傍を取るという操作を全平面に及ぼしていけば、パターンVI_1を得ることが出来る。

このパターンの各正六角形の中心の点はすべて、元のパターンIV_3のI型の点であって、それらを結ぶベクトルは、丁度$m\,\vec{OB}+n\,\vec{OE}$（m, nは整数）の形のもの全体になっている。

このパターンは点Aから始めたのだが、点Aと上の形のベクトルでは結ばれないI型の点、例えば点Cから始めても同じ様に正六角形を基本図形とするパターンが得られる。しかし、このパターンはパターンVI_1をベクトル$\vec{AC}$の平行移動によって写したものであり、パターンとしては同じものであることが分かる。パターンVI_1の正六角形$OHEDBC$は正六角形$ROABJI$に写されている(点の名前は図15のもの)。このパターンの正六角形の中心の点だけを考えれば、これもパ

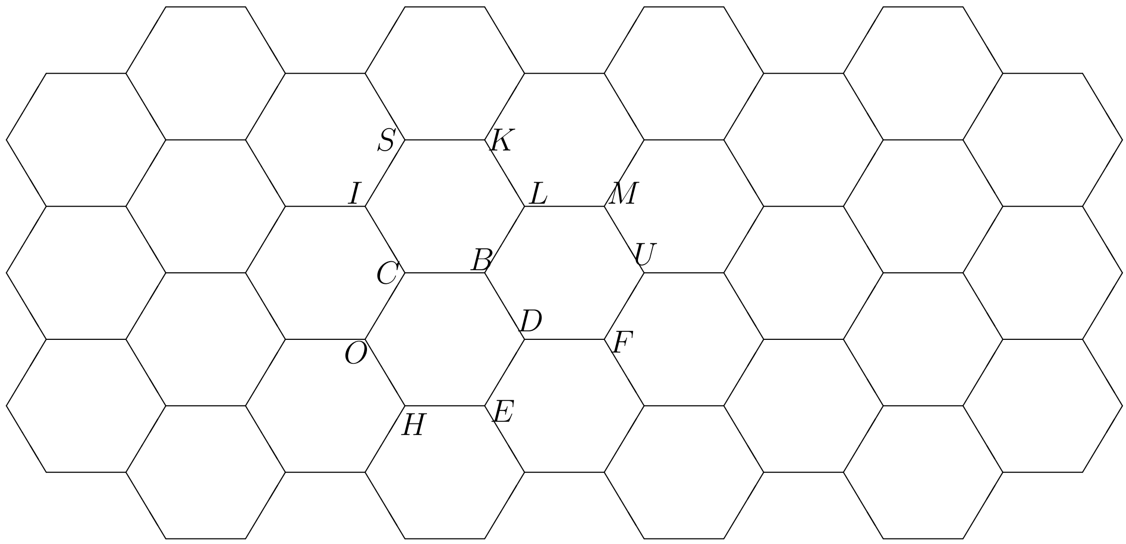


図 17: 蜂の巣、パターン VI_1

ターン IV_3 の I 型の点であり、互いの差は $m\ \vec{OB} + n\ \vec{OE}$（$m, n$ は整数）の形のベクトルになっている。

パターン VI_1 はパターン IV_3 から頂点や線分を取り除いて得られたものであって、新しい要素は何等付け加えていない。パターン VI_1 はパターン IV_3 の一部分だけ取り出したものと考えることが出来る。またパターン VI_1 の基本図形である正六角形はパターン IV_3 の基本図形である菱形を 3 つ合わせて考えたものになっている。この意味で、パターン VI_1 をパターン IV_3 の**部分**パターンと呼ぶことにしよう。

さて部分パターンになって対称性はどのように変わっただろうか。まずパターン IV_3 の対称性を考えてみよう。平行移動に関してはベクトル $m\ \vec{OB} + n\ \vec{OE}$（$m, n$ は整数）に対するものだけで、平行移動の群は全く変わらない。

パターン IV_3 の I 型の点の周りの回転は $120°, 240°$ 回転だけだが、パターン VI_1 で対応する点は 2 種類に分かれている。正六角形の中心になっている点の周りでは $60°$ 回転も許しており、対称性は増えていると言える。正六角形の頂点となっている点の周りでは $120°$ 回転のままである。パターン IV_3 の II 型の点の周りでは $60°$ 回転が許されていたが、パターン VI_1 で対応する点は正六角形の頂点になっており $120°$ 回転しか許さない。パターン IV_3 の I 型の点の周りの $60°$ 回転の対称性はパターン VI_1 では正六角形の中心の周りの回転に移ったと思ったほうが良いのかも知れない。

しかしパターン IV_3 の各菱形の中心の周りの $180°$ 回転はパターン VI_1 ではどこかに消えてしまっている。それとも、一つの正六角形の中にある 3 つの菱形の中心の周りの $180°$ 回転が、その三点の作る正三角形の重心（これが正六角形の中心になっている）に集まってその点の周りの $60°$ 回転に変わったのだと思ったほうが

良いのだろうか。

鏡映についても考えてみよう。菱形には各対角線に関する線対称があった。パターン IV_3 では一つの菱形の短い方の対角線は延長すると、別の菱形の短い方の対角線になるか、菱形の一辺になっており、この直線に関する鏡映はパターン IV_3 を不変にしている。パターン VI_1 に移ると、これは正六角形の対頂点を結ぶ直線であり、一辺にもなっており、この直線に関する鏡映もパターン VI_1 を保っている。

また、パターン IV_3 では一つの菱形の長い方の対角線は延長しても別の菱形の長いほうの対角線になっており、この直線に関する鏡映はパターンを保っている。しかしパターン VI_1 にはこの直線に関する線対称はない。代わりに正六角形の対辺の中点を通る直線に関する線対称がある。例で示せば、点 B, E を通る直線はパターン IV_3 の線対称軸だが、パターン VI_1 ではそうではなく、BE をベクトル $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ の平行移動で移した直線、つまり BC の中点と EH の中点を結ぶ直線に関して線対称になっている。対称軸が一辺の半分だけ平行にずれたという形になっている。

多少の得失はあっても、部分パターンの方が対称性が減っているものだろうが、この場合逆に増えている対称性がある。辺の中点に関する 180° 回転は、部分パターン VI_1 では許されるが、元のパターン IV_3 では許されない。

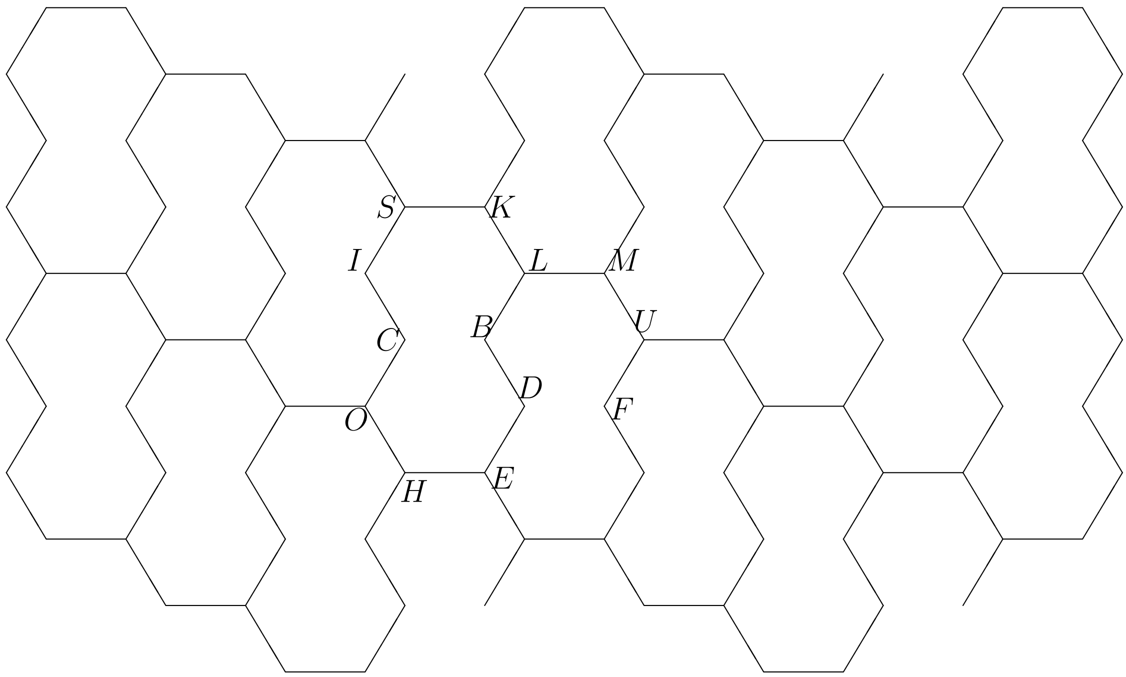


図 18: パターン IV_3 の部分パターン X_1

一般的に、部分パターンに移ると対称性がどうなるのかを考えておこう。パターン VI_1 のさらに部分パターンを考えて見ることにしよう。一番簡単なものとして、パターン VI_1 の基本図形を二つくっつけたものを基本図形とするパターンを考えよ

う。回転させれば良いので、基本図形は正六角形$OHEDBC$と正六角形$ICBLKS$をくっつけた十角形$OHEDBLKSIC$としよう。まず考え付くのがこの基本図形をベクトル$m\vec{OK}+n\vec{OE}$（m,nは整数）の平行移動で写して得られるパターンX_1である (図 18)。

平行移動に対応するベクトル全体は、パターンVI_1では$\{m\vec{OB}+n\vec{OE}\,|m,n$は整数$\}$であり、パターン$X_1$では$\{m\vec{OK}+n\vec{OE}\,|m,n$は整数$\}$だからかなり小さくなっている。小さくなっていると言っても分かりにくいかもしれないので、ベクトルの集合の表わし方を変えてみよう。$\vec{OB}=\vec{OI}+\vec{OE}$と表せるから、パターン$VI_1$では$\{m\vec{OI}+n\vec{OE}\,|m,n$は整数$\}$であり、$\vec{OK}=\vec{OE}+\vec{EK}=\vec{OE}+\vec{HS}=\vec{OE}+2\vec{OI}$と表せるから、パターン$X_1$では$\{m\vec{HS}+n\vec{OE}=2m\vec{OI}+n\vec{OE}\,|m,n$は整数$\}$となっている。これなら小さくなっていることが分かるだろう。ほぼ半分になっている。

このように平行移動の対称性も減っているが、他の対称性はもっとひどく減っている。一般的に述べるのも面倒なほどの対称性なので、基本図形である十角形$OHEDBLKSIC$のところで説明する。他の場合は平行移動の群で写されたものはすべて、そしてそれだけが有効である。例えば、BCの中点に関する 180° 回転はパターンX_1を保つが、平行移動で写った点DFの中点に関する 180° 回転もパターンX_1を保つということである。これはまだ十角形$OHEDBLKSIC$の中心（重心と言っても良い）に関する 180° 回転と言っても良いのだが。

他の回転は、HEの中点、BDの中点、KLの中点に関する 180° 回転であって、10 本の辺の内 6 本の辺の中点に関する回転しか許さないのである。

線対称も、HEの中点とSKの中点を結ぶ直線（とベクトル$m\vec{OB}$ (mは整数) の平行移動で写したもの）しか許さない。パターンVI_1では中心に関する 60° 回転があったのでこういう線対称軸も 60° ずつ回せたのだが、パターンX_1ではそうはいかない。

やはり多くの場合、部分パターンでは対称性が減るようだ。

しかし、十角形$OHEDBLKSIC$を基本図形とするパターンはこれだけだろうか。図 19 のようなパターンX_2も考えられる。同じように見えるかもしれないが違うパターンであり、その違いをはっきりと示すことが出来る。

パターンX_2の平行移動の群は$\mathcal{H}((X_2)=\mathcal{Z}\vec{OF}+\mathcal{Z}\vec{HS}=3\mathcal{Z}\vec{OA}+2\mathcal{Z}\vec{OI}$となって、確かに違う群である。この群の生成元$\vec{OF},2\vec{OI}$をパターン$X_1$の平行移動の群で表わそうとしても、$2\vec{OI}=\vec{OK}-\vec{OE}$は表せるが、$\vec{OF}$は表わすことが出来ない。図形的に言えば、ベクトル$2\vec{OI}$の平行移動はパターン$X_1$を保つが、ベクトル$\vec{OF}$の平行移動はパターン$X_1$を保たないということである。

逆にパターンX_1の平行移動の群の生成元の$\vec{OE}$はパターンX_2を保っていない。

そのうえ、パターンX_2のときとは違って、パターンX_2の平行移動群では、元の基本図形である十角形$OHEDBLKSIC$から、このパターンのすべての基本図形である十角形を得ることは出来ない。勿論、すべての基本図形を十角形

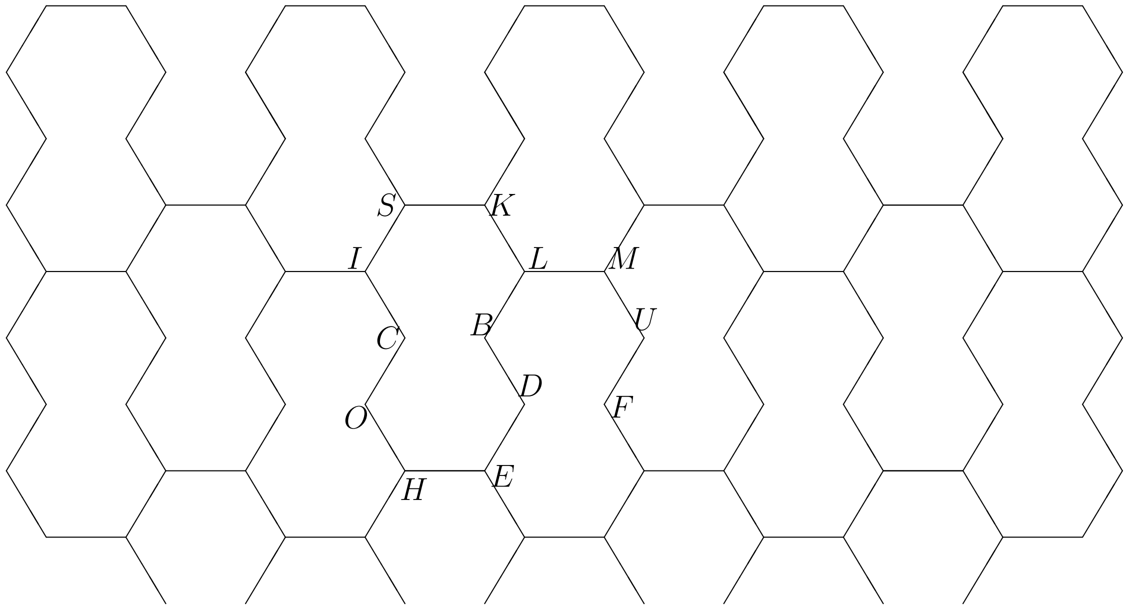


図 19: パターン IV_3 の部分パターン X_2

$OHEDBLKSIC$ に写す平行移動は存在するのだが、そういう平行移動にはパターン全体を保たないものがあるということなのである。

回転にいたっては、IS の中点や KL の中点のような図形一般の形の上での点と指定できにくいような点での $180°$ 回転しか持たないし、線対称の軸も HE の中点と SK の中点を結ぶ直線しかない。

実は同じ十角形$OHEDBLKSIC$ を基本図形とするパターンであっても、パターン全体を保つ平行移動が恒等変換（何も動かさない変換のこと）しかないようなものを作ることも出来る。

また更には３つの正六角形をくっつけた形を基本図形にするパターンも作ることが出来る。今度は３つの正六角形をくっつけた形といっても、合同でないものが三つもあって、それぞれに面白い部分パターンが得られるのである。

本節では、パターン IV_3 からＩ型の点の星型近傍である正六角形を基本図形とする部分パターン VI_1 を作ったのだったが、パターン IV_3 からは正六角形を基本図形とする別の部分パターンを作ることもできる。パターン IV_3 をじっと見て、名前の付けてある点を辿っていくと、正六角形 $RHVUTS$ に気がつくだろう。そしてこの正六角形を基本図形とする蜂の巣パターンが得られることも容易に分かるだろう。このパターンはパターン VI_1 と相似比２の相似なパターンになっているが、パターン VI_1 の部分パターンにはなっているわけではない。

4.7　パターン IV_3 の部分パターン VII_1 と部分パターン IV_1^3

4.6 節では、パターン IV_3 の I 型の点の星型近傍である正六角形を基本図形とする部分パターンを考えたが、このパラグラフでは II 型の点の星型近傍 (図 20 左図) を考えることにしよう。これを基本図形にするパターンは存在しない。パターン IV_3 の許す平行移動で重なり合わない菱形が 3 種類あると注意しておいたが、I 型の点の星型近傍ではそれが丁度一つずつくっついたものになっているが、II 型の点の星型近傍ではそれが 2 つずつくっついた形になっている。

そこで II 型の点の星型近傍から丁度一つずつくっつけたものならうまくいくかも知れないと考える。くっついている部分が頂点だけでなく辺全体になっているものを考えると、下の右 3 種類の七角形とそれを B に関して 180° 回転したものの 6 種類になる。これらは互いに点 B の周りに回転したものになっているので、一番右の七角形 $AEDFGML$ を代表として取ろう。

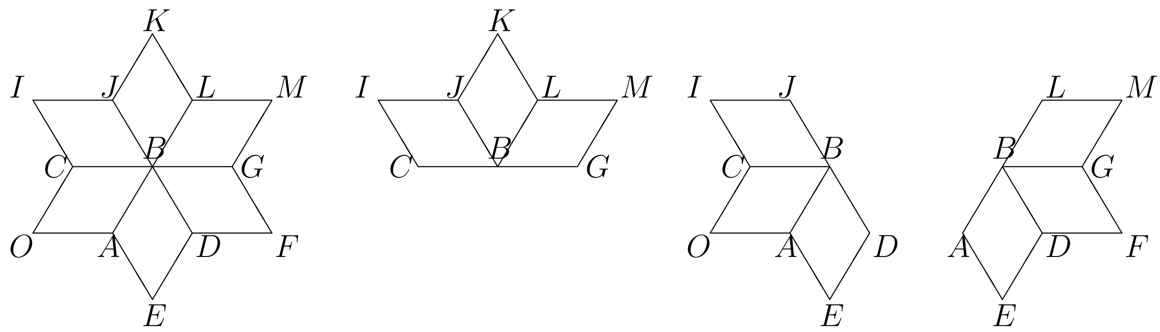


図 20: パターン IV_3 の II 型の点の星型近傍

するとパターン IV_3 の部分パターンとして、この七角形を基本図形とするパターン VII_1 が得られる（図 21）。

平行移動の群はパターン IV_3 のときと同じで $\mathcal{H}(VII_1) = \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OB} + \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OE} = \mathcal{H}(IV_3)$ となっている。星型近傍自身は回転を許したが、それを半分に切った形の七角形 $AEDFGML$ はどんな回転も許さない。それゆえ、このパターン VII_1 もそれを保つ回転は存在しない。すなわち $\mathcal{U}(VII_1) = \mathcal{H}(VII_1)$ である。

線対称も多くはないが、直線 OE は対称軸になっている。これを他の対称性で動かしたものも対称軸になるのだが、回転はないし、平行移動もベクトル $\overrightarrow{OE}$ は対称軸の方向だから新しい対称軸は与えない。例えば直線 OE を $\overrightarrow{OB}$ で平行移動させると直線 BF で対称軸であり、直線 OE を $\mathcal{Z}\ \overrightarrow{OB}$ で写したものだけが対称軸になっている。

このように、平行移動の群を変えないような部分パターンであっても、他の対称性は劇的に変化することがあるのである。

パターン IV_3 の部分パターンで平行移動の群を変えないようなものは実は無限にある。平行移動で重ならない 3 種類の菱形の和集合を基本図形にすることがで

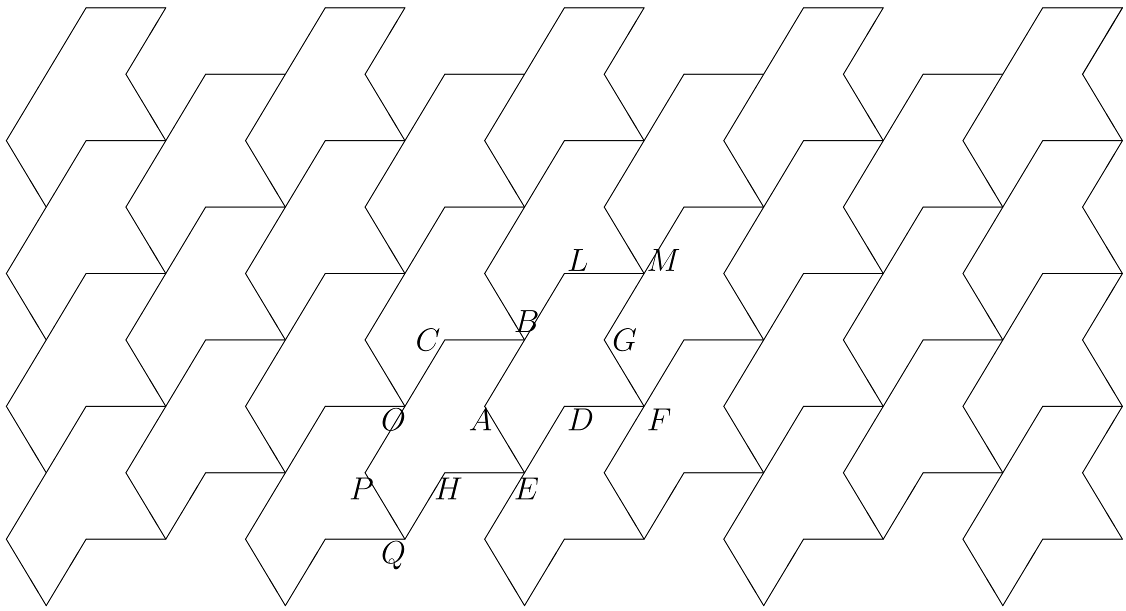


図 21: パターン IV_3 の部分パターン VII_1

きる。しかし、離れ離れのものを基本図形にするのは嫌だというなら、その３種類の菱形がくっついているものだけ考えることにすれば良い。II 型の星型近傍の部分集合になっているのは図 22 右の上三菱と下三菱しかない。

星型近傍の部分集合でなくてもよいことにしても、これまでの３種類に加わるのは合同なものを除いて図 22 左の２種類しかない。

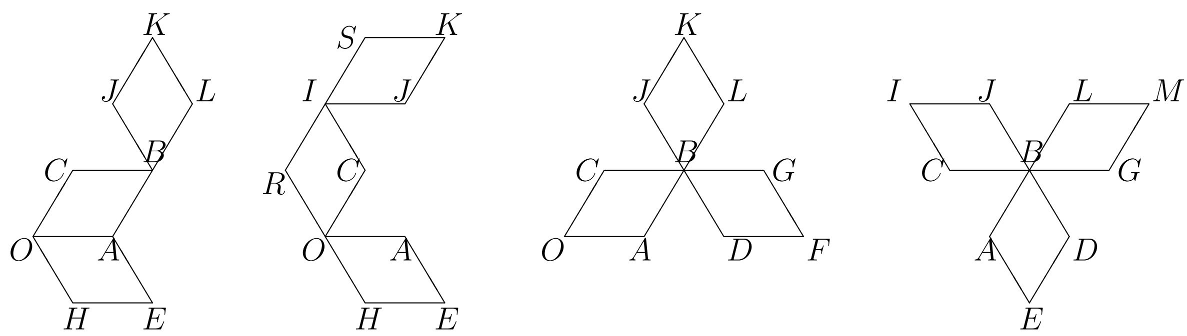


図 22: パターン IV_3 の平行移動群の基本図形

これらを実際に平行移動の群 $\mathcal{H}(IV_3) = \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OB} + \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OE}$ で動かしていき、平面全体が埋め尽くされていくのを見るのは中々に面白いものである。実際にやってみることをお勧めする。パターン IV_3 をコピーするなり、もっと大きくパターン IV_3 を描いたものを作って、それを何枚かコピーすると良い。パターン IV_3 を描かせるのも教育のうちという態度もあり得るが、実験が可能なほど精確にパターン IV_3

を描くのはかなり難しい。充分にこの教材に慣れからにした方が無難だとは思うが、うまく指導できる自信があるならやってみられたら良い。

ここにその図を、つまり、これらの図形を基本図形とする、パターン IV_3 の部分パターンを描いていないのは、印刷技術上の困難があるからにすぎない。出来るものなら、パターン IV_3 を大きく描いておいて、まず一つ基本図形を選び、ある色で塗る。次には例えば、ベクトル $\vec{OE}$ の平行移動で写った先を別の色で塗る。ベクトル $\vec{OB}$ の平行移動で写った先もこれまでとは別の色で塗る。これを次々と続けていけば、そのうち最初の基本図形に隣接しているところは全部塗られることになるので、またもとの色を使えばよい。１２色なり２４色なりの色鉛筆かクレヨンを使えば、非常にカラフルでデザイン的にも素敵なものが得られるだろう。小学校の低学年でも十分に利用可能で、興味を惹く教材として使えるのではないかと思う。

しかし、この論文の中では出来ない。カラー印刷も出来ないし、領域を塗っている状態が区別できるように表現することも出来ないから、線分を使うだけでは部分パターンの基本図形が何なのかを表現できないのである。残念なことだ。

そこで、パターン IV_3 にまつわる話を一旦終わる前に、１つだけ線でも表現できるパターンを描いておこう。

図 22 の右の上三菱、下三菱と呼んだ 2 つの図形は、点 B の周りに 60° 回転することによって重なるし、点 B の所で重ねれば、点 B の星型近傍になる。各々は、パターン IV_3 と同じ平行移動の群を持つパターン IV_3 の部分パターンの基本図形となる。平行移動の群で動かしていくと平面を覆うことは既に述べたが、それを描いてみても得られた線の部分はパターン IV_3 と変わりなく見えてしまう。そこで平行移動の群を少し小さくしてみよう。

この三菱マークは直線 OB に関する鏡映を許すので、$\vec{OF}=\vec{OB}+\vec{OE}$ と、それを OB に関する線対称で写したベクトル $\vec{OK}$ に関する平行移動だけで写すとどうなるかを見てみることにする。つまり、平行移動の群を $\mathcal{H}=\mathcal{Z}\,\vec{OF}+\mathcal{Z}\,\vec{OK}$ とするようなパターンがあるか、また 1 つの三菱をこの群で写していって何かパターンが得られるかということを考えよう（図 23)。

上三菱を次々と平行移動だけで写していったつもりだったが、パターン $IV31$ を見ると下三菱も目に映ってくる。一種の騙し絵のようなものだ。その上更に、空白所に II 型の点の星型近傍が現れている。上三菱同志も、下三菱同志もまた II 型の点の星型近傍同志も同じ平行移動の群 $\mathcal{H}$ で互いに写り合える。この意味で、パターン IV_1^3 は上三菱と II 型の点の星型近傍との組を基本図形とするパターンで、$\mathcal{H}$ をその平行移動の群とするものと考えることが出来る。基本図形の組を考えるのがどうしても嫌なら、例えばその 2 つの図形を足したような 2 つの図形（図 24）を考えれば、それぞれ $\mathcal{H}$ を平行移動の群とするパターンの基本図形と考えることも出来る。しかし、基本図形の組を考えるよりも他の対称性が減ってしまって面白くない。

パターン IV_1^3 であれば、両三菱の中央の点 (点 O や点 B など) の周りの 120° 回

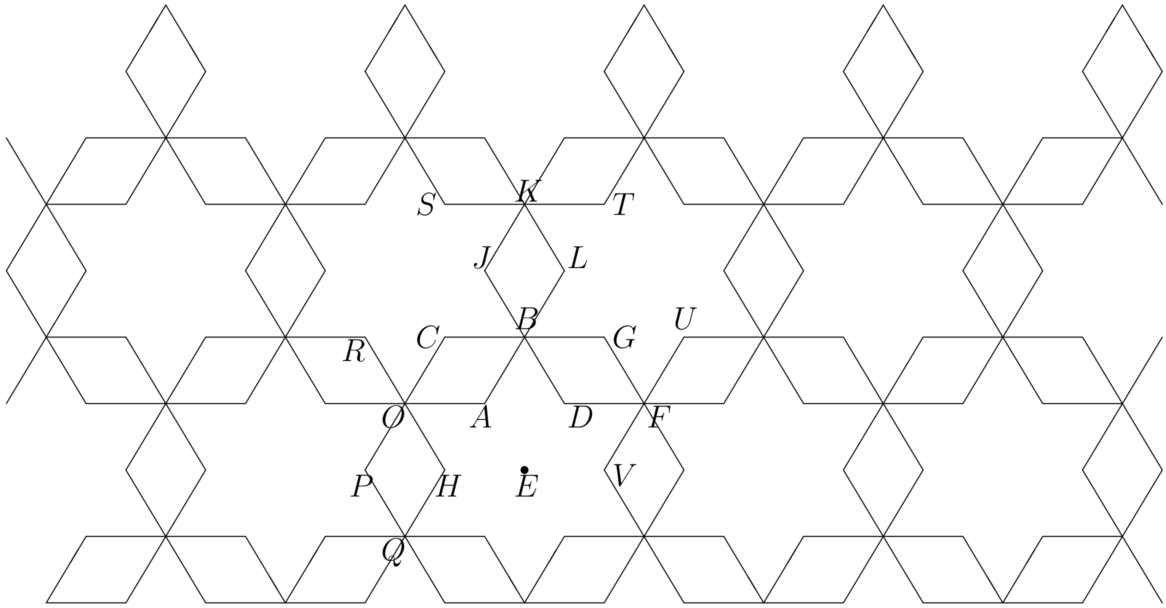


図 23: パターン IV_1^3

転や、II 型の点の星型近傍の中央の点 (例えば点 E) の周りの 60° 回転もある。これらの点は元のパターン IV_3 の II 型の点に対応している。

また菱形の中心に関する 180° 回転も生き残っているし、菱形の二つの対角線（勿論これを延長した直線）に関する鏡映も失われてはいない。

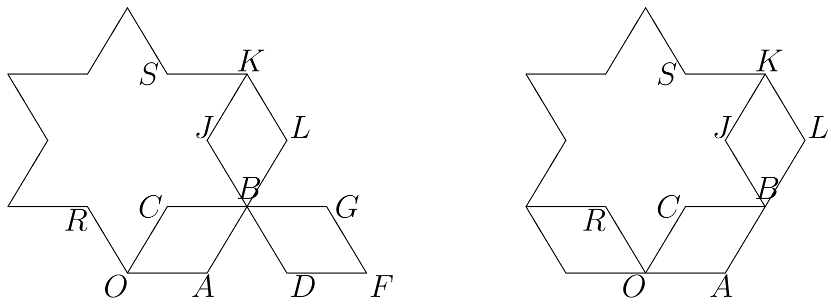


図 24: パターン IV_1^3 の基本図形

4.8 平行四辺形のパターン IV_4 と IV_5

もう一度、一般の平行四辺形に戻って、パターン IV_1(図 12) 以外のパターンの可能性を考えてみよう。

正三角形のパターン III_1 のとき試みたことをこの場合にもやってみたらどうなるだろうか。平行四辺形をまず $\vec{OA}$ の平行移動で移し、これを左右に続ければ OH（高さ）の巾の帯のパターンが得られる (図 25)。

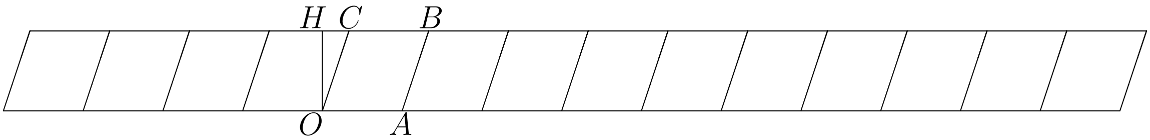


図 25: 平行四辺形を基本図形とする帯のパターン

この図では H は O に立てた垂線の足に取ってあるが、直線 CB 上の何処にとったとしても、この帯のパターンを $\vec{OH}$ で平行移動させると巾が 2 倍の帯のパターンが得られ、更に次々とこれを行えば、結局平行移動の群 $\mathcal{H} = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{Z}\ \vec{OH}$ で平行四辺形 $OABC$ を移していくことになり、$OABC$ を基本図形とするパターンが得られる。下の図 26 のパターン IV_4 としては、H を O に立てた垂線の足に取った場合の図を描いてある。

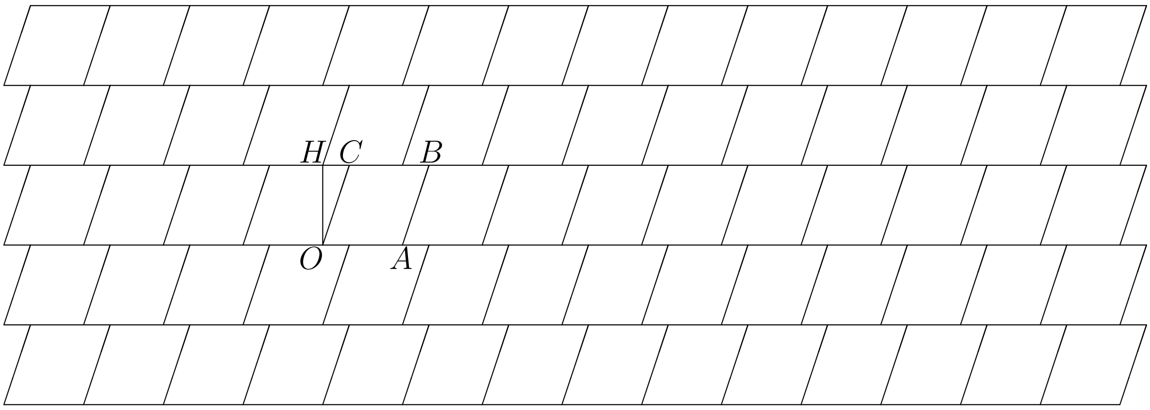


図 26: パターン VI_4

パターン IV_1 の対称変換群と比較すると、平行移動の群は $\mathcal{H}(IV_4) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{Z}\ \vec{OH}$ で、運動の群 $\mathcal{U}(IV_4) = \mathcal{G}(IV_4)$ は $\vec{OC}$ と平行な辺の中点に関する 180° 回転と中心に関する 180° 回転を含んでいるが、$\mathcal{H}(IV_1) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{Z}\ \vec{OC}$ で、$\mathcal{U}(IV_1) = \mathcal{G}(IV_1)$ はすべての辺の中点に関する 180° 回転と中心に関する 180° 回転を含んでいる。

点 H を C と選んだときにはパターン IV_4 はパターン IV_1 に一致し、平行移動の群は $\vec{OH}$ がずれていき $\vec{OC}$ になるだけだが、運動の群に関しては OA に平行な辺の中点に関する $180°$ 回転という対称性が復活するということになっている。

また、パターン IV_1 では鏡映がなく $\mathcal{U}(IV_1) = \mathcal{G}(IV_1)$ であったことが寂しいと思えば[21]、帯のパターン（図 25）から平面全体のパターンを作る際、直線 OA に平行な辺に関する鏡映を次々と施していくことにすれば、次のパターン IV_5 が得られる（図 27)。

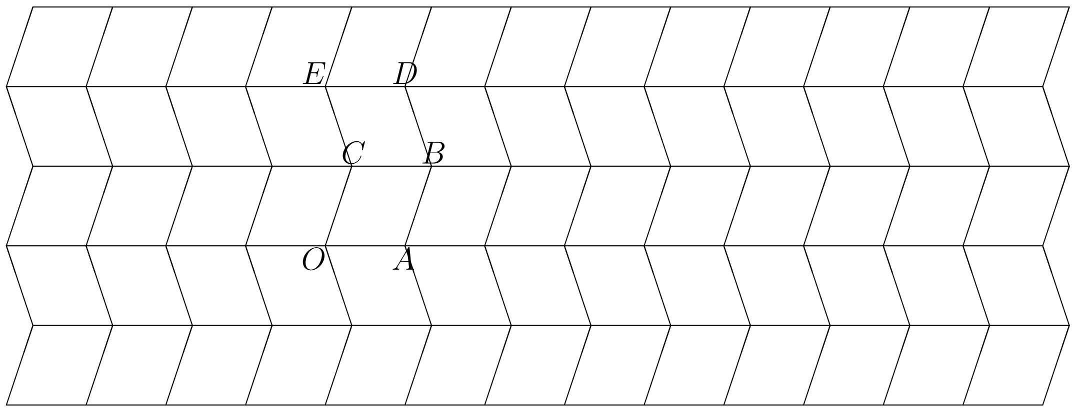


図 27: パターン IV_5

このときには、$\mathcal{H}(IV_5) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{Z}\ \vec{OE}\ (\vec{OE} = 2\ \vec{OH})$ で、$\mathcal{U}(IV_5)$ は $\vec{OC}$ と平行な辺の中点に関する $180°$ 回転と中心に関する $180°$ 回転を含んでおり、$\mathcal{G}(IV_5)$ は $\vec{OA}$ と平行な辺に関する鏡映を含んでいる。さらに、平行移動の群 $\mathcal{H}(IV_5)$ で基本図形 $OABC$ を移してもパターン全体は得られない。

4.9 一般の台形と等脚台形のパターン

ここでは台形を考えよう。等脚台形と一般の台形でもパターンを作ることに関する基本的な考え方は変わらないのでまず一般の（等脚でなくてもよい）台形に対してやり、等脚のときに対称性が増えることを注意するという形で議論しよう。

まず台形 $OABC$ を考えよう。平行四辺形の時と同じように帯のパターンを作るとなれば、平行でないほうの辺の中点に関して $180°$ 回転を施していけばよい（図 28)。帯が出来れば後は、平行四辺形に対してパターン IV_1, IV_4, IV_5 などを考えたときのように、帯の積み方は好きなように出来る。

それは各々、平行四辺形 $ODEC$ を基本図形とするパターン IV_1, IV_4, IV_5 を 2 次の部分図形とする台形 $OABC$ のパターンとなっている。そのとき台形のパターン

[21] 勿論、平行でない辺の長さを違うものとしているからで、基本図形の平行四辺形が菱形になっているときのパターン IV_1 では、それぞれの対角線に関する鏡映が対称変換になっている。

としての対称性の群はそれぞれの部分パターンの対称性の群に対して、OA に平行でない辺の中点に関する $180°$ 回転が付け加わる。その上、部分パターンとして IV_5 を選んだとすれば、OA に平行な辺の中点に関する $180°$ 回転も付け加わることが分かる。

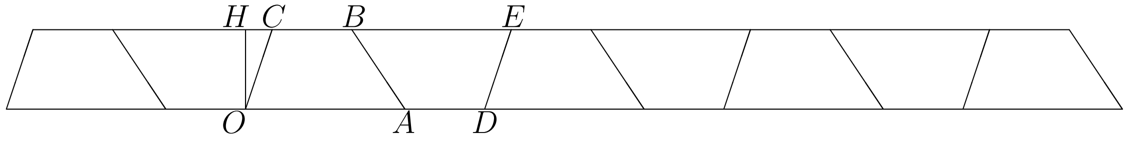


図 28: 台形を基本図形とする帯のパターン

下の図のように等脚台形 $OABC$ から始めれば、同じような帯のパターン（図 29）が得られるが、上のどの部分パターンを選んでも、等脚台形のパターンの対称性には、上底と下底の中点同志を結ぶ直線に関する線対称も付け加わることが分かる。

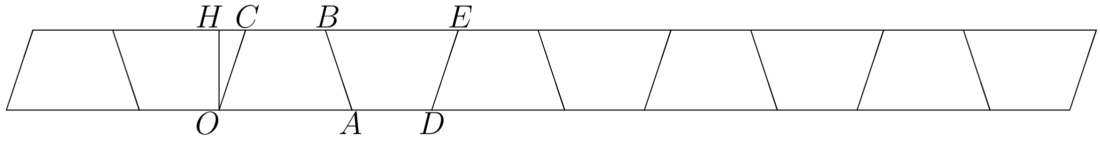


図 29: 等脚台形を基本図形とする帯のパターン

更に $OC = BC$ であってその上 $\angle OCB = 120°$ であれば、、部分パターンを IV_5 に取ったものは、等脚台形 $OABC$ を下底に関して折り返して得られる正六角形のパターンとしてみれば、蜂の巣のパターン IV_1 になっていることが分かる。

一般の台形 $OABC$ を下底に関して折り返して得られる六角形 $OFGABC$ は、1 組の対辺が平行で等しく、他の隣り合う辺同志が等しい六角形になっている。帯 28 からパターン IV_5 を 2 次の部分パターンとするパターン IV_6 を描くことができる (図 30)。

帯 28 からパターン IV_5 を 2 次の部分パターンとするパターン IV_6 を描くことができたのだが、パターン IV_5 の基本図形である平行四辺形は $ODEC$ と思っても $HABI$ と思っても、台形のパターンとしての IV_6 は同じものが得られている。

対称性を見るときはパターン IV_5 の基本図形は平行四辺形 $ODEC$ と思うことにする。部分パターン IV_5 と台形のパターンとしての IV_6 の対称性を比較すると $\mathcal{H}(IV_5) = \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OD} + \mathcal{Z}\,\overrightarrow{FC}$ で、これは $\mathcal{H}(IV_6)$ と一致している。$\mathcal{U}(IV_5)$ は $\overrightarrow{OC}$ と平行な辺の中点に関する $180°$ 回転と中心に関する $180°$ 回転を含んでいるが、$\mathcal{U}(IV_6)$ は $\overrightarrow{OC}$ と平行な辺の中点に関する $180°$ 回転は含み、中心に関する $180°$ 回転は含まないが、それは $\overrightarrow{AB}$ と平行な辺の中点に関する $180°$ 回転に変わっている。

$\mathcal{G}(IV_5)$ と $\mathcal{G}(IV_6)$ の鏡映の部分は同じで、$\overrightarrow{OA}$ と平行な辺に関する鏡映を含んでいる。元の台形が等脚台形の時は更に、$\mathcal{G}(IV_6)$ には、上底の中点と下底の中点を結ぶ直線に関する鏡映が含まれることになる。

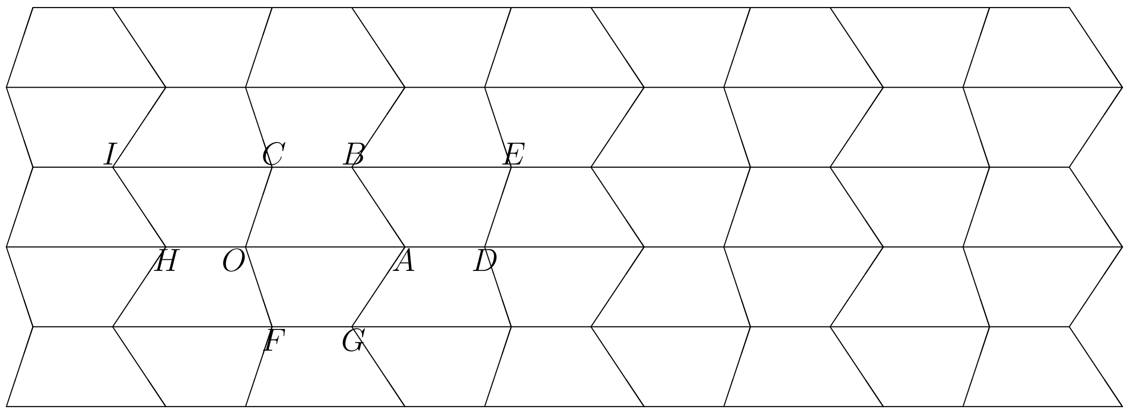


図 30:　2 次部分パターンを IV_5 とする台形のパターン IV_6

当然、平行移動の群 $\mathcal{H}(IV_5) = \mathcal{H}(IV_6)$ では基本図形 $OABC$ を移してもパターン全体は得られない。

またこのパターンは、六角形 $OFGABC$ を基本図形とするパターンと見ることが出来る（パターン VI_2）。対称性の群はパターン IV_6 と同じになるが、六角形 $OFGABC$ を基本図形にしていることを強調すれば、$\mathcal{H}(VI_2) = \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OD} + \mathcal{Z}\ \overrightarrow{FC}$ で、$\mathcal{U}(VI_2)$ は $\overrightarrow{BC}$ に平行でない辺の中点に関する 180° 回転が加わり、$\mathcal{G}(VI_2)$ には $\overrightarrow{BC}$ と平行な辺に関する鏡映が加わるということになる。

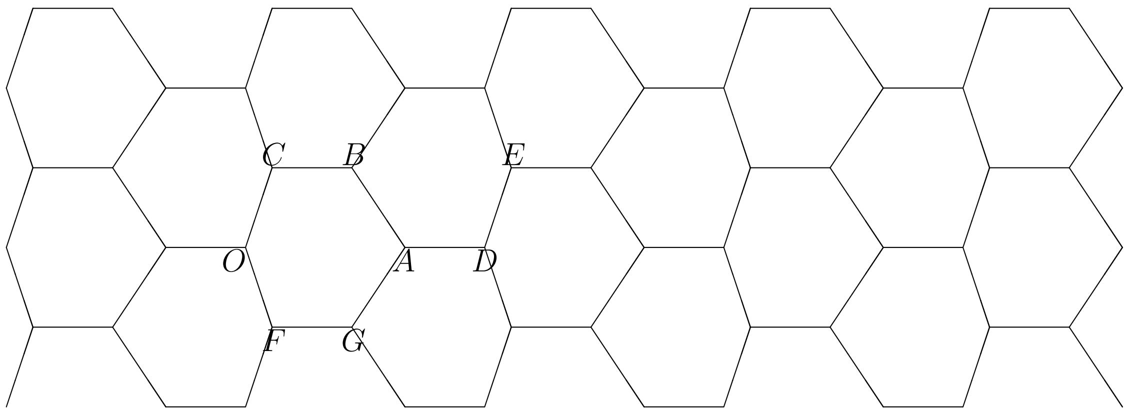


図 31: 六角形のパターン VI_2

一般の台形 $OABC$ の下底の中心で 180° 回転をして得られる六角形 $OFGABC$ は、３組の対辺が平行で等しい六角形になっている。上でパターン IV_6 を作ったときは平行四辺形のパターン IV_5 を使ったが、パターン IV_4 で H を B にしたものを考えてみれば、次のパターン IV_7 が得られることになる。

これはまた、元の台形 $OABC$ の各辺の中点に関する 180° 回転を次々と行って

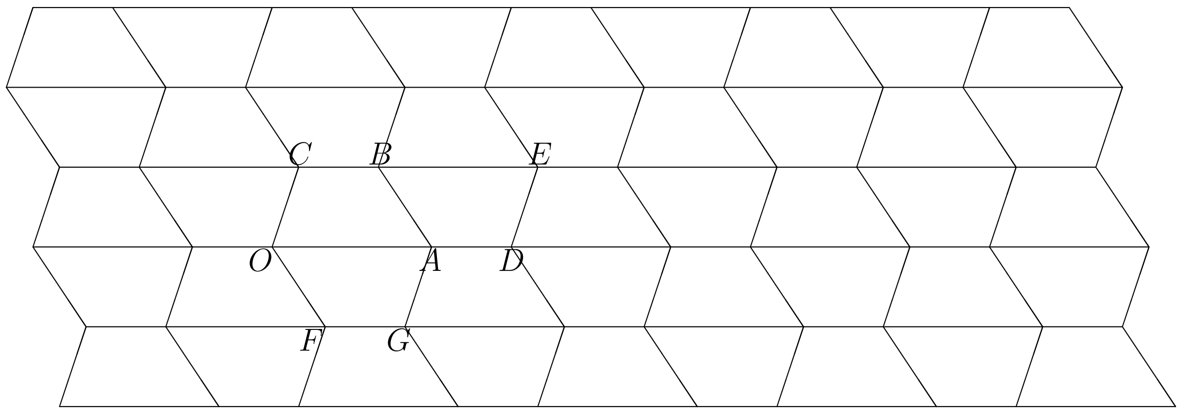


図 32: 2 次部分パターンを IV_5 とする台形のパターン IV_7

得られたパターンだと思ってもよい。対称性の群は、平行移動の群が $\mathcal{H}(IV_7) = \mathcal{Z}\overrightarrow{OD} + \mathcal{Z}\overrightarrow{OB} = \mathcal{Z}\overrightarrow{OB} + \mathcal{Z}\overrightarrow{OG}$ であり、運動 $\mathcal{U}(IV_7)$ には各辺の中点に関する 180° 回転が加わるが、鏡映は増えない。

水平線が非常に印象的ではあるが、この平行な水平線のパターンがパターンの対称性の群 $\mathcal{G}(IV_7)$ に関して不変であることを意味しているだけで、水平線に関する鏡映は対称変換にならない。

むしろ以下のように、六角形 $OFGABC$ を基本図形とする 2 次の部分パターンを考えるときに (図 33)、平行移動の群 $\mathcal{H}(VI_3)$ の中に水平なベクトルがあることを示唆しているというべきかも知れない。

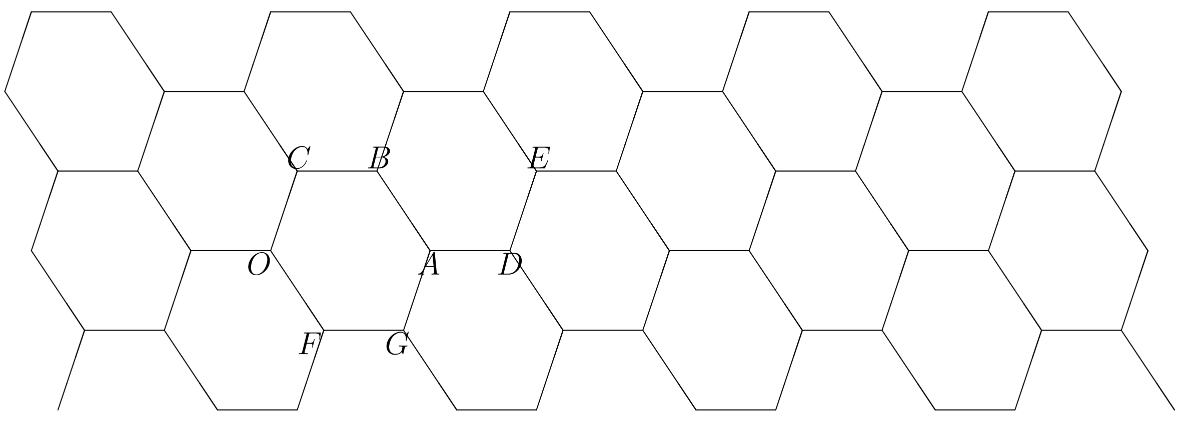


図 33: 六角形のパターン VI_3

この対称性の群 $\mathcal{G}(VI_3)$ は $\mathcal{G}(IV_7)$ と変わらないが、六角形を基本図形としていることを強調すると、平行移動の群 $\mathcal{H}(VI_3)$ は $\mathcal{H}(IV_7) = \mathcal{Z}\overrightarrow{OB} + \mathcal{Z}\overrightarrow{OG}$ と全く同じであるが、運動 $\mathcal{U}(VI_3)$ は各辺の中点に関する 180° 回転のほかに六角形の中心

に関する 180° 回転が加わると言うほうがよいだろう。

元の台形が等脚の時は、台形のパターン IV_6 と IV_7 は同じものになり、六角形のパターン VI_2 と VI_3 も同じになり、更に対称性の群に上底と下底の中点同志を結ぶ線に関する鏡映が回復する。

4.10 一般の四角形のパターン

一般の四角形に対して、パターンを考えようとすると、今まで作ってきたパターンで、四角形の特殊な事情を使わなかったパターン IV_7 と同様にするのがよいだろう。

まず凸の場合にやろう。一般な凸四角形 $OABC$ を考え (図 34)、辺の中点に関して $180°$ 回転すると六角形が得られる。四角形の内角の和は $360°$ だから、隣り合う内角の和が $180°$ を越えない組がある。丁度 $180°$ になる組があるとそれに応じて平行な辺が得られ、少なくとも台形になってしまうので[22]、いまは $180°$ より小さい組があるとする。その角の組を結ぶ辺の中点に関する $180°$ 回転をすれば、凸な六角形が得られる（図 34)。

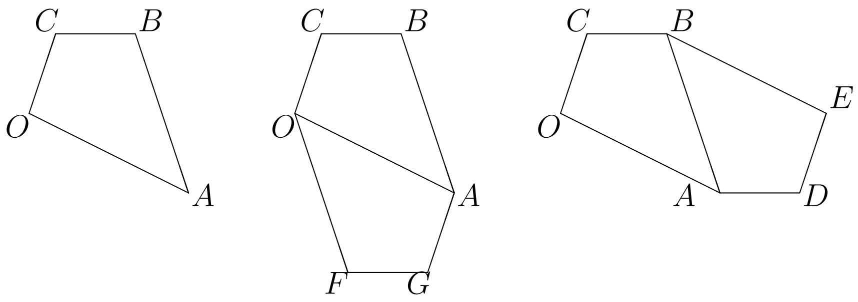


図 34: 凸四角形を辺の中点で $180°$ 回転して凸の六角形を得る

両端の角の和が $180°$ を越える辺の中点に関する $180°$ 回転では、凹な六角形が得られることになる（図 35)。

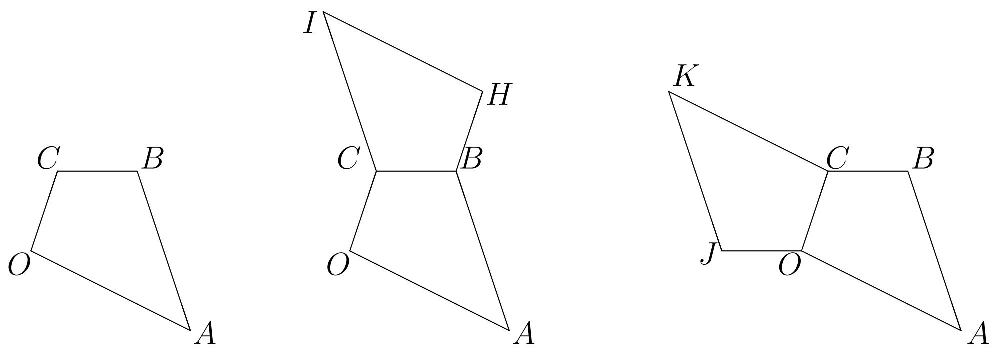


図 35: 凸四角形を辺の中点で $180°$ 回転して凹六角形になる場合

それはともかく、四角形 $OABC$ の各辺の中点に関する $180°$ 回転を次々と施していけば、四角形 $OABC$ を基本図形とするパターン IV_8 が得られる。何故こんなことができるかと言うと、このパターンの図 36 で、点 A の周りを見てみよう。

[22] この時は六角形でなく四角形が、特に平行四辺形が得られることになる。

OA, AG, AD, AB の中点に関して $180°$ 回転することによって、四角形 $OABC$ は次々と四角形 $OFGA, AGLD, ADEB$ に写され、最後に四角形 $OABC$ に戻ってくる。そのことによって、頂点 A の周りに４つの角 $\angle OAG, \angle GAD, \angle DAB, \angle BAO$ が得られるが、これらはそれぞれ四角形 $OABC$ の内角である $\angle AOC, \angle AGF, \angle ABC, \angle BAO$ と同じものであり、その和は四角形の内角の和だから $360°$ となり、丁度点 A の周りを埋め尽くすことになる。

こうしてどの頂点の周りにも元の四角形の４つの角が一通り現れて、平面を埋め尽くしていくのである。

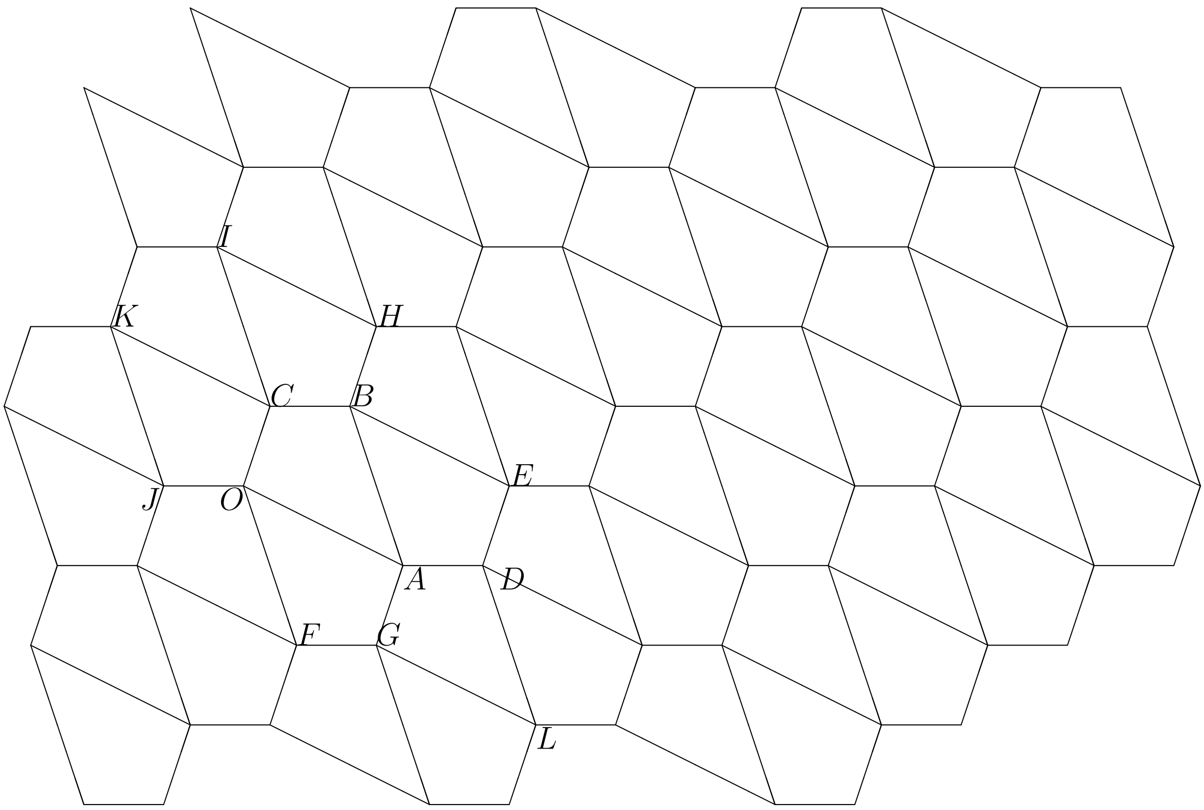


図 36: 凸四角形のパターン IV_8

この対称性の群 $\mathcal{G}(IV_8)$ は、本質的には $\mathcal{G}(IV_7)$ と変わらず、平行移動の群は $\mathcal{H}(IV_8) = \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OG} + \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OB}$ で、この生成元が元の四角形の対角線であることに注意しておこう。また運動 $\mathcal{U}(IV_8)$ については、パターンを作り上げた各辺の中点に関する $180°$ 回転のほかには見当たらないし、鏡映もないようだ[23]。

[23]勿論例えば $OC = CB, OA = AB$ であれば、AC に平行な対角線に関する鏡映も対称変換になるのだが、今は四角形に特別な条件を考えていない。

さて、このパターン IV_8 もパターン VI_3 と同じように、凸な六角形 $OFGABC$ のパターンを２次の部分パターンとして持っている（図 37）。対称性の群の $\mathcal{G}(VI_4)$ と $\mathcal{G}(IV_8)$ の関係は、$\mathcal{G}(VI_3)$ と $\mathcal{G}(IV_7)$ の場合と全く同様である。つまり、対称性の群 $\mathcal{G}(VI_4)$ は $\mathcal{G}(IV_8)$ と変わらず、六角形を基本図形としていることを強調すると、平行移動の群 $\mathcal{H}(VI_4)$ は $\mathcal{H}(IV_8) = \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OG} + \mathcal{Z}\,\overrightarrow{OB}$ と全く同じだが、運動 $\mathcal{U}(VI_4)$ は各辺の中点に関する 180° 回転のほかに六角形の中心に関する 180° 回転が加わると言うほうがよい。

また、基本図形を平行移動の群 $\mathcal{H}(VI_4)$ で写していけば全平面を埋め尽くしている。

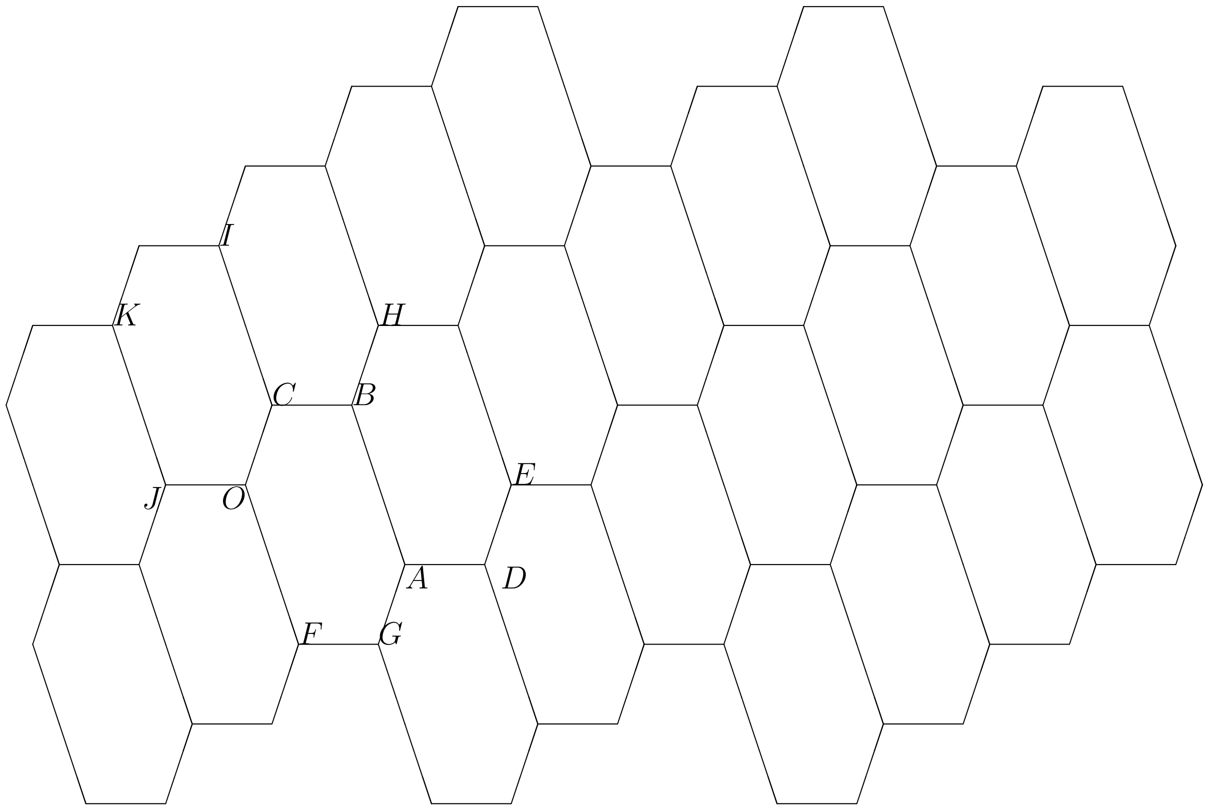


図 37: 六角形のパターン VI_4

しかしまた、元の四角形 $OABC$ の辺の中点に関する 180° 回転では凹な六角形も得られたのだから (図 35)、凹な六角形 $OABHIC$ を基本図形とするパターンが２次の部分パターンとして得られていることにも注意しておこう (図 38)。

ここでもまた対称性の群 $\mathcal{G}(VI_5)$ は $\mathcal{G}(IV_8)$ と変わらず、六角形を基本図形としていることを強調すると、平行移動の群 $\mathcal{H}(VI_4)$ は $\mathcal{H}(IV_8) = \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OG} + \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OB}$ と全く同じだが、運動 $\mathcal{U}(VI_5)$ は各辺の中点に関する 180° 回転のほかに六角形の中心に関する 180° 回転が加わると言うことができる。

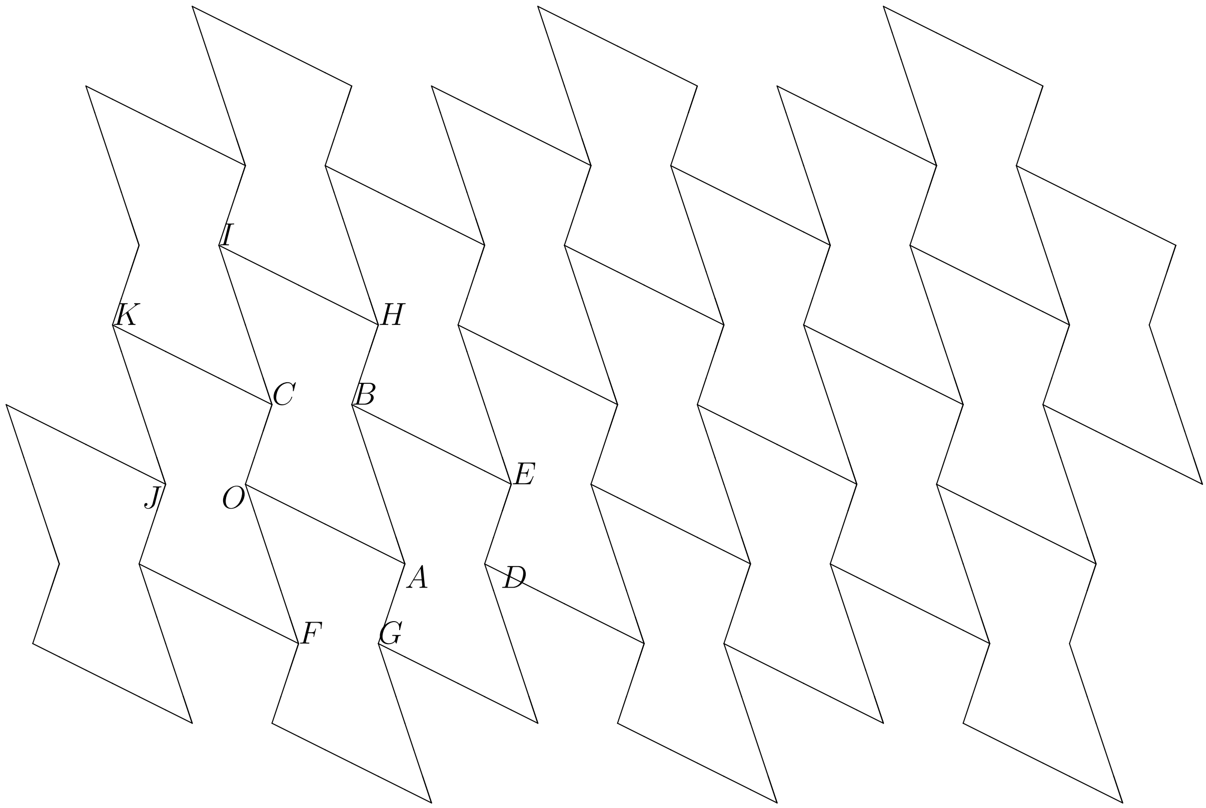


図 38: 六角形のパターン VI_5

これまでは一般の凸な四角形に対しての議論だったが、各辺の中点に関する 180° 回転をしていけばパターンが得られるということは、凸である必要もないように思われるが、念のために図を描いてみよう。

まず凹な一般的な四角形 $OABC$ を考えて、凸な場合にやったことと同じことをやってみる。但し、今度はどの辺の中点で 180° 回転しても凸な六角形は得られない。順に、OA, AB, BC, OC の中点に関して 180° 回転させて得られる六角形を描いたが (図 39)、勿論どれも各対辺が平行で等しい六角形になっている。

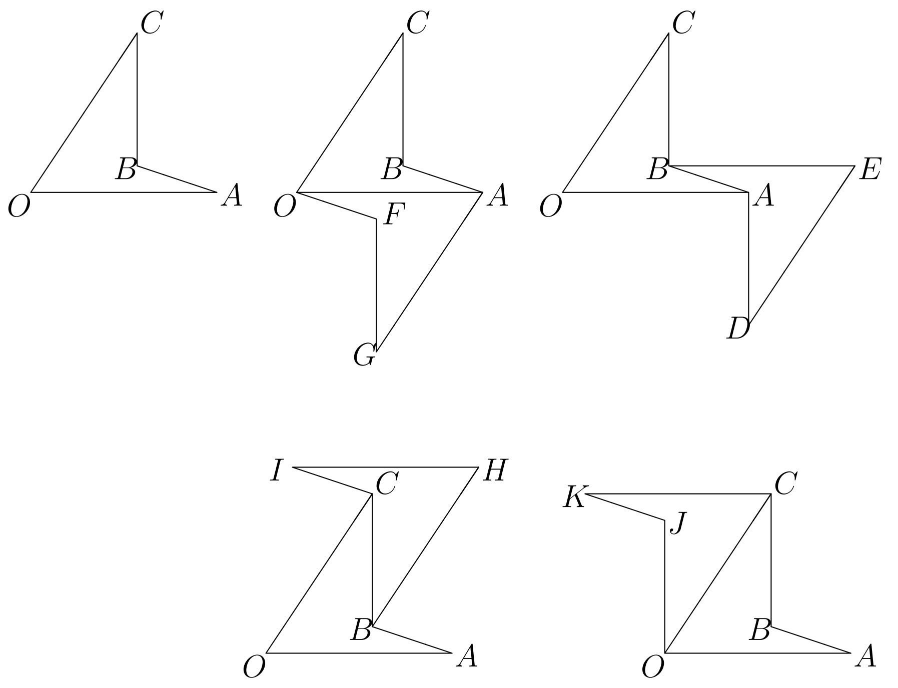


図 39: 凹な四角形を辺の中点で 180° 回転して六角形を得る

この図 39 と凸の時の図 34, 35 をじっと見ていると、各対辺が平行で等しい六角形は、凸であっても凹であっても、内部に含まれてしまう対角線が少なくとも一本あって、その対角線で六角形を分ければ 2 つの合同な四角形が得られ、かつその対角線の中点に関する 180° 回転によって写り合うとことになることが分かってくる。

従って、一般の四角形を基本図形とするパターン IV_8 [24]の部分パターンとして、任意の対辺が平行で等しい六角形を基本図形とするパターンが得られることになる。

さて凸な四角形の時と全く同じ理由で、この場合も各辺の中点に関する 180° 回転を次々と施していけばパターン IV_9 が得られる。

対称性の群 $\mathcal{G}(IV_9)$ も、凸の時のパターン IV_8 でと同様に記述される。つまり、平行移動の群は $\mathcal{H}(IV_9) = \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OG} + \mathcal{Z}\ \overrightarrow{OB}$ と、各対角線の与えるベクトルで生成さ

[24]次のパターン IV_9 とはたまたま基本図形である四角形が凸であるか凹であるかの違いがあるだけで、一般論の立場からは本質的には同じものである。

れているし、運動$\mathcal{U}(IV_9)$ も各辺の中点に関する 180° 回転が加わっている。鏡映はない。

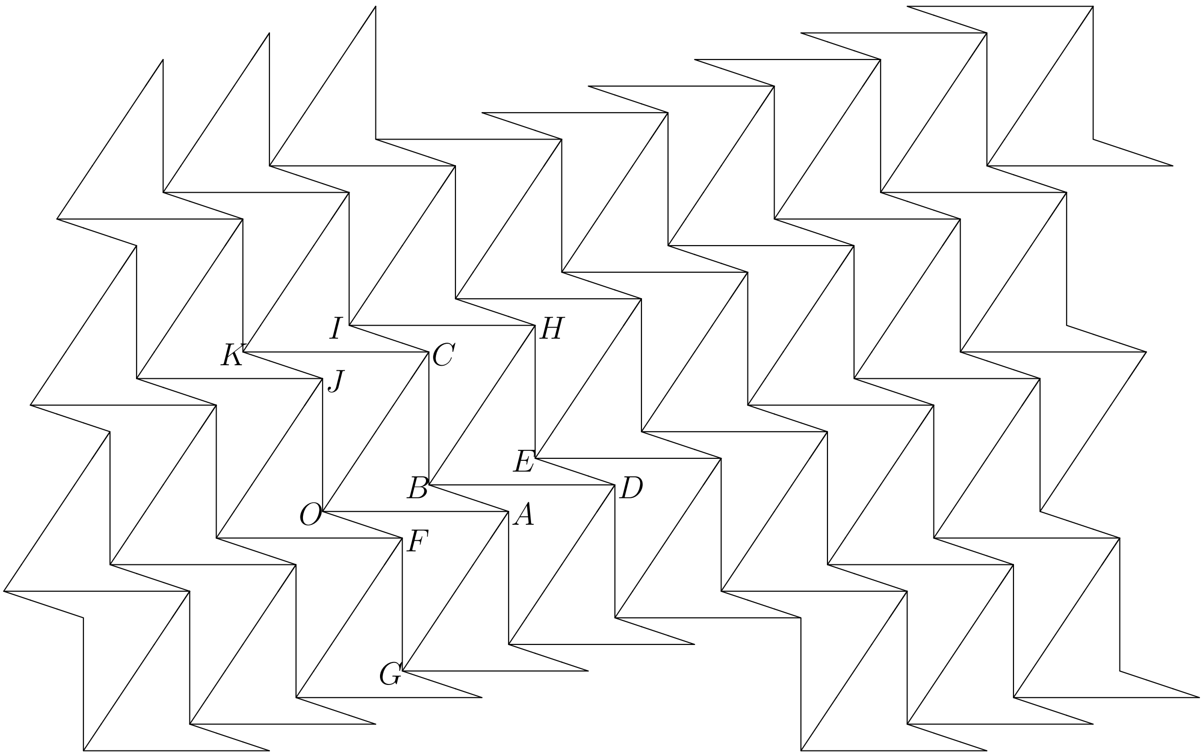


図 40: 四角形のパターン IV_9

四角形 $OABC$ の対角線 AC は端点を除いて四角形の外部にあるが、ベクトルとしては $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OG}$ であって、平行移動する際途中がどうであるかということは結果には影響がない。

ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OG}$ の平行移動で四角形 $OABC$ を平面上に撒き散らしても平面全体は覆えないが、四角形 $OFGA$ を撒き散らしたものとを合わせると平面は覆われる。またこの二つの図形はパターンのどの辺の中点の周りで 180° の回転しても重なるのである[25]。

この事情は、対角線が四角形の内部にあるか外部にあるかということには依らないので、パターン IV_8 でも同じ事情にあったのである。

図 39 の六角形 $OFGABC$ を見ていると、対角線 BF で切り分ければ合同な凸四角形 $OFBC$ と $FGAB$ に分けられることに気付く。この四角形 $OFBC$ から同じパターンを作っても平行移動の群はこの四角形の対角線の与えるベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{FC}$ で生成されることになる。少し心配かも知れないが、$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}$ であって、平行移動の群は一致するし、運動の群も回転の中心の基本図形に対する関係が変わるだけで、回転の中心そのものは変わらない。

[25]正三角形のパターン III_1 の時にやったように、基本図形 $OABC$ を平行移動の群で写して得られる四角形に色を塗ってみるとよい。塗ってない部分に、白抜きのパターンとして $OFGA$ を $\mathcal{H}(IV_9)$ で写した図形が得られる。

こうした意味で、凹な四角形の一般な形として描いた図 39 の $OABC$ が、その二つの辺 OA と BC が直交していることは気にしなくてもよかったのである。図 39 の六角形 $OABHIC$ で対角線を取り替えると、つまり、対角線 OH で切り分けて得られる四角形 $OHIC$ には辺や角には特別な関係が見られない。

またこのパターン IV_9 は図 39 のどの六角形を基本図形とするパターンも 2 次の部分パターンとして持つが、これも凸の場合と同じである。ここでは、六角形 $OGFABC$ を基本図形とするパターンの図を挙げておこう。

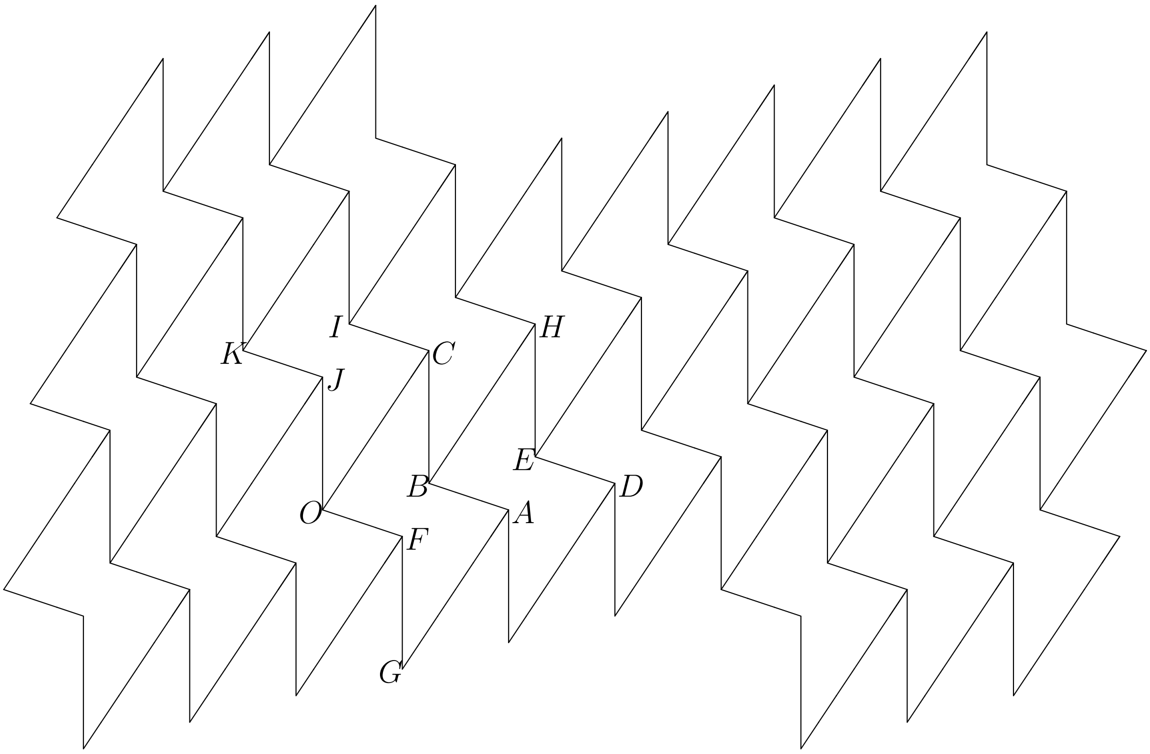


図 41: 六角形のパターン VI_6

4.11 正三角形の標準パターン III_0

四角形に対する議論は一応済んだことにして、4.3 で述べかけた正三角形の場合に戻ることにしよう。そこで描いたパターン III_1 は余りに正方形の時の議論に付きすぎている。対称性の高さを言うなら、やはり回転対称も、鏡映も欲しい。

正三角形 OAB から各辺の中点に関する $180°$ 回転を次々と施していけば対称性の高い次のパターン III_0 が得られる。

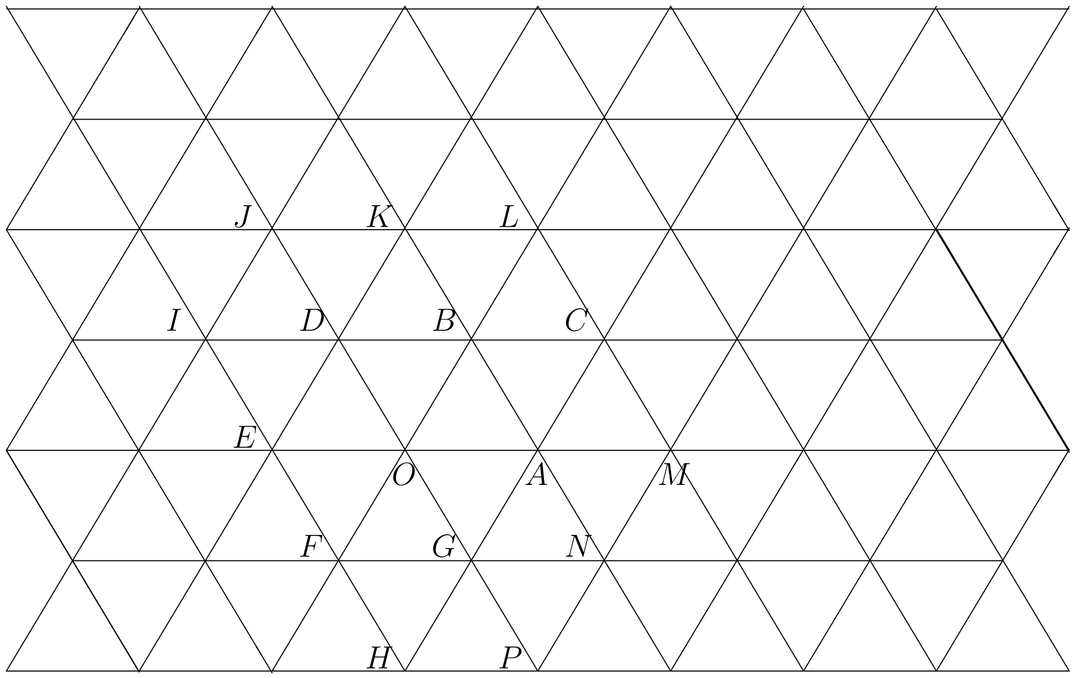


図 42: 正三角形の標準パターン III_0

平行移動の群 $\mathcal{H}(III_0)$ はすべての辺の与えるベクトルの平行移動が許されて、$\mathcal{H}(III_0) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{H}\ \vec{OB}$ となる。ここで、もう一つの辺に対するベクトルは $\vec{AB}=\vec{OB} - \vec{OA}$ と表わされることに注意しよう。

しかし、平行移動の群 $\mathcal{H}(III_0)$ で基本図形 OAB を移動させるだけでは平面全体を覆えない[26]。回転には、三角形の中心に関する $120°$ 回転、辺の中点に関する $180°$ 回転、頂点に関する $60°$ 回転があり、鏡映には、各辺に関する鏡映、各辺の垂直 2 等分線（各頂角の 2 等分線）に関する鏡映がある。

正方形の場合の最も対称性の高いパターン IV_0(図 6) と比較してみよう。

平行移動の群 $\mathcal{H}(IV_0)$ はすべての辺の与えるベクトルの平行移動が許されて、$\mathcal{H}(IV_0) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{Z}\ \vec{OC}$ となる。ここで、他の辺に対するベクトルは $\vec{AB}=\vec{OC}$, $\vec{CB}=\vec{OA}$ と一致してしまうことに注意しよう。生成元の差 $\vec{AC}=\vec{OC} - \vec{OA}$ は正

[26] パターン III_1 の時と同じである。

三角形の場合と違って対角線を表わしていて、辺の長さが同じとすると、$\mathcal{H}(IV_0)$ の方が $\mathcal{H}(III_0)$ より小さいような感じがするが、$\mathcal{H}(IV_0)$ で基本図形を動かせば全平面を覆うことになる。

回転には、正方形の中心に関する 90° 回転、辺の中点に関する 180° 回転、頂点に関する 90° 回転があり[27]、鏡映には、各辺に関する鏡映、各辺の垂直２等分線に関する鏡映、各頂角の２等分線（対角線）に関する鏡映がある。

正三角形のパターン III_0 と正方形のパターン IV_0 の対称性の群 $\mathcal{G}(III_0), \mathcal{G}(IV_0)$ には、一長一短があってどちらが大きいとは言いがたい。つまり、外部対称性を考えても正三角形と正方形とはどちらが対称性が高いとは決めにくいものがある。

しかし、部分パターンのあり方の多様性まで考えると少し正三角形に有利だと言えるかも知れない。正方形については 4.14 で調べるが、ここではパターン III_0 の部分パターンについて少し見てみよう。

２次の部分パターンの基本図形になりうるのは、菱形 $OACB, OABD, OGAB$ などがあるが、これらはみな合同であり、その時のパターンは IV_1, IV_3, IV_5 である。

３次の部分パターンの基本図形になりうるのは、等脚台形 $EABD$ かそれと合同なものしかない。その時のパターンは IV_6 である。

４次の部分パターンの基本図形になりうるのは、正三角形 EAK、平行四辺形 $EACD, EABI$、凹六角形 $OACBKD$ かそれのどれかと合同なものしかない。正三角形の時のパターンはこのパターン III_0 そのもので、但し相似比が２倍のものである。平行四辺形の時のパターンは、IV_1, IV_5 である。

凸六角形の時のパターンは少し考えるだけでも４種類ほど見つかる。１つは $OACBKD$ をベクトル $\pm \overrightarrow{OB}$ で次々と移していけば右上から左下の方向の帯が出来、これを並べていくもの。２つ目はこの帯を並べるときひっくり返して並べていく。例えば、帯を辺 AC の中点で 180° 回転して帯を並べてもよい。３つ目は、$OACBKD$ をベクトル $\pm \overrightarrow{DA}$ で次々と移していくと波形の帯が得られ、それを辺 OA の中点に関して 180° 回転させれば２倍の巾の波形の帯が得られる。同様に帯の巾を広げて選られるパターン。４つ目は、少し変わったものを考えよう。$OACBKD$ を頂点 A の周りに 60° 回転させると $AGFHPN$ が得られ、また辺 OA の中点に関して 180° 回転させると $OANMCB$ が得られ、更に $OANMCB$ を頂点 O の周りに $-60°$ 回転させると $OBCLKD$ が得られる。これらを合わせると、対辺が等しく平行な六角形 $HPMLKE$ が得られる。後はこの六角形のパターンに埋めこめばよい。

５次の部分パターンになり得るものは、等脚台形 $EMCD$、凹５角形 $EACBK$、凹６角形 $OACBKJ$、凹７角形 $OAGFEDB$ などがあり、そのパターンにも色々ある。

奇数次には等脚台形、偶数次には平行四辺形、平方数次には正三角形などがあり、何次の部分パターンも存在する。

[27] 中心、辺の中点、頂点に関する点対称はこれらの回転に含まれている。

部分パターンの基本図形になるものとして、色々な６角形も見つかるし、ダイヤモンド型（５角形)、星型なども眼に映る。

このように部分パターンの基本図形となる図形を探させるというのも、導き方ではかなり応用範囲の広い教材として使えるのではないだろうか。

それらはすべて、このパターンが非常に対称性が高いことからくるのだと言ってよいだろう。

4.12 一般の三角形の場合

では一般の三角形ならどうなるだろうか？

隣の図形とのくっつき方が、辺は辺に、頂点は頂点にというようになっていると仮定すれば[28]、一般の三角形の作るパターンで、隣のものとのくっつき方は６種類、つまり各辺の中点に関する 180° 回転と、各辺に関する鏡映しかないことが分かる（図 43 には３つの回転と水平な辺に関する鏡映が描いてある)。

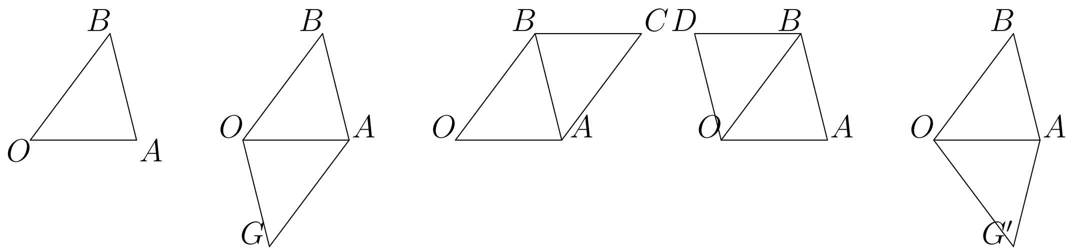


図 43: 一般の三角形のくっつき方

元の三角形 OAB に対して各辺の中点に関する 180° 回転を次々と行っていけば、次のパターンを得る。このパターンは上の３種類の平行四辺形 $OGAB, OACB, OABD$ のどれを基本図形とするパターン IV_1 を考えたとしても得られている。

これは一般の三角形に対しては標準パターンと呼んでもよいようなもので、対称性の群はわりと小さくなるが、許されれる部分パターンはかなり多い。

平行移動の群は $\mathcal{H}(III_2) = \mathcal{Z}\ \vec{OA} + \mathcal{H}\ \vec{OB}$ となり、回転には辺の中点に関する 180° 回転があるが、鏡映はない。

どんな図形を基本図形とする部分パターンがあり得るかという点では、部分パターン自身の対称性は低くなるが、基本図形としてはパターン III_0 で述べたものと同様なものが得られるのである。詳細は述べないが、このパターン III_2 のコピーを沢山作って、そうした図形を色鉛筆などで描き、パターンを作ってみるのも面白い教材になるだろう。

図 43 の四角形 $OG'AB$ にしても、これを基本図形とするパターン IV_8 を作ればよい。描いてみれば、このパターンの対称性はかなり下がることも分かる。平行

[28] 辺の途中に、隣の図形の頂点が来るということが起こらないという条件である。議論を簡単にするために付けた条件で、これを満たさないパターンを考えないと言っている訳ではない。

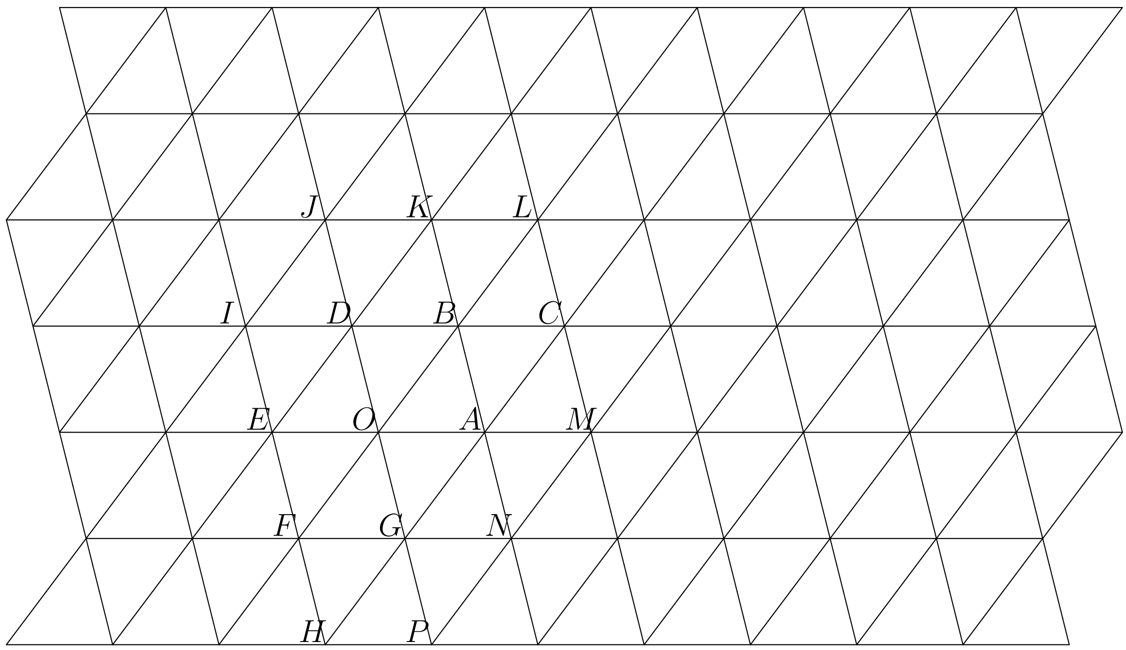


図 44: 三角形のパターン III_2

移動も減るし、回転も少なくなる（OA に平行でない辺の中心に関する 180° 回転は残る）代りに、OA に平行な辺に関する鏡映が残る[29]。

[29]図 69 のパターンに似たものになる。

4.13 一般の多角形の場合

最後に、「一般の多角形でパターンが作れるか？」という問題を少し議論しておこう。

三角形の内角の和は 180° だし、四角形の内角の和は 360° だから、一つの頂点の周りに、三角形の場合は２度ずつ、四角形の場合は１度ずつすべての内角を集めるようにすれば、平面を埋め尽くすようにできたのだった。

一般の n 角形の内角の和は $(n-2)\times 180^\circ$ だから、すべての内角を一つの頂点に集めることは出来ない。

今までにも良く出てきた対辺が平行で等しい六角形の場合、内角の和は $4\times 180^\circ$ だが、内角は二つずつ等しくなっているので、丁度半分だけ一つの頂点の周りに集めて 360° を作ることができる。

またこうでない六角形のパターンの出来るわけは、内角が３つずつの組に分かれそれぞれの組の角の和が $2\times 180^\circ$ になり、例えばパターン VI_2(図 31) のように２種類の頂点に分かれ、一方の種類の頂点には一方の組の角だけが集まるようになっていればよい。

5 角形の場合、内角の和は $3\times 180^\circ$ で、このまま一つの頂点に集めることは出来ないが、6 角形の場合と同様内角が 2 つの組に分かれ、一方の和が 360° で、他方の和が 180° になっており、頂点も２種類に分かれ、一方は和が 360° の内角が１組集り、もう一方には和が 180° の内角が２組集まれば１点の周りを埋め尽くすことができる。こうしてパターンが出来ることは可能であるが、その例として図 56 の図形２、３を基本図形とするパターン（図 59 を見れば、内角の組も和が 360° になる角が３つの角で、和が 180° になる角が２つの組になる例になっている。

図 60 の図形１４の５角形を基本図形とするパターン (図 61) を見れば、内角の組も３種類で、和が 360° になる角が２つの角で、和が 90° になる角が２つの組で、もう一つ 90° の角がある。従って、90° が４つで 360° になるというだけで、必ずしも２組の３つの角が２つずつになる必要はなく、例えば 90° の角が４つ集まってもよいし、つまり、90° の角が幾つ（０－４）集まるかで、５ (+1) 種類の頂点があるパターンを作ることが出来ることが分かる。対称性の群を大きくしようとするとどういうパターンが良いかは、結構面白い問題である。

また図 70 の図形３、５、６、７、９も５角形でそれに対するパターン（もしくはその基本図形）が図 73, 74,75,76 に挙げてある。この図形５のパターンの 76 の場合、頂点は２種類で、内角の組も２つで 360° になる組と３つで 180° になる組とに分かれるのだが、180° になる組が２組で１つの頂点の周りを埋めるようにはなっていない。180° になる組１組と、辺の直線角とでこの点の周りを埋めている。従って、頂点同志、辺同志だけが合わさって、頂点は他の辺の途中に来ることを禁じた制約のものではパターンと呼べないのであるが、一つの図形に合同な図形だけを使って平面を埋め尽くすという元々のパターンの意味から言えば立派なパターンである。

他の多角形ではどうか。７角形の例なら、パターン VII_1(図 21) がある。この場合、内角の和は $5 \times 180^\circ$ で、内角の組は３種類で、そのうちの２種類は和が 360° になる２つずつの角からなっており、もう１種類は和が 180° の３つの角からなっている。和が 180° になる組と辺の直線角とで１点の周りを埋めることになっている。

角数が多くなると、このようなタイプのパターンしかないかと言えば、必ずしもそうではない。１０角形の例が、パターン X_1, X_2(図 18, 19) にあるが、この例では、頂点同志、辺同志しか合わさることがないようになっている。内角の和は $8 \times 180^\circ$ で、この例の１０角形の内角は 120° のものが８つに、240° のものが２つあり、240° の角は 120° の角で補われるが、120° の角はその位置関係で２種類の役割を果たし、３つで１点の周りを埋めることしかしないものと、その外に 240° の角を補う役もする角とに分かれる。

５角形以上の多角形では、ある種の良い性質を満たさないとパターンを作ることが出来ないのだが、そのような例を作るには、もっと簡単な多角形のパターンの高次の部分パターンを考えることによって得られる。また色々な多角形の例で対称性の高いものを思い付こうとしても容易ではなく、次節の 5.2, 5.3 節で示しているように、三角定規を用い方法が有効であろう。身近な素材として教育的にも、応用範囲が広いと思っている。

最後に、対称性の高さを最初に論じたとき正 n 角形は、n が大きくなるほど回転対称性も増すし、線対称軸も増えると言ったが、外部対称性の点ではどうだろうか？正 n 角形の内角は皆等しく $\dfrac{(n-2)}{n}180^\circ$ であり、それが k 個で１点の周りを埋めようとすれば、

$$k \times \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = 360^\circ$$

でなければならず、従って $k(n-2) = 2n$ となる。移項すると、うまい因数分解を見つけることが出来て、

$$(k-2)(n-2) = 4$$

となる。4 の約数は $1, 2, 4$ しかないので、場合も $(n-2, k-2) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$ しかなく、それぞれ $(n, k) = (6, 3), (4, 4), (3, 6)$ であり、対応するパターンはパターン VI_6(図 17)、IV_0(図 6)、III_0(図 42) である。

つまり、これ以外には正多角形のパターンは存在しないのである。無限の回転と無限の対称軸を持つ円に対しては、そのパターンを考えようとしても、円の間の隙間が埋まりそうもない。むしろ、如何に効率よく円を詰め込んでいけるかという問題[30]が、パッキングの問題として有名である。

このことから、「対称性とは何か」などという哲学的な議論を始めることは止めたほうがよい。対称性にも色々あるのだと言うほうがよい。対称性の豊かさを鑑賞し、その美を感じるほうが生産的と言うものであろう。

[30]無駄なく、隙間を如何に少なくできるかという問題。この問題は技巧的な考え方の方が要求され、対称性の教材として適当とは思えない。

4.14 パターン IV_0 の部分パターン

部分パターンについては、正三角形の標準パターン III_0(図 42) や特別な菱形のパターン IV_3(図 26)、正六角形の蜂の巣パターン VI_1(図 17) に対しては述べたが、他のパターンに対しても部分パターンを考えることは面白い作業である。ここでは、パターンに関する（外部対称性に関する）節を終える前に、一番最初に述べた正方形のパターン IV_0(図 45) について部分パターンの多様性を考察しておこう。

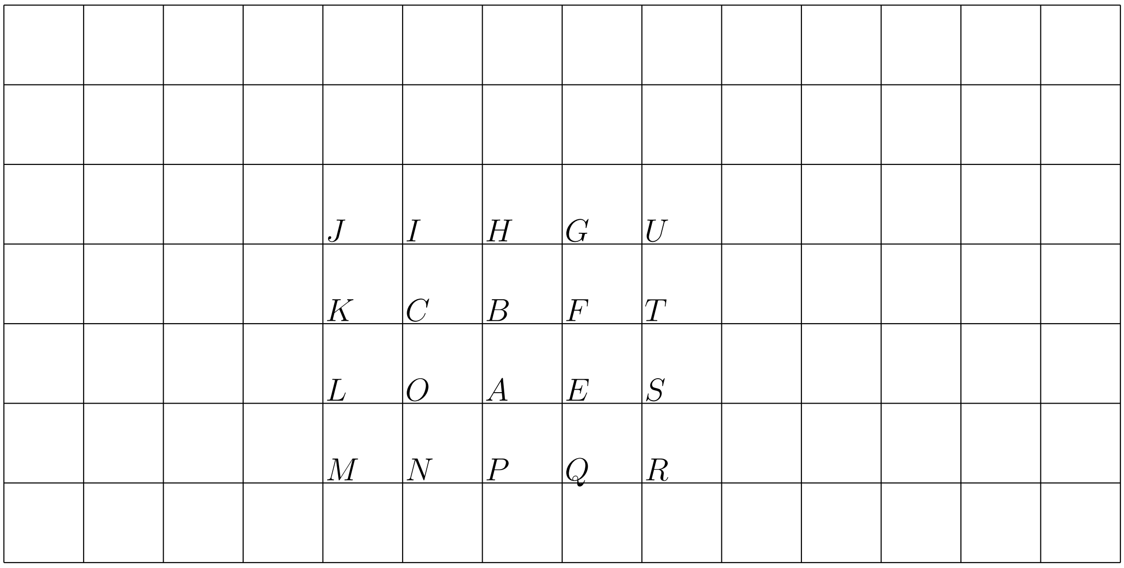


図 45: 正方格子、パターン IV_0 再掲

このパターンに対しては、何次の部分パターンも存在することがすぐに分かる。基本図形である正方形 $OABC$ に対して、辺 AB にこの正方形をくっつけて 2 倍の面積の長方形 $OEFC$ が得られるし、次々と正方形をくっつけていけば何倍の面積を持つ長方形も得られ、例えばパターン IV_2(図 13) が部分パターンとして得られる。

また横だけでなく縦にも積めば、$m \times n$ 倍の面積を持つ長方形も得られ、同様に部分パターンが得られる。

横に m 個並べた後その上に $0 < n < m$ 個の正方形を並べたものを (m, n) 型の**凸型**と呼んでみよう。左端からいくつ目（$\ell(0 < \ell < m - n)$ 番目）から積み始めるかで (m, n, ℓ) 型の凸型と呼んだほうがよいかもしれない。例えば凹 6 角形 $OEFBHI$ は $(2, 1, 1)$ 型の凸型と呼ぶことになるし、凹 8 角形 $OSTFGHBC$ は $(3, 1, 2)$ 型の凸型になり、凹 8 角形 $LSTFGICK$ は $(4, 2, 2)$ 型ということになる。また (m, n, ℓ) 型は $(m, n, m - n - \ell + 2)$ 型の凸型とは鏡映で写りあう。

(m, n, ℓ) 型の凸型が $m + n$ 次の部分パターンを作ることは容易に分かる。例えば凹 6 角形 $OEFBHI$ なら辺 BF の中点で、凹 8 角形 $OSTFGHBC$ や凹 8 角形 $LSTFGICK$ なら辺 FT の中点で 180° 回転させれば、横 $m + n$ 縦 2 の長方形にな

るか、上の段を $\ell-1$ だけずらしたものになり、それを $m+n$ だけ横にずらしていけば巾 2 の帯が得られる。

また積み上げるのを 3 段目までにして凸型を考えてもよいし、$MRSABCIJ$ のような階段型の図形を考えてもよい。この $MRSABCIJ$ は部分パターンを作るし、階段の各段の巾が同じ階段型なら部分パターンの基本図形になることはすぐに分かるが、段の巾が異なる場合には必ずしも部分パターンを作らないことがある。どんなときに出来るかを調べるのも面白い教材になるだろう[31] 。

縦に積むとき、上にばかりでなく同じに下にも付けられる訳で、例えば $OAPQESTFGHBC$ のような十字形の様なものでも部分パターンを作れるが、他にはどんなものが出来るだろうか[32]。

またここでは一つの図形の対称性を問題にしてきたので、パターンの基本図形は連結な多角形を考えてきたが、パターン IV_1^3(図 23) のように基本図形の組を考えると、網羅的数学的な議論は難しくなるが、造形的には面白いものが得られるだろう。また基本図形の組も二つだけでなく三つ四つにした方が作りやすいこともあるかもしれない。

この辺りは教材の実際的展開の中で、現場の雰囲気、児童・生徒の興味の有り方などによって、適宜方向性を考えていけばよいのではないだろうか。

[31]数学的にも、造形的にも余り面白味がないかもしれないが、方眼紙を使えば簡単に作業出来る点が良い

[32]造形的なものを狙って、コンテスト的なものを導入したら、数学にあまり関心のない児童・生徒も興味を持つようにし向けることが出来るかもしれない。

5 隠れた対称性（平面図形の場合）

5.1 一般的な図形に対する一般的な命題の例

一番簡単な平面図形として三角形を考えてみよう。

三角形を１つ描いてみなさいと言ったとき、年齢が低いほど対称性の高い三角形、つまり正三角形に近い三角形を描く傾向にあり、高学年になって多少とも論理的な訓練を受けてくれば出来るだけ一般な、つまり出来るだけ対称性の少ない三角形を描く傾向にあるようだ。

すべての三角形に対して成り立つような命題であっても、特殊な対称性がある三角形の場合には容易にその命題が示せるということが有り得る。このような場合、思考の補助として図を描くときに対称性の高い三角形を描いたとすると、その対称性ゆえにかえって論理の妨げになることがある。命題の成り立つ根拠が対称性に依るのか、別の理由によるのか、分からなくなってしまうからである。そして後に、その対称性を持たない三角形に対して、その命題が成り立っていることに思い及ばないことも起こるのである。

一般の三角形でも成り立つような命題を例にとって考えてみよう。

一般な２つの三角形を考える。今は正三角形でも、二等辺三角形でも、直角三角形でもないということを要請するわけではない。その様な性質を持っていなくても良いと言っているだけである。

さて、その２つの三角形が偶々長さの等しい辺を持っていたとしよう。そうすれば、その辺を合わせれば四角形が出来る、と考えるのが普通だろう。誤解を生まないように記号を使い、命題として書いてみよう。

一般な三角形 $\triangle ABC$ と三角形 $\triangle PQR$ を考える。いま、$AB = PQ$ だったとすれば、この２辺を合わせて四角形 $ACBR$ が出来る。

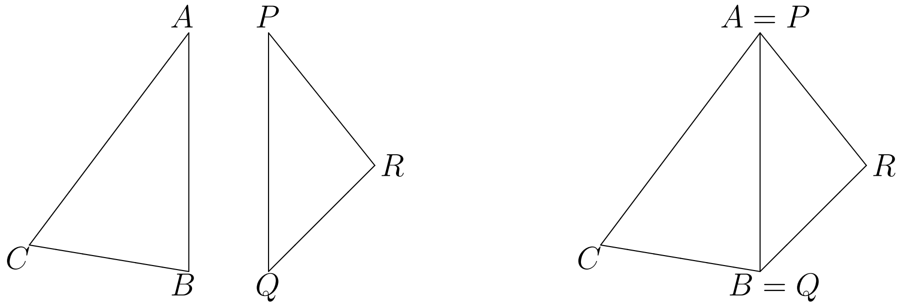


図 46: 三角形を組み合わせて四角形を作る

四角形とは何かという定義にも依るが、この命題はこのままでは間違っている。間違っているかも知れないとさえ思えれば、この命題が間違っていることも、又

成立するように命題を変えることも出来るだろうが、そういう疑いをふと持ち忘れたら、この命題が間違っていることになかなか気付きにくいものなのである。

数学の命題は多く、分かった人には明白すぎるほど明白でどこが分からないのかが分からない程であるのに、分からないとなったらどんなに丁寧に説明しても分かってもらえないということがある。こうした文章は、だから、分かっている人にはまだるっこしくて詰まらないが、分かってない人にとっては難しすぎるということになる。分かったようで矢張りはっきりとは分からないといった感じを持つ人が少し努力をしながら読むということが筆者の想定している理想的な読者像であるが、何事も理想と現実は一致しがたいものである[33]。

さて、問題の所在が分かりにくく、明確に捉えられないような場合に、時として有効な方法がある[34]。

「 問題が理解しにくいときには、問題を一般化してみること。」

この場合の一般化として、三角形の辺の数 3 を一般にし、つまり多角形を扱うことにして、ついでに辺の数も同じでなくて良いことにすれば、

> 一般な n 角形 F と m 角形 G が長さの等しい辺を持っていたとすれば、その辺を合わせて (m+n-2) 角形が出来る、

という命題になるだろう。しかし、これは明らかに誤りである。極端な場合、多角形 F が凸でなければ、重なる部分が出来てしまうかも知れない（図 47)。

命題が正しいかどうかを判定するには、極端な場合を幾つか吟味すると良いことが多い。今の場合、凸などという性質を問題にしようとしたきっかけを知りたい人もいるかも知れないが、実は上の命題で例としてふと 2 つの同じ正六角形を思い付いたのだ。その場合くっつけて出来た図形は既にパターン X_1 の基本図形として議論の中に出てきているが、それが凸でない十角形になっていた。

筆者でもこれくらいな直観は働く。では凸でさえあれば良いだろうか？つまり、命題の多角形というのをすべて凸な多角形に置き換えたらこの命題は成り立つだろうか？凸でないと困るなという思いが既に意識に上っていれば、凸でない多角

---

[33]だから、分かっている人は黙って読み飛ばせばよいし、全然分からない人は分かりそうな気がするときまでこの文章は仕舞っておけば良い。何となくは分かるのだが、はっきりとは分かっていない人のために議論を進めることにする。心に掛けていればいつか分かるようになる時が来るものだ。

[34]フィールズ賞授賞者の広中平祐さんから聞いたエピソードがある。有名な特異点解消の問題を手掛け、途半ばで克服しがたい障害に悩んでいたとき、たまたま日本に帰って数学会で講演をし、その悩みについて語ったという。特殊な場合に検証しているがというような話で締めくくったところ、会場にいた岡潔さんがやおら立ち上がり「特殊なことを考えていちゃいけない。問題を一般化しなさい。」という趣旨のことを発言したという。
広中さんはそのとき否定的な感じで岡さんの話を聞いたのだが、その後も解決が難しく、問題を一般化して考えてみたら障害になっていたことがサラッと解けてしまったという。長い間問題を考えていた広中さんにとって解ける時期が来ていたということも言えるが、岡さんのアドバイスも適切だったということであろう。

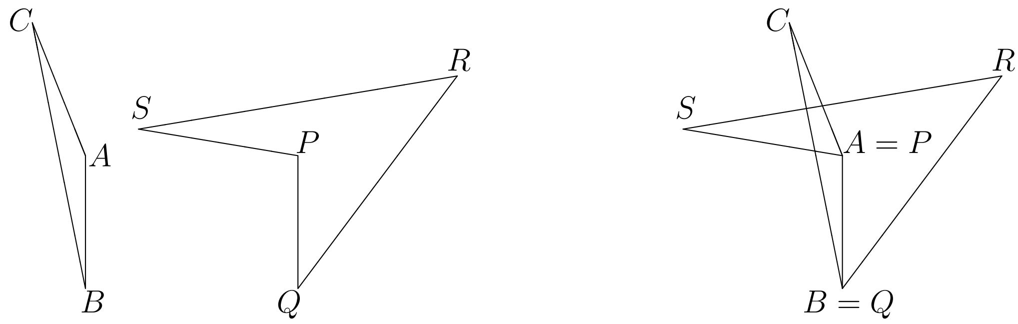


図 47: 三角形と四角形で五角形にならない例 ($AB = PQ$)

形も直観の中に登場する。多角形 F, G が凸であれば、その F と G を合わせれば確かに多角形が出来る。しかし、その多角形が凸だとは限らないのである。

多角形が凸であるということは、すべての内角が 180° より小さいということである。合わせる辺の隣り合う角の和が 180° を越えることもあり得るが、１つの内角でも 180° を越えれば、多角形は凸でないことになる (図 48)。

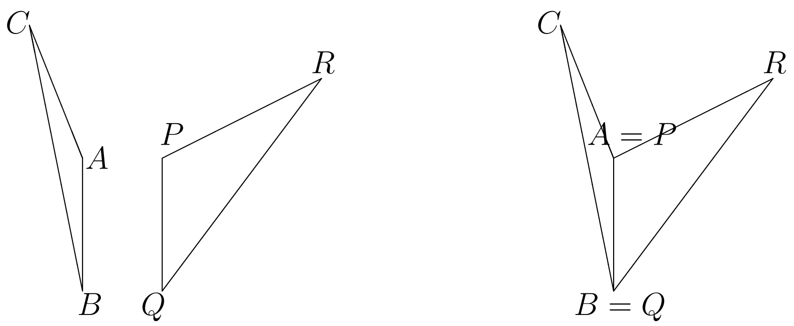


図 48: 三角形２つで凹四角形が出来る例 ($AB = PQ$)

更に、丁度 180° になることもあるわけで、２つだった辺が１つになってしまうこともある (図 49)。

三角形の場合の命題をまとめておけば、合わせる辺に隣り合う角の和が 180° を越えるとき凸でない四角形になり、180° より小さければ凸の四角形になり、丁度 180° のときはまた三角形になる、ということになる。

三角形は、内角の和がいつでも 180° であるから、180° を越える内角を持ち得ず、従っていつでも凸である。それ故、三角形を合わせた図形でも凸という条件が自然に満たされているような錯覚に陥るので、凸でない四角形や三角形になる場合すらあることに気が付きにくいことになるのだ。

対称性に注目したいと思うとき、それとは全く反対の一般な状況についてはっきり認識しておくことも大切である。その認識があってこそ、対称性の特殊さや

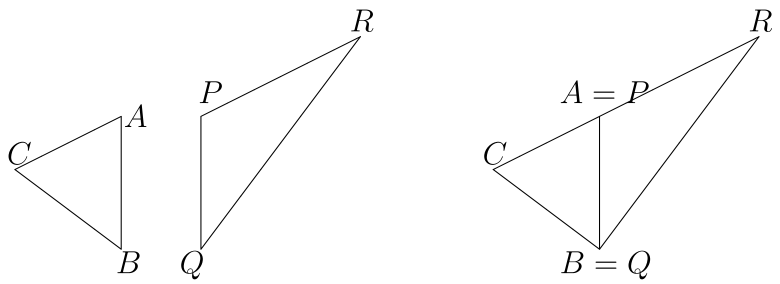


図 49: 三角形２つで三角形が出来る例 ($AB = PQ$)

美しさも感じられるというものである。

合わせる内角の和が 180° の時は四角形でなく三角形になるということはそういう対称性を強調することになるが、逆にこの時も四角形であると言ったほうが、つまりたまたま１つの内角が 180° である四角形であると言ったほうが命題は一般に言い切れるのである。凸でない四角形が出来る場合も非常に特殊であるのならこうした言い回しで切り抜けるのは言葉の遊びに過ぎると言われかねないが、合わせて出来る内角の和は 0° と 360° まで両端は除いてどんな値になっても構わないのである。180° だけ特別と言ってもよいが、180° という値が端にあるならまだしも真ん中にあるのでは少し辛い。

三角形がたまたま内角の１つが 180° である四角形と考えてもよいことにすれば、最初の命題は正しいことになる。つまり、一般な三角形 $\triangle ABC$ と三角形 $\triangle PQR$ に対し、$AB = PQ$ だったとすれば、この２辺を合わせて四角形 $ACBR$ が出来るのである。出来た四角形は、すべての内角が 180° より小さければ凸な四角形で、180° より大きな内角を持つことがあれば凸でない四角形で、そしてたまたま丁度 180° の内角を持てば、その頂点を無視して三角形と考えることも出来るということにすぎないという訳である。

したがって一般の場合の命題も同じ様な考え方をすれば、凸という条件の下で、正しいと看做すことも出来るのである。$m > \ell$ であれば、どんな ℓ 角形も m 角形であると考えることが出来るのである。たまたま内角の内の $m - \ell$ 個が丁度 180° であったに過ぎないということにすればよい。勿論この時、ℓ 角形の辺の上には m 角形と看做すためだけの為に $m - \ell$ 個の頂点が打たれることになる。

話を戻そう。三角形になりうることは気付きにくいと言っても、それでもこれが二つの直角三角形の時なら、直角を合わせればまた三角形が出来ることに多くの人はすぐ気が付くだろう（図 50）。二つの直角三角形のときは、他に等しい辺があったとしても（今の場合斜辺と斜辺でない辺が等しいということ）、直角の所で合わせたくなる。図 50 で言うと、たとえ $AC = QR$ となっていたとしても、AC と QR を合わせたりせず、図のように直角を合わせがちになるということである。

直角を２つ合わせると直線になるということは皆良く知っている。直線角（180°）

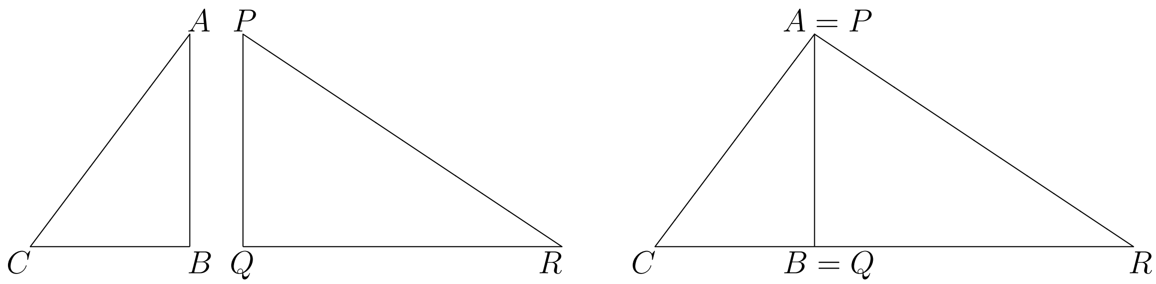


図 50: どれを合わせるのか？

の半分というのが直角の定義だから、つまり直角を２つ合わせたら直線になることが直角の定義だから、知っているのは当たり前と言っても良いのだろう。

ここで、角が半分であるということをもう少し考えてみよう。ある直線 ℓ をその上の１点 O に関して折り返すことを考える（図 51）。この直線が紙 α の上にでも描いてあって、O からの一方の半直線 OP をもう一方の半直線 OQ に重ねていくことにすると、紙 α の上に折り返しの線 AB がくっきりと残るだろう。紙 α をもう一度延ばしてみよう。紙 α は元々直線 ℓ によって２つの領域に分かれていたが、この折り返しの線 AB はこの２つの領域を同じ様に半分にしているのである。折らない前の紙 α の面上の直線角 POQ は、折ることで重なり合う２つの直角 $\angle POA$ と $\angle QOA$ の和に分けられている。

直角は本来こうして得られるものだということが分かっているので、つまりこれまでの普通の教育を受けたものにとっては、２直角が直線角であることは良く馴染んだ感覚であり、従ってこの場合ははっきりと目に映る対称性があることになっている[35]。

図 49 に戻って考えてみよう。１つ１つは何の特徴もない２つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ だが、$AB = PQ$ だからといって辺を合わせた図形を考えたとき、たまたま $\angle CAB + \angle RPQ = 2$ 直角　であったから三角形 $\triangle CBR$ が得られたのである。更にたまたま $\angle CBA + \angle PQR =$ 直角　であれば得られた三角形 $\triangle CBR$ は直角三角形になり、更にたまたま $CB = QR$ であれば直角二等辺三角形にさえなることがあるのである。

もっと偶然だって起こりうる。たまたま $\angle CBA + \angle PQR = 60^\circ$ で $CB = QR$ であれば、得られた三角形 $\triangle CBS$ は正三角形になるのである。

どんな対称性も考えられないような２つの三角形でも、偶然の組み合わせで極めて対称性の高い三角形を得ることになるのである。いわば対称性が回復される

[35] はっきり目に映る特徴があるとき、他の特徴には目が行きにくくなる。まるで手品の基本のような状況だ。手品や奇術のコツの１つにこういうのがある。左手で何かをしているときは、観客の視線を右手に集中させるようにすること。
応用が利かない子供や１つの解法に執着して正しい解答に到達できない生徒の多くは、まさにこのことを自分自身に対して（勿論意識せずに）行っているのである。

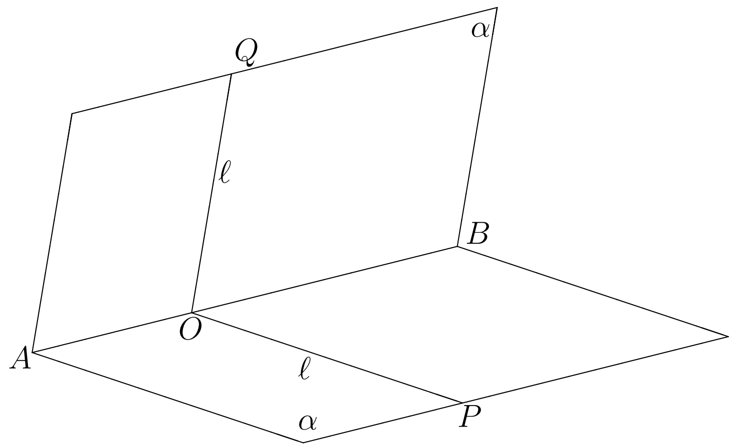


図 51: 直角は直線角の半分

のである。

いろいろの形の三角形を描いておき、適当にくっつけて色んな図形を作るといったタイプの問題を考えれば、上の事情は隠れた対称性を発見することだという言い方も出来るだろう。

5.2 三角定規で作る対称性 I（直角二等辺三角形の場合）

外部対称性を論じた前節でもいったように、対称性の高い図形もそれを他の図形と合わせると一般には対称性が落ちることが多いが、前パラグラフで注意したように何の対称性も持たない図形でも組み合わせによっては高い対称性を回復することがある。

しかし一般な図形を使って対称性の回復の様子を探ろうとしても、そこには“ たまたま ”の事情がないとそういう事は起こらない。自然現象ではかえって、最少作用の原理（例えば光の屈折、反射、回析などで本質的な原理）などによって対称性が回復されることがありうるのだが、その様な外的な制約がない限り対称性の回復は普通偶然にしか起こらない。

それでは何故このような問題を議論するのかという疑問も起ころうが、一般な図形というものが説明しにくく納得させにくいものであることが教育的には問題なのである。

対称性の高い図形をくっつけると対称性が落ちるといったが、くっつけた図形が一般な図形のように見えても、もしかするとその図形をまた適切な仕方でくっつけると元の対称性や全く別の対称性が回復されることがあり得るのである。

こうした事情を調べるための恰好の教材を殆どの生徒は持っている。それは三角定規である。しかしこの種の実験をしようと思えば、１組だけで足らない。ここで、１つスローガンを掲げておこう。

三角定規は沢山あるほどよい。隠れた対称性が見えてくる。

三角定規には２つの形がある。直角二等辺三角形 $\triangle ABC$ と、内角が $30°, 60°, 90°$ の直角三角形 $\triangle EFG$ である。

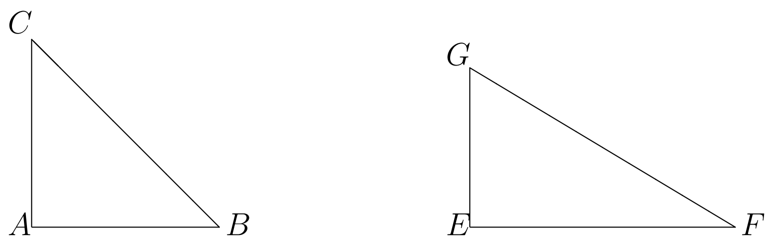


図 52: 三角定規の２つの形、半正方形と半正三角形

直角二等辺三角形の方は１つの内角が直角でそれを挟む２辺の長さが等しいという特徴付けからの名前だが、直角以外の２つの内角が等しい（これから $45°$ であることが分かる）という特徴付けも得られ、直角二等角三角形と言っても良い。また $AB = AC = \dfrac{1}{\sqrt{2}}BC$ という辺の比でも特徴付けられる。これは AB を１辺とする正方形から対角線 BC で切り取って得られると言うことと同じである。この意味で半正方形と呼んでもよいと思うが、見掛けたことがない。しかし何度もこ

の形の三角形を引用するので名前が短くないと困ることもあり、この文章の中でだけという断り付きで、直角二等辺三角形のことを**半正方形**とも呼ばせて貰うことにしよう。

もう１つの $\triangle EFG$ は内角でだけでなく、$EG = \dfrac{1}{2}GF = \dfrac{1}{\sqrt{3}}EF$ という辺の比でも特徴付けられる。しかし、この三角形に付けられた簡便な名前はまだないと思う。半正方形の場合と同様、GF を１辺とする正三角形を半分にしたものであることから、**半正三角形**と呼んだらどうだろうか。少なくともこの文章の中でだけはそう呼ぶことを許してもらおう。

さて、まずは直角二等辺三角形の場合に遊んでみることにしよう。直角二等辺三角形は内角が $90°, 45°, 45°$ であり、すべて互いに相似である。どんなメーカーの三角定規を使っても同じ結果が出ることに不安を抱く理由はない。しかし勿論、大きさの違う三角定規を混ぜて使えば、以下の遊びはうまくいかない。

最初はくるくると回してみよう。１つの辺が水平でないと心理的に不安定になることもあるので、その様に置くことにすると下の３種類になる。まずこの形をしっかりと見てみよう。１つだけで回してみるより、３つでも４つでも自分で納得のいくまで色々の状態のものを並べて見比べられるほうが良いと思う。

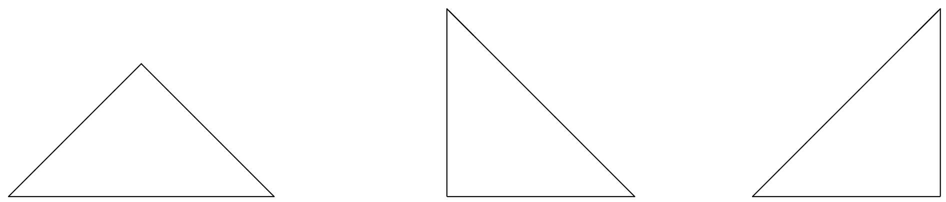


図 53: 直角二等辺三角形の３つの置き方（半方 I）

何も得られなくてもいい。色々と空想が広がるようならそれも良い。教師の判断で適当な時間、適当なコメントを考えておくこと。あくまでも子供の反応を見ながら臨機に判断することが必要である。あくびの出かけた生徒が出そうにみえたら、早めに切り上げること。

次にはこれを幾つか用意して組み合わせてみることにしよう。長さの違う辺をくっつけると対称性が極端に落ちるので、長さの等しい辺を重ねよう。得られる図形は合同を除いて、正方形と直角二等辺三角形（半正方形）と平行四辺形である。面積はもちろん２倍である。

正方形が得られたから、沢山のこの定規を使えば $Pat.IV_0$ やその部分パターンを作ることが出来るし、平行四辺形でのパターン $Pat.IV_1$ を作ることも出来る。２倍の面積の直角二等辺三角形が得られているから、基本図形の面積が２倍のどんなパターンも得ることが出来る。

長さが倍の大きさのものを作るためには、当然４倍の数の定規が必要だ。以下

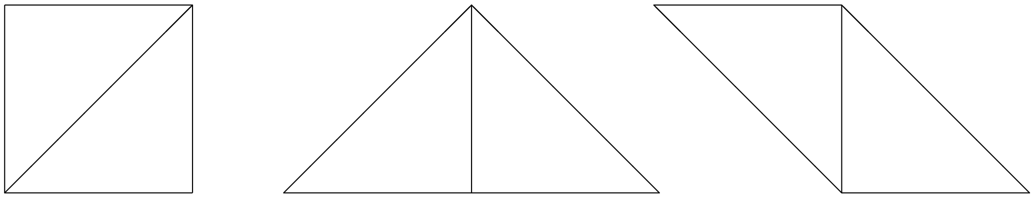


図 54: 2つの直角二等辺三角形の組み合わせ図形（半方 II）

で定規を沢山使ったものを図示するときに１辺の長さを小さくせねば納まらないので、そうしなくてはならなくなることもあるが、辺の長さは同じだと思っている。これは目の位置を少し遠ざけたということに当たっていて、議論の本質には関係がない。教室で、例えば班ごとに別れて以下の作業をしていくと机の上だけではスペースが足らなくなれば、教室の床に広い場所を作ってやることになろうが、多くの定規を使うことになれば自然に視線が遠くなるだろう。

８つの定規で作った図 55 のそれぞれの図形の中に、２つの定規で作った (図 54 の) 図形が隠れているし、その３種類の図形の面積を２倍にした図形も図 55 のどれかの図形の中に隠れている。面積が倍の図形を探すのは、ちょっとしたコツかカン（感）かナレ（慣れ）か洞察力が要るかも知れない。

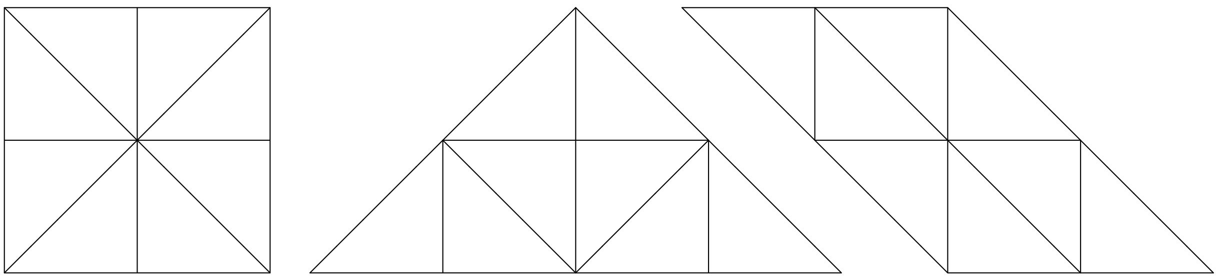


図 55: 倍の大きさには４倍の個数の定規が要る (半方 II $\times 2$)

見た瞬間に分かってしまう児童・生徒もいるだろうが、そういう対象を問題にしてはいない。教育現場ではそういう児童・生徒には鄭重に静かにしていて貰う工夫、または教師の側につけて分からない児童・生徒を一緒に指導させ、そのことによってそうした子供達にも更に深い理解を得させるような工夫が必要になる。しかしこれは算数・数学教育だけに止まらない問題でもあるし、教師の人間的な広がりや柔軟性などによる部分が大きいのでここでは論じない。

コツというか問題の本質というか、閃きを助ける指導法に１つの提案をしておこう。教師の側はより数学を知っているのだから、その認識や数学的構造についての理解を“ 陰で ”使うことになる。倍の面積の図形とは相似比が $1:\sqrt{2}$ の相似な図形であることに注意して、斜辺とそうでない辺との役割を換えるのだという

ことを指摘してやるとよい。相似比の概念の無い子供には、２つ合わせて出来た図形に面積が倍の直角二等辺三角形があったことを注意して、そのとき斜辺とそうでない辺との役割が反対であったことを指摘してもよい。面積が倍になるとき必然的に変わるもののうち、形を決めるのは何かとか形の特徴を表わすものは何かと考えさせる訳である。

指導上の困難に当たったときそれを克服する統一的な方法があると期待してはいけない。そんな方法はないのだから。その困難に出会ったときの諸々の状況の違いによって、ある方法がベストであったりかえって混乱を助長する方法であったりする。その困難を越えることの出来る数学的事実や技法は大抵の場合１つではない。多くの等価な事実や技法を考え、その状況に最も適したものを利用するのだという精神を忘れないようにして欲しい。最も適したものだと思ったものでも児童・生徒が理解してくれない場合もあるだろう。その時はもう一度考え直すことである。最も適したものは何か。他に等価な事実がないか。児童・生徒が何か思い込んでいて、そのために正しい理解への障害になっているようなものは何か。そんなときは、多分児童・生徒にとって等価だと思っている数学的事実が実は等価でなかったということが多いものである。指導者だけが等価なものを探すのでなく、誤って等価だと想いやすいものは何かと考える癖を付けておくと、多くの指導上の困難は自然に解消することもあるのではないだろうか。

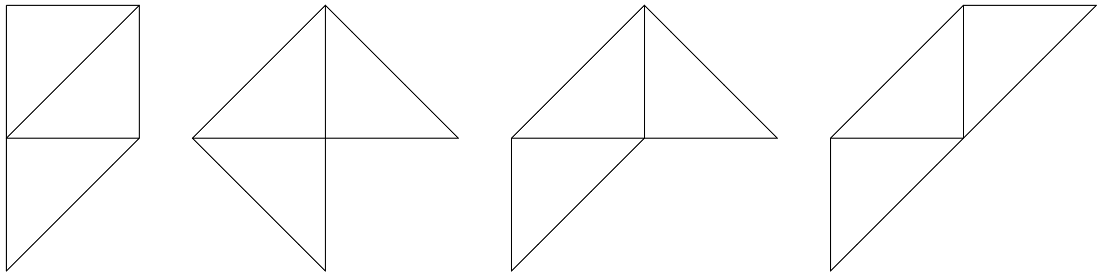
さて、対称性という観点から言えば、それを基本図形とするパターンの対称変換の多いものが作れることが、その図形の対称性の高さであるという立場で議論を進めてきたのであった。

２つの定規で出来た正方形、直角二等辺三角形、平行四辺形について言えば、正方形で出来るパターン $Pat.IV_0$ は非常に多くの対称性の変換を持っていたし、直角二等辺三角形の場合は何であれ面積が倍のパターンが出来るだけで対称性は変わらないと言えるし、平行四辺形の場合はパターン $Pat.IV_1$ での一般の場合の分しか対称性はなくかなり減って仕舞っている。同じ図形を２つ合わせて対称性が増えたり減ったり変わらなかったりしているわけで、直角二等辺三角形は特別な性質を持っているということも出来る。

遊ぶついでに３つの直角二等辺三角形を合わせ得るどうなるのかを見てみよう。合同を除けば以下のものしかない。等しい長さの辺をくっつけることで得られる図形は以下の４種類の図形のどれかと合同である、つまり回転するか線対称で写すかすれば重なるということである。

これらの図形は見たところかなり対称性の低い図形であるようだ。回転は自明なものしかないし、対称軸も２、４、の２つの図形にしかない。しかし、直角二等辺三角形という特別なものを合わせた図形であることを反映して、この四種類の図形はすべてあるパターンの基本図形になることが出来るのである。

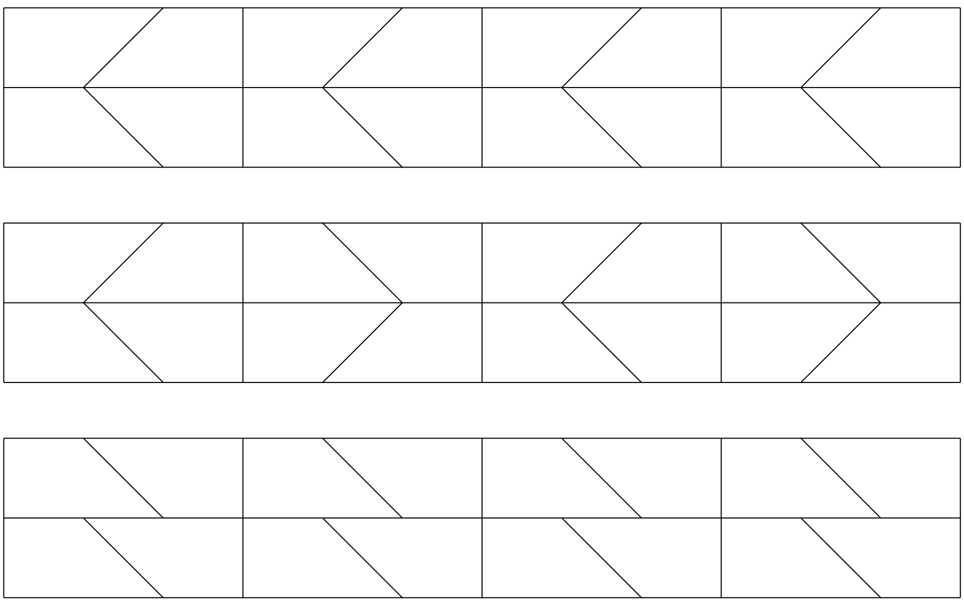
まず最初の図形１が基本図形になりうるのは簡単に分かる。斜辺を合わせれば長方形になる。そして、長方形の作るパターンで対称変換が多いパターン IV_2 のそれぞれの長方形に中に図形１を２つずつはめていけばよい。しかし図形１の作る



1 2 3 4

図 56: ３つの直角二等辺三角形の組み合わせ図形（半方 III）

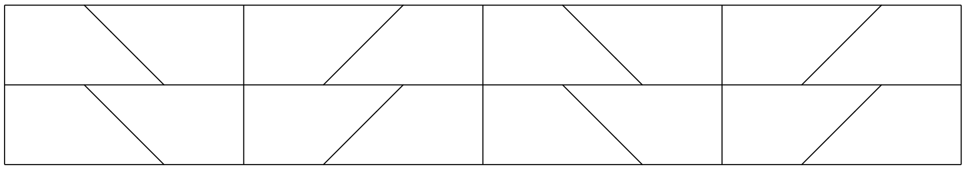
パターンとして考えるのだから、一番対称変換が多いパターンを考えるとしても、長方形に２つずつの図形１のはめ方の違いで、図形１を基本図形とするパターンとしては異なるものが得られる。簡単に思いつくだけでも図 57 にあげた４種類のパターンがある。勿論図 57 は長方形のパターンとしてのパターン IV_2 の一部を、全体が推測できる程度に描いたものである。



1

2

3



4

図 57: 半方 III 図の図形１のパターン

このうちどれが一番対称変換が多いかは難しいところだ。１、２番目のパターンは３、４番目を比べると、垂直方向の平行移動が半分しかないがその代わり水平の辺に関する鏡映がある。また１、３番目のパターンは２、４番目を比べると、水平方向の平行移動が半分しかないがその代わり垂直の辺に関する鏡映がある。90° の回転はないが、180° の回転即ち点対称は幾つかあって、それぞれにそのあり方が異なっている。

これらの図形１を基本図形とするパターンは長方形を基本図形とするパターン IV_2 を部分パターンとして持っているが、それぞれのパターンで別の図形を基本図形とするパターンを部分パターンに持っていることが分かり、それがまた対称性の差を表わしていると言えるのである。

図形１を二つ合わせて得られる凸な図形だけを基本図形の候補とするにしても、パターン１では平行四辺形、将棋の駒のような五角形、凹な五角形（図 58 の左から１、２、３の図）、パターン２では平行四辺形の代りに等脚台形（図 58 の左から４の図）、パターン３では平行四辺形、パターン４では等脚台形となる。平行四辺形と等脚台形のとき以外は図 57 のような２段の帯では分かりにくいかも知れない。その時は３段にしてみるとよく分かると思う。

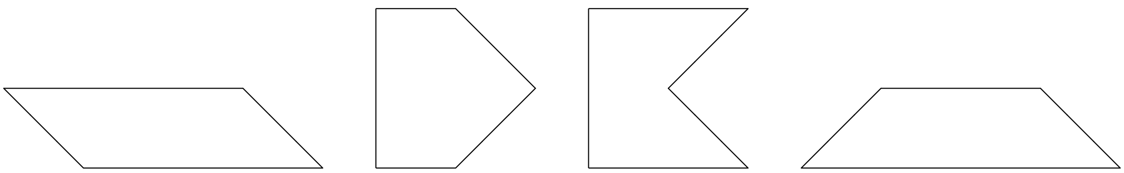


図 58: 図形１のパターンの２次の部分パターンの基本図形

どの図形のパターンと見ても、長方形のパターン IV_2 の方が対称性が多い。図形１だけ見てもまだまだ細かく見ていくことも出来るが、以下のすべての図形に対してここで行うのは煩雑に過ぎる。現場で子供の興味に応じて選んだ図形に対して細かい検討をするのは大いに奨励するものであるが、以下は少なくとも一つのパターンを挙げるに止め、特に興味あるものについては複数示すことにする。

それでは、他の３つの図形を基本図形とするパターンの例を挙げておこう。無限に長い帯さえ出来れば、後は横にずらしていけばパターンが得られるので、帯の作り方だけ分かるように図示してある。

図形２に対しては帯を２段分図示してあるが、下の図のように２つの帯をきれいに合わせる必要はない。帯をずらしても平面のパターンにはなり得るが、対称性が減る。例えば奇麗に合わせた図 59 の左の図では十字型に交わっている点があるが、これらの点を通る２本の直線に関して対称だし、これらの点で点対称にもなっているが、帯をずらせばこの対称性は消える。今は一番対称性の高いパターンだけを挙げているに過ぎない。他のパターンを考えてみるのも良いことである。

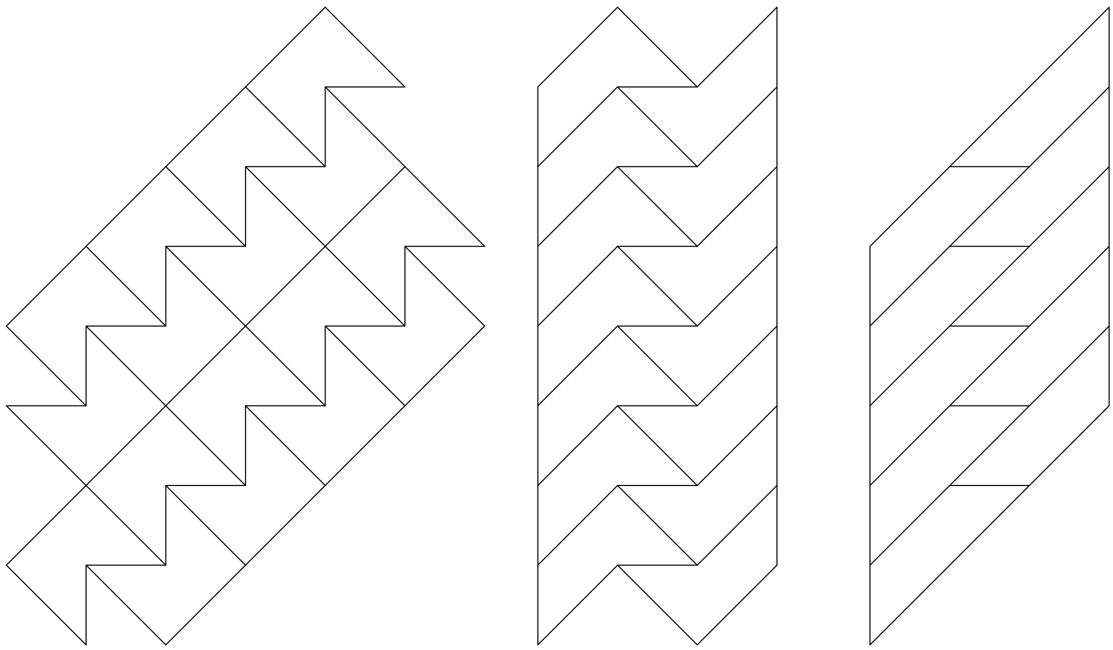


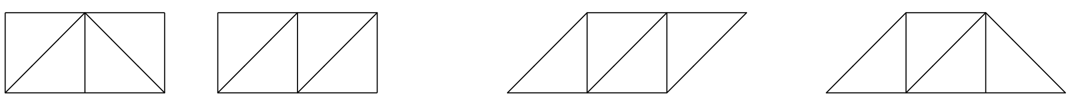
図 59: 半方 III 図の図形２、３、４のパターン

殆ど遊びになってしまったが、遊びついでに、４つ合わせると合同を除いてどれくらいあるかも考えてみよう。

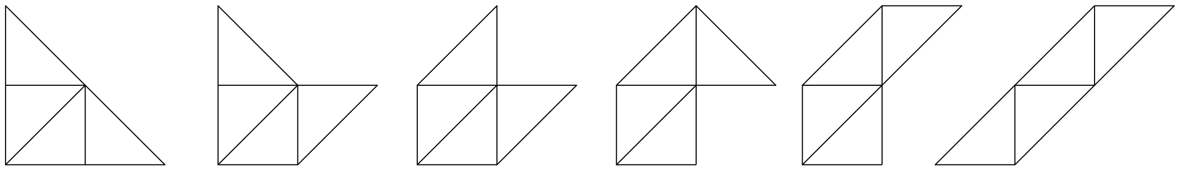
図 60 の最初の２つは合わせた図形としては同じ長方形だが、三角形の組み合わせとしては異なるものであり、長方形のパターン IV_2 を４次の部分パターンとする半正方形のパターンとしては異なるものである。

他の図形でも正方形を含んでいるものがあるが、その時対角線を逆のものにとれば、得られた図形としては合同だが、組み合わせとしては異なるものが得られることになる。

しかし以下では４つを合わせて得られた図形として合同な図形は同じだと思うことにすると、異なるものは１４種類ある。これを区別するため、１から１４までの番号を振っておこう。



1　2　3



4　5　6　7　8　9

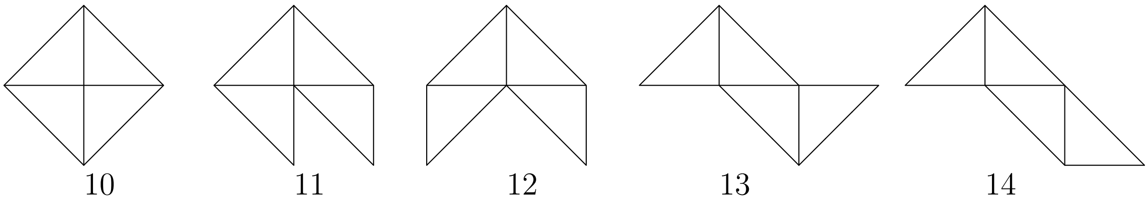


図 60: ４つの直角二等辺三角形の組み合わせ図形 (半方 IV)

これらの図形もまたあるパターンの基本図形になっている。１つの図形が色々なパターンを作るのだが、ここでは典型的なものだけ挙げておこう。得られた図形が正方形、長方形、平行四辺形、等脚台形、二等辺三角形（半正方形）である図形１，２，３，４，９，１０は既に知っているものとして良いし、容易に平行移動で無限に長い帯が作れる図形６，８，１２もそれで良いだろう（尖ったところを凹んだ部分にはめていくという感じにする）。残りの図形５，７，１１，１３，１４についてパターンが分かる程度に示しておこう。

一般にあるパターンの基本図形であることだけを示すなら、その図形を幾つか組み合わせて既にあるパターンの基本図形になっていることが分かっている図形を得ればいいし、又無限に長い帯が作れれば後は平行移動でずらせばよい。

この原則に当てはめれば、図 61 の図形から容易に帯が出来ることが分かるので、あるパターンの基本図形になっていることが分かることになる。つまり、図形１１と１４は２つ合わせて長方形を作り、図形７も２つで３組の対辺が平行で等しい六角形になり、パターン VI_1 を少し歪めたパターンを作ることが出来る。また、図形８はそのまま右にずらしていけば無限の帯が得られるが、それとは別に４つ合わせれば、対辺が平行で等しい六角形が得られる。

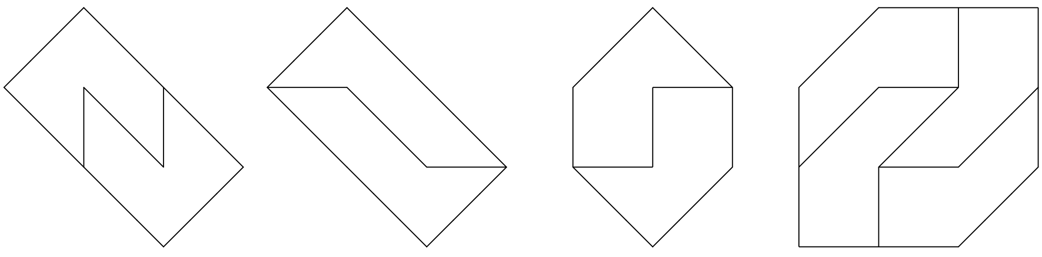


図 61: 半方 IV 図の図形１１，１４，７，８のパターンの基本図形

図形１３に対して、図 62 を２段だけ見れば刺の出た帯と言うべきもの（波形とも言える）が無限に長く得られることが分かる。帯なら水平方向に引っ掛かるところがなく、縦方向に積むとき好きなように（水平に）ずらすことが出来るが、いまは刺が出ているので、出ているところと引っ込んでいるところを合わせないといけない。自由にずらすわけにはいかないので、更に１段図示しておいたが、こ

れでパターンは分かるだろうと思う。

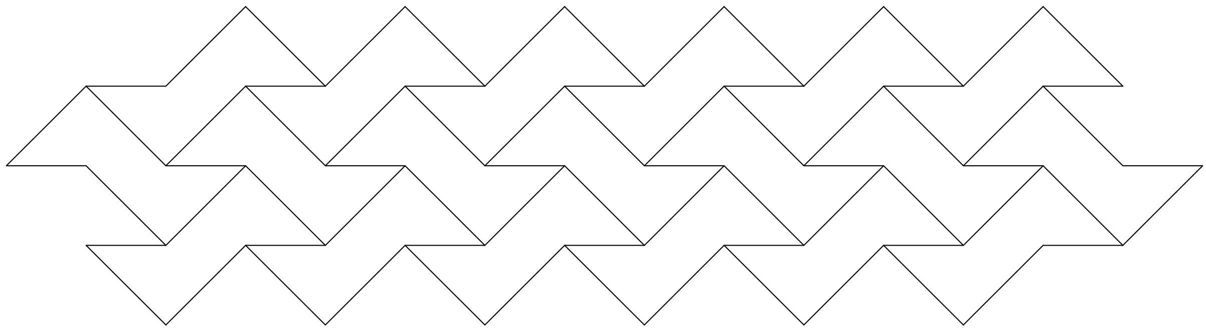


図 62: 半方 IV 図の図形 13 のパターン

図形５も下のようにすれば無限の帯が得られるが、図形５は線対称な図形ではないのでどうしても鏡映を使わないと平面を埋め尽くすことは出来ない。ここでは行数の都合で、図形５を 90° 回転したもので描いている。

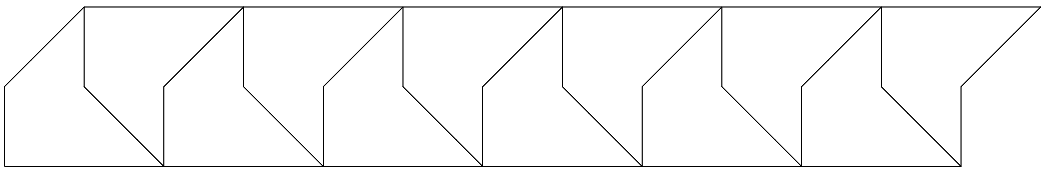


図 63: 半方 IV 図の図形 5 のパターン 1

どうせ鏡映を使うのなら、それを強調して、図形５とその鏡映を合わせると図形１３の面積を倍にしたものが得られる。それを使って、図形１３の時のパターンを描いて正の方向に 45° 回転すれば図 64 のパターンになる。

このパターンを見ていると、左上から右下への斜めの線が妙に気になる。この方向に２段ずつずらす平行移動でパターンは不変になるようだ。部分パターンの基本図形としては最小のものは４次のもので、それを４つ図 65 に挙げておこう。面積が最小と言うだけならまだ幾らもある。下の図 65 の例の前２つの図形には図形１３が含まれているが、後ろ２つには図形１３は含まれていない。このパターンを得るために図形１３を経由する必要はないのだ。

さてこのように、４つ合わせた場合はどの図形もあるパターンの基本図形になったが、５つの時も６つの時も、幾つ合わせたときもそうなるだろうか？時間があれば授業の時でも、又自由研究の時でもやってみれば面白いテーマになるだろう。数え尽くしていく作業と、新しいものを考え付く作業とが別の才能であるのかそれとも関連があるのかを考える良い試験材料になるだろう。

幾つ合わせて図形でもあるパターンの基本図形になるということが間違っていることを１つだけ例示して、直角二等辺三角形の場合を終わっておくことにしよう。１６個の直角二等辺三角形で作った図形と、２８個で作った図形である。前の図形には１つ、後の図形には２つの穴があいている。これらの図形だけでパター

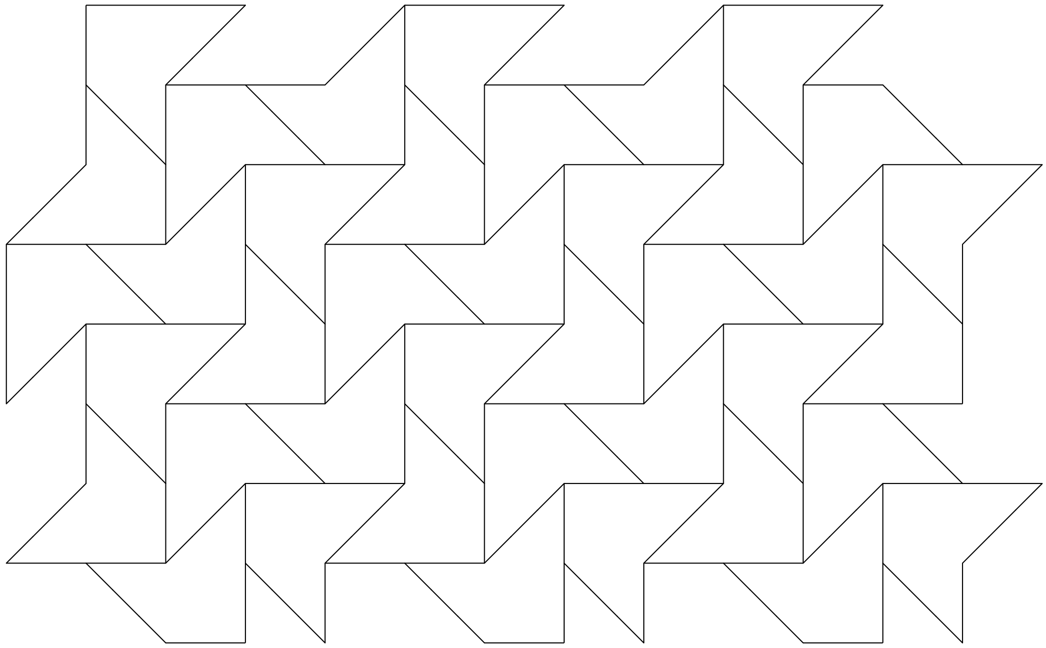


図 64: 半方 IV 図の図形 5 のパターン 2

ンを作れるかということを考えるとき、あいている穴を埋めるためにこれらの図形を使うことは出来ないのである。

直観的には明らかだが、疑問の余地なく示せと言われれば、ジョルダンの閉曲線定理を使い、この図形で囲まれた内部（穴）と外部を、この図形自身と交わらずに結ぶことが出来ないと言えばよい。しかし、児童・生徒にはそんなことを言わないでも、穴の面積とこの図形の面積とを数えてみたら納得されるであろうし、それで十分厳密な証明でもある。

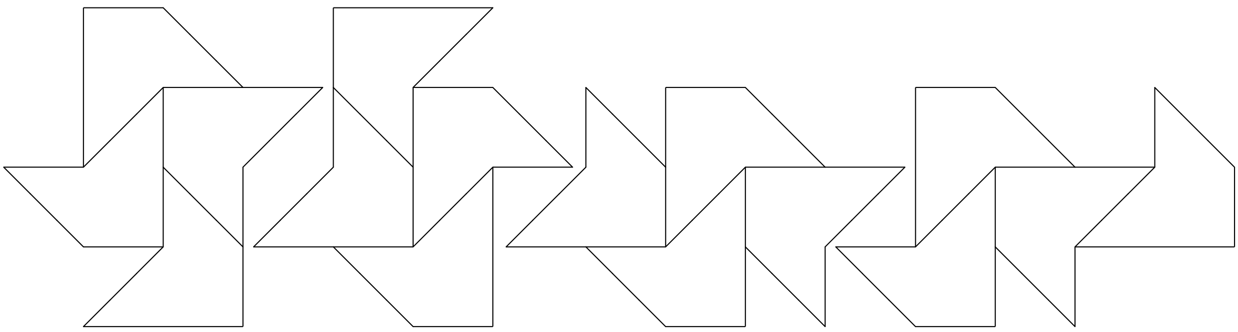


図 65: 半方 IV 図の図形 5 のパターン 2 の準基本図形

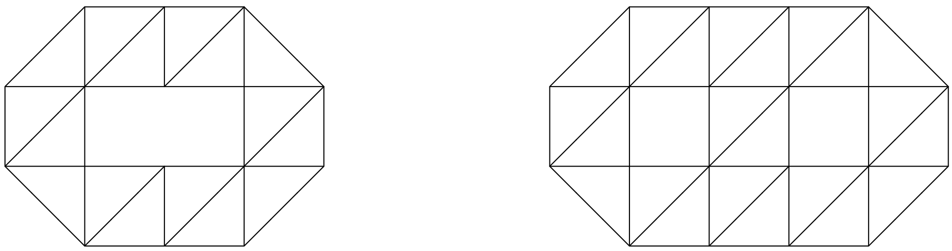


図 66: 直角二等辺三角形の組み合わせ図形でパターンの基本図形にならない例

5.3 三角定規で作る対称性 II(半正三角形の場合)

三角定規にはもう１つ $30°, 60°, 90°$ の角度を持っているものがある。この定規に対しても直角二等辺三角形と同じことをすることが出来るが、場合の数がかなり多くなる。一辺を水平にして手前に置くだけでも随分置き方が増える。どの辺を選ぶかで３通り、更に垂直な線に関する鏡映によってその倍の６通りである。

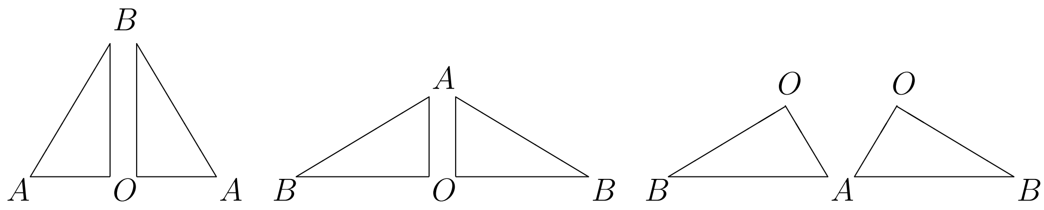


図 67: 半正三角形の６つの置き方 (半三 I)

長さや面積の値を使いたいこともあるので、$OA = a$ としておく。図 67,68 の一番左に描いた図形はすべての角度が $60°$ になるので正三角形であり、従って、斜辺は $AB = 2OA = 2a$ であることが分かり、ピタゴラスの定理により残りの辺は $OB = \sqrt{3}a$ となる。相似な三角形は辺の比だけで決まるから、考えている三角形は辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ の三角形であるということが出来る。この三角形にはあまり普及した一般的な名前がないので、書きにくくて仕方がない。そこで、仮にだが、正三角形の半分という意味で、半正三角形とでも呼んでおくことにする。

２つ合わせた図形も、どの辺を選ぶかで３通り、合わせる２つの三角形の向きが同じか否かでその倍の６通りの合同でない図形が得られる。直角二等辺三角形の場合は３通りだったが、それは鏡映したものが元のものと回転によって重なったので、違う組み合わせのつもりでも合同になることがあったのである。

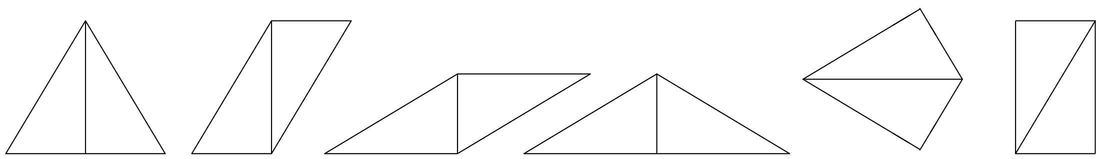


図 68: ２つの半正三角形の組み合わせ図形 (半三 II)

元の定規の形の三角形は得られないが、正三角形、二等辺三角形、平行四辺形、長方形、西洋凧の形の四角形（これを仮に凧型四角形と呼んでおく）と多様な対称性が得られそうである。勿論これらの図形は多くの対称変換を持つパターンの基本図形になることが出来る。凧型以外は既に知っているので良いと思うが、凧型については少し思い付きにくいかも知れないので、図示しておこう（図 69）[36]。

[36] 勿論凧型と言えど四角形だから、4.10 節で述べたように、一辺の中点に関する $180°$ 回転で得

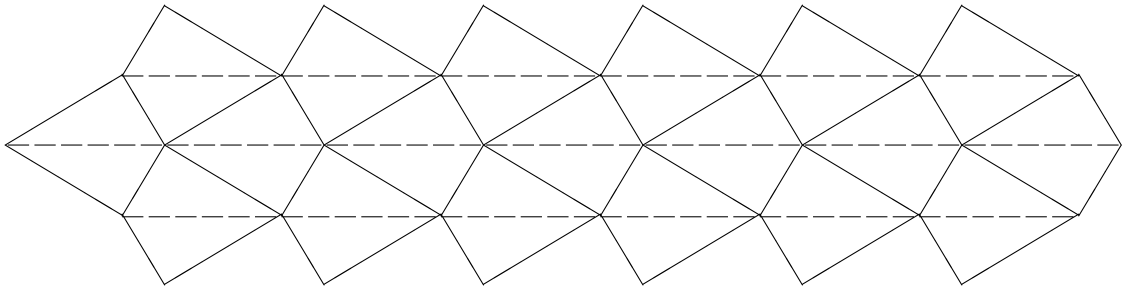


図 69: 凧型四角形のパターン

さて、半正三角形を３つ合わせるとどうなるかも考えると、図 70 の図形が得られる。取り敢えずの番号を付けておこう。

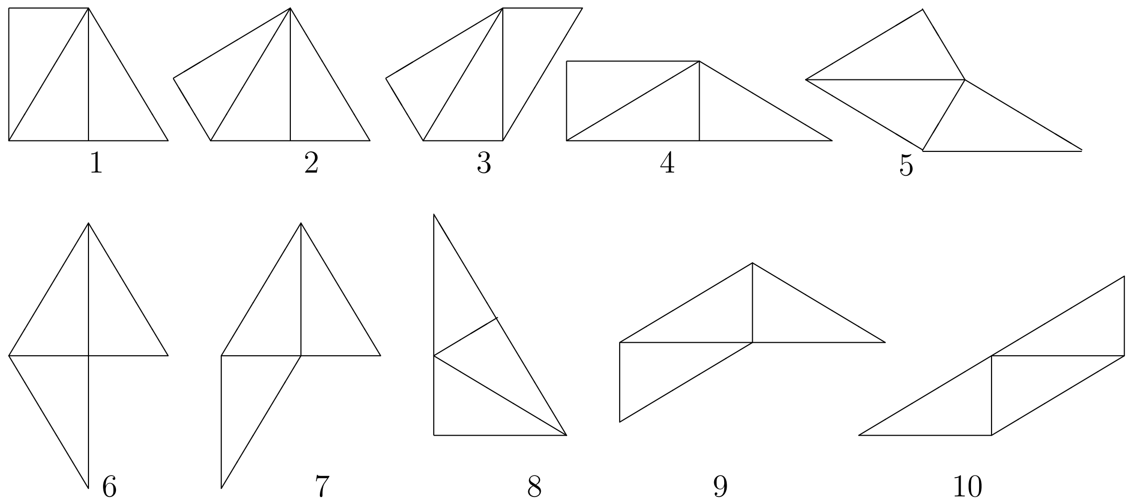


図 70: ３つの半正三角形の組み合わせ図形 (半三 III)

ちょっと見ただけでは気付き難いが、実は図形１と２は合同である。正三角形は半正三角形２つ合わせたものとして得られるが、その合わせ方はそれ自体としてはどう取ってもよいのだが、更に三角形を付けていくとなると全く違った感じを与える。出来上がった図形の中に正三角形があれば、その正三角形のどの頂点から垂線を下ろすかについて３通りの仕方がある。その選び方による感覚の違いが、この気付き難さに現れているのである。図形１を垂線に関して鏡映を取り、正三角形を半正三角形に分ける線の頂点を右下の点に代え、左下の頂点の周りに 120° 回転させると、図形２が得られる（図 71）。

られる六角形を基本図形とするパターン VI_3 を２次の部分パターンとするパターンが得られるが、実は図 69 はそうなっている。図 69 を筆者が思い付いたときは、ともかく帯を作ってみようという方針でやったのだが。

図形４も角度が違うだけで図形１と同じ状態にみえるだろうが、それでは図形４で平たい三角形の左上に乗っている半正三角形をその向きを代えて乗せたものが図形４自身と合同になるだろうか。実はそうして得られたものは図形４と合同ではなく図形８に、即ち面積が３倍の半正三角形になるのである。こうして半正三角形を３つ組み合わせて得られる図形は合同を除いて９通りである。

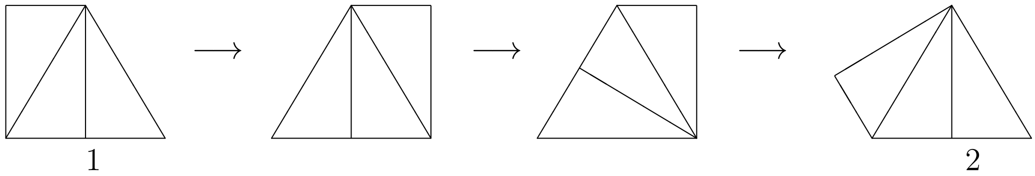


図 71: 半三 III 図の図形１と図形２は組み合わせ図形としては同じ

さて、これら半三 III 図の図形は、直角二等辺三角形の場合と同様、あるパターンの基本図形になるだろうか。図形１、８のときは２つ合わせると辺の長さが $3a, \sqrt{3}a$ の長方形になるし、図形４のときは辺の長さが $a, 3\sqrt{3}a$ の長方形になるし、図形１０のときは辺の長さが $6a, \sqrt{3}a$ の平行四辺形になる。図形６、７、９のときは、直角二等辺三角形の場合と同じ様な仕方で、無限に長い帯を作ればよい。

少し詳しく見ていこう。図形１は長方形になり（図 72 左図)、後はパターン IV_2 にすれば良いのだが、図 72 中図のように等脚台形にも出来る。更に底辺に関して鏡映を取ったものと合わせれば対辺が平行で等しい六角形になって、パターン VI_2 を作ることが出来る。

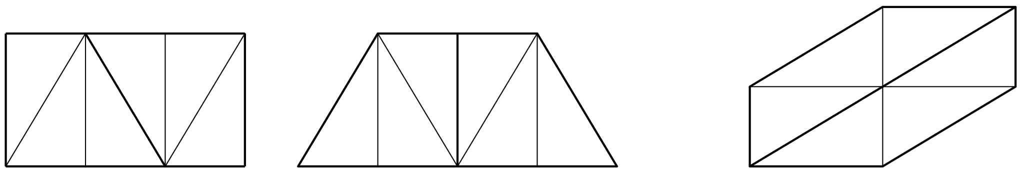


図 72: 半三 III 図の図形１のパターンの２次の部分パターンの基本図形

図形１０も平行四辺形を作ってパターン IV_1 と同様にやればよい。直角二等辺三角形の３つ合わせたものの最初の図形の場合と同じような問題はあるが、そのうちの２つ目のパターンは次のようにも解釈できる。図 72 右図は図形１０を２つ合わせたものだが、この六角形を基本図形としたパターン VI_1 を作ってやると図形１０を基本図形とするパターンとしては同じものになる。

また図形１の底辺の中点に関して 180° 回転して出来る六角形は図 72 右図と同じものになって、作られるパターンを元の半正三角形のパターンと見れば同じものが得られることになる。

図形６、７、９については直角二等辺三角形の場合と全く同じ様に示せるので、平行移動だけで埋め尽くせるような基本図形の候補を図示しておくだけにしよう (図 73)。

さて図形３と５が残っているが、まず図形３について考えてみよう。これも下の図 74 の左の２つの組み合わせなら、右上方向にずらしていけば無限に長い帯が得られることが分かる。右端の組み合わせで得られた六角形もパターン VI_2 と同様

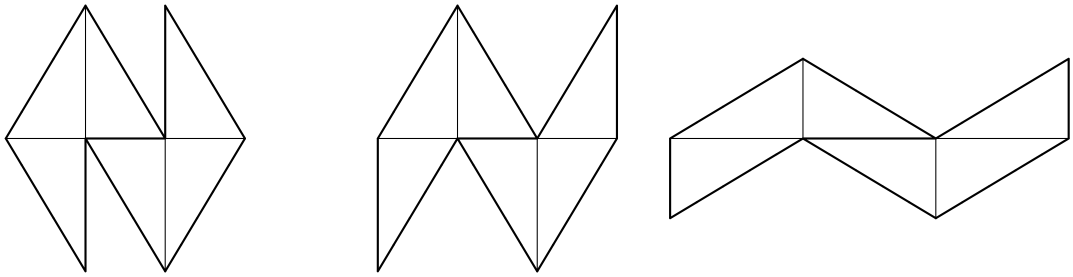


図 73: 半三 III 図の図形６，７，９のパターンの基本図形

なパターンの基本図形になるが、そのパターンは図形３を基本図形とするパターンとしては、上の帯から得られるものと同じである。

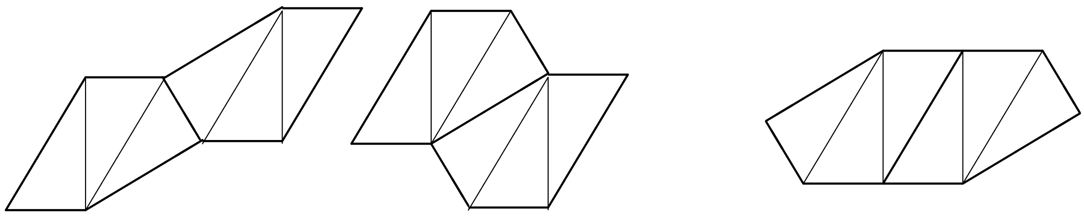


図 74: 半三 III 図の図形３のパターンの基本図形

図形５については、図形５を２つと図形５の鏡映したもの２つを合わせた下の図形を基本図形として（図 75)、平行移動だけでパターンを作ることが出来る。

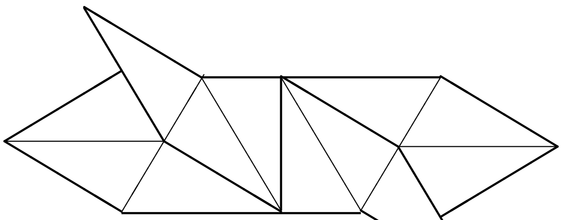


図 75: 半三 III 図の図形５のパターンの基本図形

この図を見ても右上の方向への平行移動ではきちんと納まっていくことが分かっても、もう１つの方向（どの方向？）へ平行移動して納まっていくかどうか心配な人もいるだろう。そこで、この図形を右上と右下へずらして合わせたパターンを図示しておく (図 76)。これなら平面全体のパターンが得られ、対称変換の平行移動の群もどうなるか分かるだろうと思う。

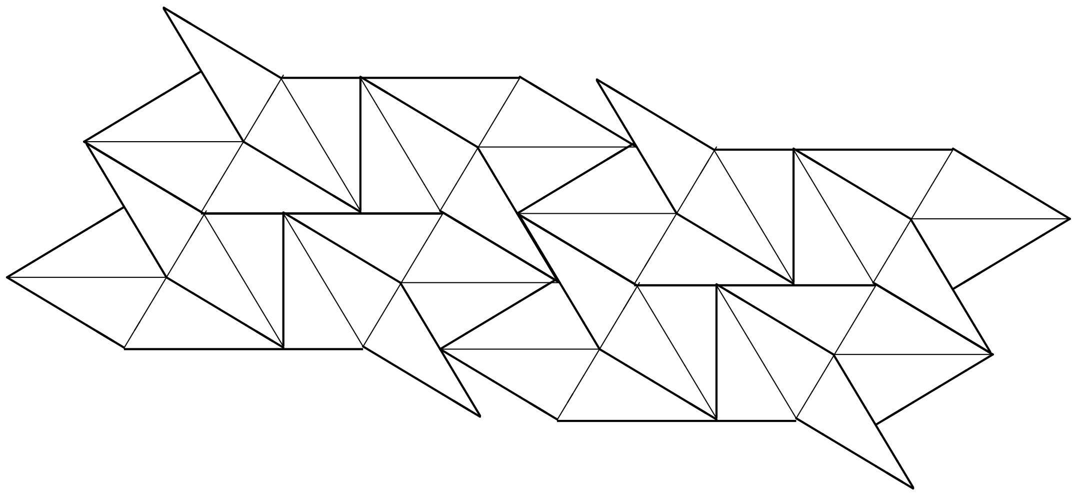
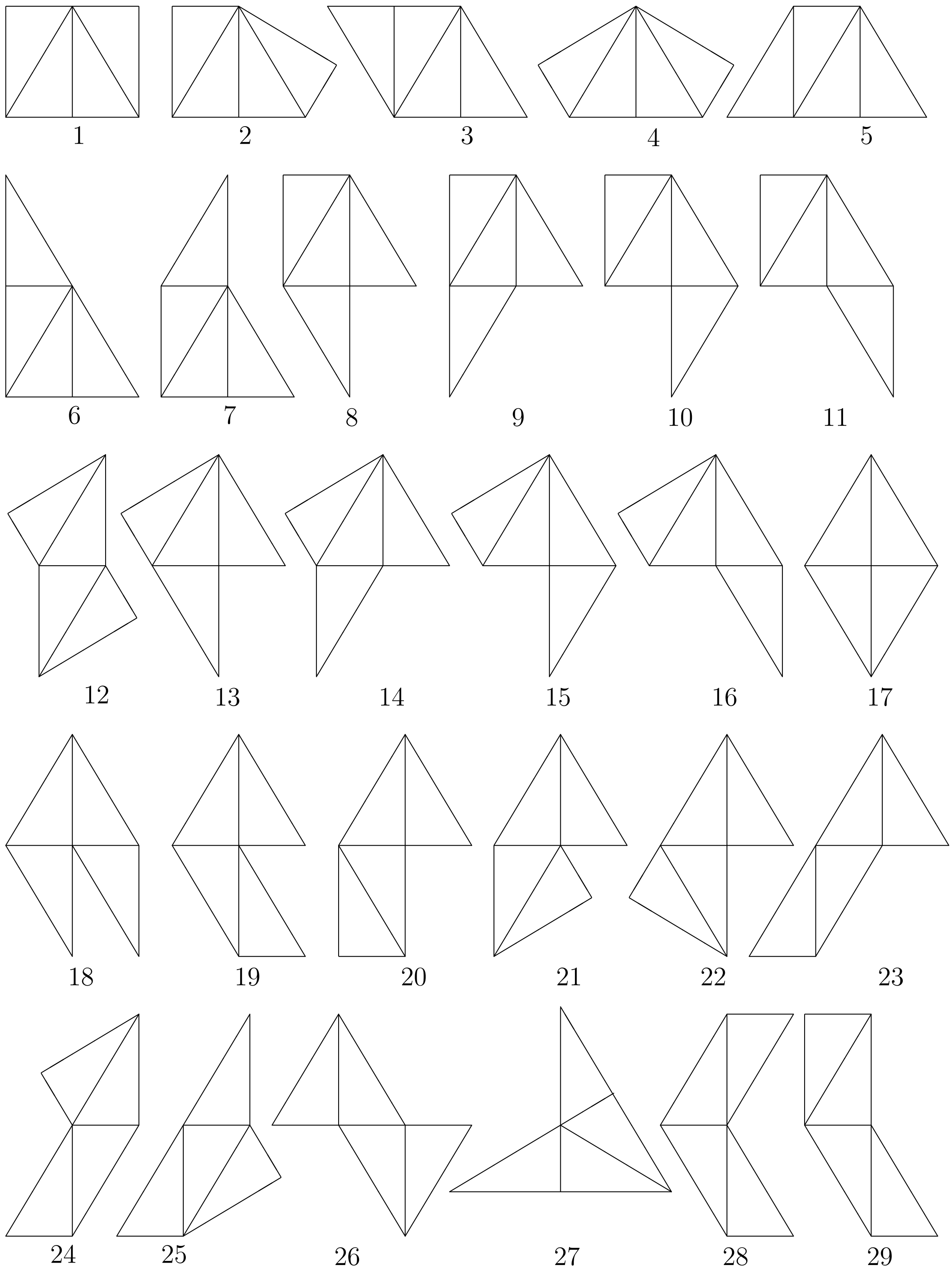


図 76: 半三 III 図の図形５のパターン

半正三角形を四つ合わせた図形は非常に沢山出来る。合同なものを数えないようにしても以下のものが見つかる。



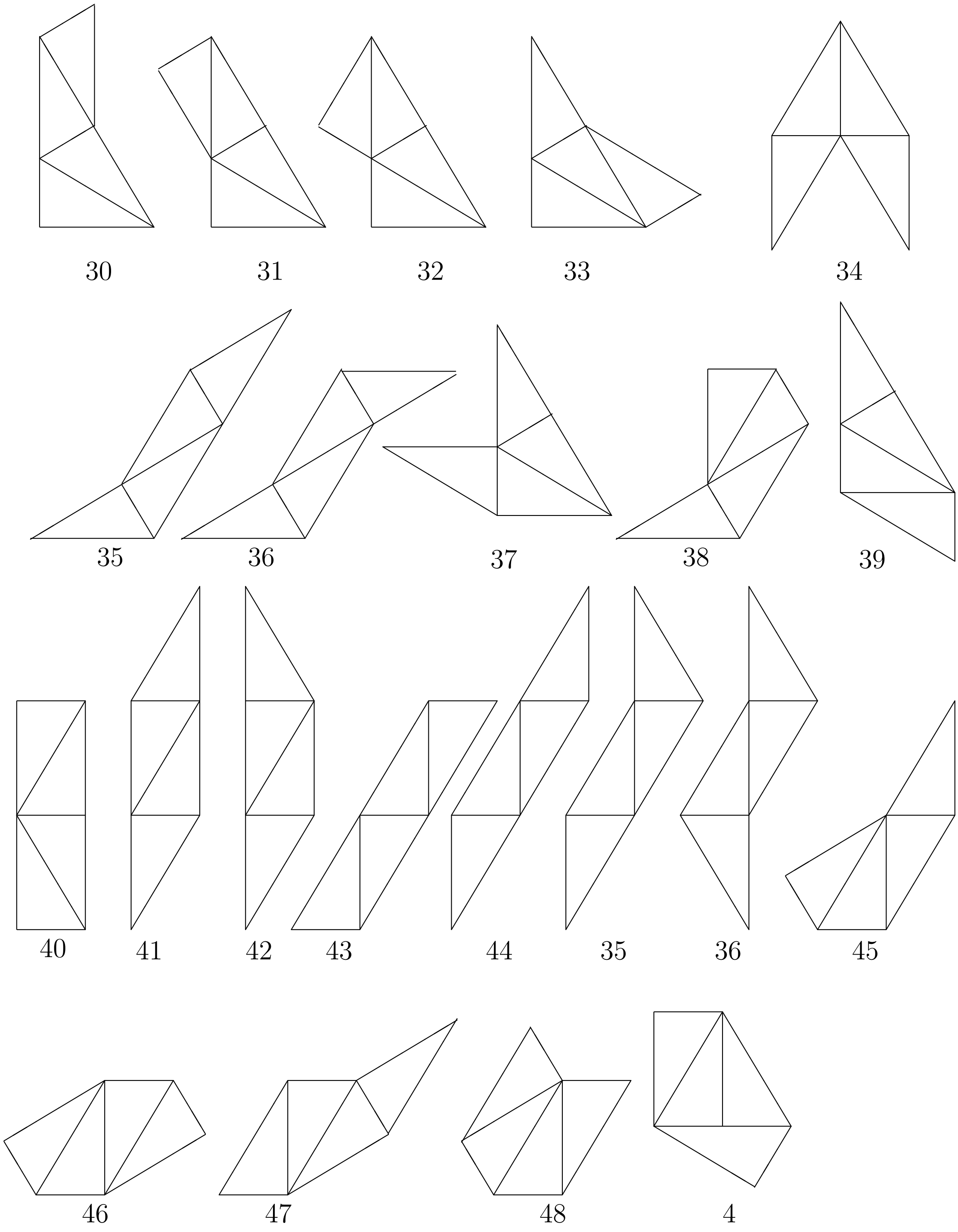


図 77: 四つの半正三角形の組み合わせ図形（半三 IV）

このリストを見て、これから全平面を埋め尽くすパターンを作れるかどうかを調べるのを考えると、もうウンザリしてきた読者も多いだろう。筆者自身も充分にウンザリしている。四つ合わせて出来るあらゆる図形を考え、そのうちどれが互いに合同でないかを調べ、出来るだけ狭い範囲に印刷できるように図形をひっ

くり返したり回したり、更にウンザリするのはこうして得られたリストの番号の付け方に系統だったところがないとか、重なったり足らないとかの非難を受けるのではないかと思うことである。

少し考えて欲しい。二つ合わせた図形は全部で六つの“ 四角形 ”であった ($4 = 3+3-2$)。三角形もあるじゃないかという人もいるだろうが、それは二つの辺が直角でつながっている訳で、三つ目の半正三角形をくっつけるときにはその二つの辺の各々にくっつけることが許されているので、場合の数を考えるときには四角形と思ったほうが良い。このとき作業は、元の半正三角形の辺を一つ選び、その辺にくっつくことの出来る半正三角形の辺は一つだが裏返したものをくっつけると出来た図形が異なる可能性があるので、可能性が $1\times 3\times 2 = 6$ 通りあり、更に実際その六通りが互いに合同でなかったということであった。三つ合わせるときは、このリストの六つの“ 四角形 ”の各辺に対して同じことを考えると、可能性は $6\times 4\times 2 = 48$ 通りである。そして合同なものを除くと９通りの“ 五角形 ”が得られていた ($5 = 4+3-2$)。

それでは四つ合わせるときは $9\times 5\times 2 = 90$ 通りの可能性を調べればよいだろうか。実はそうはいかない。三つ合わせるときのリストで、図形１と２は合同であったが、上の注意によって更に一つくっつける時は違うものだと思わないといけない。四つの時のリストの最初の行の図形４は三つの時の図形２の右肩に半正三角形をくっつけたものだが、最後の行にある図形４は三つの時の図形１の下にくっつけたものになっている。三つの時の図形１の下にこのように付けることが出来るのは、図形１だけ見ていたら気付かないこともある。したがってくっつける元の図形の一部が、一つの正三角形の二辺が外から付けられる状態にあるときは、正三角形の区切り方を変えたものも次の段階の候補を考える時には必要なのである。したがって、可能性はざっと $(9+1)\times 5\times 2 = 100$ 通りである。

それをすべて書き上げて、互いに合同でないものを外していき、綺麗に見える形を探すのである。回したり、ひっくり返したり、時には線の入れ方を変えたり、それはもう大変で、筆者も充分にウンザリしている。

図形３５と３６は７行目と８行目に２回描かれている。それぞれ向き付けが反対で置かれ方が違うので、随分と印象が違うのではないかと思う。見本として描いておいた。

又一般論的には $5+3-2 = 6$ 角形になるはずで、確かにリストを見てもそうなっているようだ。四角形や五角形になるときでも辺の上には合わさって内角の和が 180° になっている頂点が乗っているようだ。しかし最後の行の図形４では、その様な頂点は図形内部に取り込まれてしまっていて外の辺の上には無い。この場合は最少の行の図形４のように線を入れ直せば、“ 六角形 ”になっていると言える。

しかし、図形１７はどうだろうか。どう見ても立派な四角形で、余分な頂点を自然に考えることなど出来そうにない。では何故四角形になったのだろうか。一般に辺と辺を合わせる際には、その合わせる二つの辺が図形内部に吸収されるので $m+n-2$ という計算をすることになるのだが、またしても偶然にだが、一組の

辺を合わせるとき同時に他の辺も合ってしまうということが起こり得たのであった。したがって今の場合 $5+3-2\times 2=4$ という計算になるのである。

ウンザリはしているが、しかし楽しくもあった。楽しさを感じないでは、これだけ面倒なことをやり抜くことは難しい。翻って考えてみれば、数学の学習や研究にはこうしたことが不可避である。

“ ウンザリしたが楽しかった。楽しかったがウンザリである。”

状況として似ているようにみえるが、教育の効果としては雲泥の差がある。一見如何に楽しそうにみえる授業であっても、多くの児童・生徒に厭かれるようではいけないし、煩雑で面倒くさそうなことでも児童・生徒が楽しんでやるようなら外部の非難を気にする必要はない。しかし、性格も能力も様々な児童・生徒すべてが同時に楽しいと感じられるように授業を行うことは現実には至難の業であろう。

それでも敢えて言いたい。教育とは本来、教育を受ける者が教育期間を過ぎた後に直面する困難を、教師の助けのない状況で、克服する能力を養うことである。だからこそ、教師の助けを受けられる状況では、自分の力で自分の能力以上の障壁を乗り越える経験を積ませる必要があるのだ。

そうした障壁が児童・生徒が社会に出て実際的具体的に出会う障壁である必要はない。不必要なばかりでなく無意味だったり不適切なことさえある。その理由を議論しはじめると、初等教育で教えるべき内容はどうあるべきか、またなぜ算数・数学を教えるのかという深く且つ異論の百出する問題に踏み込むことになるので、この点は稿を改めて行うことにしたい。ただ問題には、児童・生徒の側からと教える側からとの二面性があることにだけは注意しておくことにする。

さてウンザリしたから、というよりこれ以上同じことをしても読者をウンザリさせるばかりだから、四つ合わせて得られたこれら４８種類の図形が、平面を埋め尽くすパターンの基本図形になるかどうかという問題を議論するのは止めておこう。熱心な読者がどうしても知りたいという要望を筆者に伝えてくるようなことが起きれば、その時にはまた考えることにしよう。

ところで１００の可能な図形がこの４８の図形のどれかに合同であるのは実際に合同であることを確かめれば済むことだが、４８の図形が互いに合同でないことは見ているだけでは心配になってくるだろう。それではどうしたらそれを確かめられるだろうか。色々な方法が考えられるだろうし、児童・生徒に考えさせてみれば面白い提案が出てくるかも知れない。実際に実験授業をしてみると面白いだろう。

ここでは紙数の都合もあるし、面白くはないかもしれないが一つも解答を与えておこう。現代数学の言葉遣いで言えば、これらの図形を特徴付ける不変量を得ればよい。といって余り次元を多くしたのでは煩雑になる。何事も程々がよい。

問題にしている図形は一般に六角形であり、合同であれば、何が変わらないだろうかと考えてみる。辺の長さや角の大きさ、更にはそれらの繋がり具合は変わらないだろう。今は半正三角形四つ合わせたのだから面積が $2\sqrt{3}a^2$ と決まってい

る。従って相似であれば合同である。

三角形の時のことを考えれば角度さえ合えば相似になる。そこで、出来た図形が何角形であるか、内角をすべて（何角形でもすべて“ 六角形 ”であると考えて６つの内角)、最後に印としての図形番号があれば図形を区別できるだろうと考えることにして、次の表を作った。

表の読み方を説明しておこう。表の各項 $(N;\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6:n)$ の N は N 角形になったということであり、n は図形番号である。次の六つの角度の並べ方は唯単に大きい順番に並べるのでは、合同でなくても角度の並びが同じになるものが沢山あることがすぐに分かる。そこで一番大きな角度のものを一番目に置く。後は辺に沿って（図形の上で）並んでいる順に書く (θ_1 とする)。裏返すこともあるので、回っていく二通りの方向のうちどちらかを選ばないといけない。方向によって、次に来る角度の候補が二つあるが、大きいほうの方向を選ぶことにした。二つ目はどちらも同じになることもあるので、その時は三つ目も比較して大きくなる方向を選んだ。これで角度を並べる方向は決まる。

図形１７だけは“ 六角形 ”というわけにはいかないので、四角形として処理したが、他は“ 六角形 ”で、例えば $N=5$ の時は一つの内角が 180° であるということであり、$N=3$ のときは三つの内角が 180° であるということである。

(3;180,90,180,30,180,60:6)	(4;120,60,120,60:17)	(4;180,90,90,180,90,90:1)
(4;180,90,90,180,90,90:40)	(4;180,120,60,180,120,60:3)	(4;180,120,60,180,120,60:43)
(4;180,150,30,180,150,30:41)	(4;180,150,30,180,150,30:44)	(4;180,150,60,120,180,30:39)
(4;180,180,30,150,150,30:42)	(4;180,180,60,120,120,60:5)	(4;240,30,180,60,180,30:27)
(5;180,90,90,150,90,120:2)	(5;180,120,90,120,90,120:4)	(5;210,60,120,180,90,60:30)
(5;210,60,150,90,180,30:33)	(5;210,60,180,90,150,30:7)	(5;210,90,90,180,60,90:31)
(5;210,90,150,60,180,30:25)	(5;240,90,60,180,60,90:32)	(5;270,30,180,60,150,30:37)
(5;270,60,90,90,180,30:13)	(5;270,60,90,180,60,60:22)	(6;120,120,90,120,120,60:46)
(6;210,90,60,210,90,60:12)	(6;210,90,90,150,120,60:29)	(6;210,90,120,120,150,30:45)
(6;210,120,30,210,120,30:36)	(6;210,120,60,150,150,30:47)	(6;210,150,30,180,120,30:35)
(6;240,60,60,210,60,60:26)	(6;240,60,90,90,210,30:14)	(6;240,60,120,90,180,30:9)
(6;240,60,120,120,120,60:28)	(6;240,60,120,120,120,60:48)	(6;240,90,60,150,120,60:24)
(6;240,90,90,120,150,30:11)	(6;240,90,120,120,120,30:38)	(6;240,120,60,180,60,60:23)
(6;240,120,90,90,150,30:16)	(6;270,60,120,90,150,30:8)	(6;270,90,90,120,120,30:10)
(6;270,90,90,150,60,60:20)	(6;270,120,90,90,120,30:15)	(6;300,30,150,60,150,30:34)
(6;300,60,120,120,60,60:19)	(6;300,90,60,150,60,60:21)	(6;330,30,150,60,120,30:18)

辞書式順序に並んでいるので順に二つずつ比べていけば良い。これが違えば相似でなくしたがって合同でもない。順に見ていくと図形番号で１と４０、３と４３、４１と４４、２８と４８の４組以外は互いに異なっており、従って相似ではない。そしてこの４組も図形を見れば合同でないことはすぐに分かる。それで４８種類の図形はすべて互いに合同でないと結論付けてもよいのだが、せっかく表

を書いたのだからもう少しこの線に沿って議論してみよう。

順序を込めて内角が等しくても相似でないことが四角形以上では起こるのだということである。三角形の時の相似条件に内角が等しいことという条件があったが、これが成り立つのは三角形に特有なことなのだ。相似の定義そのものには辺の比も一定であることがあったので、辺の長さを見てみよう。図形１と４０の場合、最大の角 180° と次の角 90° を結ぶ辺の長さは a と $\sqrt{3}a$ であり、合同にはなれない。他の組み合わせの時も、a と $2a$ であったり、$\sqrt{3}a$ と $2a$ であったりなどして互いに合同でないことが分かる。

この４８種類の図形を区別する不変量には、上の表の角度だけでなく、最大の角と次の角を結ぶ線分の長さを取れば良かったということになる。あくまで相似にこだわりたければ、最大の角と次の角を結ぶ辺の長さそのものよりも、その長さと２番目と３番目の角を結ぶ辺の長さとの比を取った方が良いかも知れない。どちらでも不変量になることは変わらない。

さて三角定規をいう身近な教材を用いてこれまでやって来たことは、非常に単純な図形、いまは直角二等辺三角形と半正三角形からほんの少し組み合わせてやるだけで多様な対称性を持つ多様な図形が得られるということを示すということであった。

これまでに挙げた図形だけでも、更に色々な問題を考えることが出来る。

四つ以上くっつけたらどうなるか。

パターンを考えるとき、元の図形を裏返してはいけないことにするとどうなるか。

三角定規は直角二等辺三角形の斜辺と半正三角形の斜辺でない辺の内長い方と長さが等しく作られているので、この辺をくっつけて良いことにしたらどうなるか。一つずつくっつけたものは一通りしかなく一般の四角形としてのパターンが作れる。m 個の直角二等辺三角形と n 個の半正三角形で出来る図形の合同類やその各々がパターンを作れるかなどの問題はかなり難しいが、やり方次第では面白いかも知れない。

また幾つかくっつけて出来た図形の中に元の定規の三角形と相似なものが得られることがある。直角二等辺三角形の場合は、面積が２倍のもの、４倍のもの、８倍のものなどがあるし、半正三角形の場合は３倍のもの、４倍のものなどがある。これから発展して、くっつけて出来る図形の中には面積が何倍の三角形があるのか、またあり得るのかという問題も考えられる。例えば直角二等辺三角形の時に３倍の図形が得られないということが、$\sqrt{3}$ が無理数であることに関係しているのだが、あからさまにピタゴラスの定理を述べ無理数を導入しなくても、自然に有理数以外の数の存在に導くことも出来るかも知れないし、少なくとも存在を感じさせることは出来るかも知れない。

問題を次々に考えることが出来ること、更に児童・生徒に問題自体を考えさせ、自分達の問題を自分達で解くという作業を行うことが出来るというのが、敢えて三角定規の教材としての価値を見直す提案をする理由の一つである。

5.4 角度とは何か

??? 角度の定義にも対称性が隠れている。 ???

三角定規の二つの三角形は、$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の角度を持っていた。ところで、この角度というのは一体何だったのだろうか。

この項，書き掛け.

6 立体図形における直観と対称性

6.1 エイダの怒りと幾何学者の嘆き

筆者を嘆かせた問題との出会いについて述べよう。

> アーサー・C・クラーク著「グランド・バンクスの幻影」(Arthur C.Clarke: The Ghost of the Grand Banks,1990)、山高昭訳、早川書房、１９９２年

という本がある。１９１２年４月１４日氷山に衝突して大西洋に沈んだ豪華客船タイタニック号を浮上させるというアイデアを追求したＳＦである。クラークという人のＳＦは比較的に理知的で、あまり荒唐無稽なものは扱われない。状況と条件を設定したら後は論理的にと言ってもいいようなストーリー展開で、それがうまく行っている部分は非常に面白く感じられるのだが、最近は年齢の所為か気力が最後まで続かず展開に無理が感じられるようなこともある。

それはさておき、タイタニック号を引き上げるのに協力するコンピュータ学者の夫婦の一人娘エイダの天才を際立たせる挿話として問題が提出される。夫婦はそれぞれ極めて高く評価される国際的な学者で、数学的才能にも恵まれ、その一人娘はコンピュータ創世記に燦然と光り輝く、詩人バイロンの娘レディ・ラブレイスの名前 (エイダ=Ada は高級コンピュータ言語の名前にもなっている) を付けられた (親の過度の期待)。エイダが６才になる頃には、夫妻の友人たちが「２項定理ぐらいは発見しても良さそうだが」と冗談を言うほどに期待されたが、一向に数学的才能を発揮しない。成績も全Ａを取るのは絵画・粘土細工だけで、算数はＤという成績で、母親の嘆きは娘がそんな成績も気にしていないことに更に深まっていた。父親は娘が幸せである程度の成績をとっていれば今は充分で芸術家になるかも知れないと考えていたが、母親はあくまでも天才型の子供にさせたいと思っていた。

エイダが９才になったある日、学校から帰され泣きながら両親の部屋に入ってくる。校長の手紙によれば、不服従の罪で停学にするとのこと。手紙に添付された標準的（と彼らがいう）視覚テストをした。２０題中１９問題を解いたのに、極めて簡単（だと教師側が思った）問題を間違えた。その問題を間違ったのはエイダだけで、悪いことに、間違いだと指摘してもエイダは間違っていることをきっぱりと否定したのである。印刷した答えを見せても、間違いを認めず他のみんなが間違っていると主張した。クラスの規律を守るために停学処分にしたが、親から良く言い聞かせてやってくれという内容であった。

アメリカでは公教育があまり信頼されていないというせいでもあるのか、この学校は私立なのであろうが、それにしてもアメリカの学校の校長はすごい権限を持っているものだと感心してしまった。それはともかく、父親は娘を納得させるために厚紙で図形を作ろうとする。母親は、父親のしようとすることは対症療法で、病気の原因ではないので、自分が正しいと言い張る理由を突き止めるために

は、精神科医に診てもらうべきだとまで言う。アメリカが病んでいる所為なのか、両親が過度に知的で良心的な対応をしていると言うべきなのかは分からない。

さて問題を説明しておこう。二つの小問に分かれていて、

1. 二つの同じ正四面体があります。側面は全部で八つあるが、二つの面を選んで合わせて得られる立体には面が幾つあるか？

2. 辺の長さが等しい正四面体とピラミッドがある。ピラミッドは底面が正方形で側面は正三角形である。両方の立体の面は合わせて九つある。三角形の面を合わせて得られる立体には面が幾つあるか？

というものである。美しく着色された図形があるというのだから、問題には下のような図に色刷りされてでもあるのだろう。

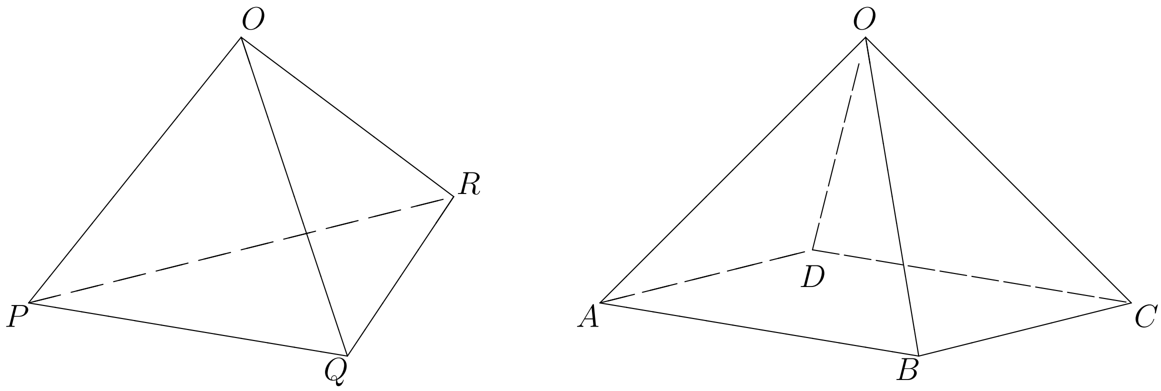


図 78: 正四面体とピラミッド

最初の問は易しい。二つの面を合わせて新しい立体を得ようとすれば、その二つの面は消えて、$4+4-2=6$、と面の数は 6 になる。エイダだって間違えはしない。

しかしそれなら、二つ目の問だって易しい。面が減るのは合わせた二面なのだから、$4+5-2=7$、と面の数が 7 になる筈だ。皆そう思う。印刷物を見せたとあるから、出題者もそう思い、学校の先生もそう思い、数学的才能が豊かだと自負のあるエイダの両親もそう思う。

しかし、エイダはそうは思わない。誰がどのように説得しても納得しない。

父親は厚紙で作った正四面体とピラミッドをそれぞれ掌の上に乗せて回してみる。それを見ていてもやはり、面の数は 7 になるとしか考えられない。母親に対して娘の行状を嘆きながら、二つの立体を合わせてみる。父親は、言葉を無くし、茫然とその立体を見る。面の数は 5 しかないのだ。

“ 確かに 5 面になる。それでも頭の中に思い浮かべることは出来ない。”エイダを呼び、この立体を見せながら、娘に尋ねる。“ 何故こうなるって分かったんだい？ ”

エイダは、父親が何故興奮しているのか、いぶかしげに答える。“ だって、ほかにはなりようがないんだもの。”

父親は、図形認識においてラマヌジャンにも匹敵する天才を目の当たりにしていると悟り、夫婦とも大いに喜ぶことになる。

筆者はこのエピソードを読んだとき、本当だとは思えなかった。ＳＦゆえの、興味本位のでっち上げかとも思った。しかし、作者のクラークという人の性格から、満更嘘でもあるまいという気もした。どっちつかずに思いながら、少し考えてみた。どうしてもエイダの言うようにはなりそうな感じがしない。ならないとも言えないが、なるという根拠が見つかりそうにない。

その日たまたま大学に出かけ、二三の同僚にこの問題を話してみた。“ どうなりそうに思う？　七つじゃないって気がするかい？　”

皆面倒くさいのか、分からないのか、“ わからんな ”としか言わない。

模型を作ればはっきりするのは分かっているが、不精者の筆者はもう一人訊いてからにしようと、幾何学者Ｔ氏の研究室に向かった。

“ どう思う？七つじゃない、なんて起こりそうに思えるかな？”

“ んーん、分からんな。”

筆者は面倒臭くなってしまった。“ 良いよ。成り立たない！七つに決まってる！証明してしまえばいいんだ。”と言って、黒板で証明を始めることにした。

上の図でその証明を再現しよう。表面に現れる三角形はすべて長さが等しい正三角形だから合同で、どれとどれを合わせても同じだから、$\triangle OQR$ を $\triangle OAD$ に重ね合わせることにしよう。面の数が７つでなくなることがあるとすれば、何処かの面と面が同じ平面内にあることにならねばならないが、今の図では $\triangle OPQ$ の面と $\triangle OAB$ が同じ面をなす以外には考えられない。正四面体 $OPQR$ もピラミッド $OABCD$ も対称面を持っており、上のように面を合わせれば同じ面になる対称面がある。正四面体 $OPQR$ では、頂点 O から底面 PQR への垂線と、頂点 P から底辺 QR への垂線を含む平面であり、ピラミッド $OABCD$ では頂点 O から底面 $ABCD$ への垂線と、AD の中点と BC の中点を結ぶ直線を含む平面である。従って合わさった立体もこの平面に関して対称である。

それゆえ、$\triangle OPQ$ と $\triangle OAB$ が同じ面をなすのなら、$\triangle OPR$ と $\triangle ODC$ が同じ面をなすことになる。

正四面体をなすのだから、$\triangle OPQ$ と $\triangle OPR$ のなす面は直線 OP で交わっている。それゆえ、$\triangle OAB$ と $\triangle ODC$ のなす面は直線 OP で交わっていることになる。

今度はピラミッドのもう一つの面対称を使う。ピラミッド $OABCD$ は、頂点 O から底面 $ABCD$ への垂線と、AB の中点と CD の中点を結ぶ直線を含む平面に関して対称である。

従って、$\triangle OAB$ と $\triangle ODC$ のなす面は $\triangle OQR$ を $\triangle OBC$ に重ね合わせたとしたときの線分 OP で交わることになる。区別するためこの線分を OP' を書くことにしよう。線分 OP の上の面に関する対称像である。

$\triangle OPQ$ と $\triangle OPR$ のなす面は直線 OP と OP' で交わっている。二つの平面が二本の直線で交わっていれば、元々同じ平面でなければならない。ピラミッドの向かい合う側面が同じ面であるはずはないので矛盾である。これは正四面体とピラミッドの面を重ね合わせたとき、どこかの面が一致すると仮定したことによるのだから、面が偶然一致することは有り得ない。よって、面の数は 7 であり、クラーク氏はでっち上げを行った。

極めて明快な証明で、証明した筆者自身が圧倒される思いであった。証明できちゃって良いのかなとも思ったが、すっきりもした。T 氏と苦笑いを交わして、“ 困ったね ”と言いながら彼の研究室を出た。

ドアを閉めた瞬間、“ あれっ、証明にギャップがあるぞ ”と気付いた。上の証明で本質的に使われていることは、二本の直線が平面を定めるということだ。しかし、より厳密にいうと、二本の一点で交わる直線か、二本の平行線（無限遠点でだけ交わっていると思ってよい）は、それを含む平面を一意的に定めるということになる。

上の例でいうと、対称面は確かに直交する二本の直線で指定してあるので良いが、直線 OP と OP' は点 O で交わるのだが本当に二本なのかは確かめられていないのである。これが一本であったら、つまり、OP の延長上に点 P' があったら、上の証明は成り立たない。POP' が一本の直線ということは、この直線が底面 $ABCD$ に平行だということになるのだが、そうなるように思わなかったが、そうなっても良いかも知れない。なっても不思議はないな。

ここまでくれば、逆にそうなることを証明できるかもしれないと思うし、証明してみようとも思う。やってみれば、易しい証明があるのだ。

あーあ、俺は幾何学者だったのかという嘆きが口をつき、エイダの涙が不条理な社会に対する怒りだったことに気が付く。クラークさん、ごめんなさい、である。

空間的な幾何的直観は天性のものか、それともその種の教育が為されて来なかった所為なのか？

6.2 証明に向かって（誤った直観をねじ伏せるために）

今では筆者の直観がリセットされているので簡単に証明できるのだが、証明しようと思い立ったときにはまだまだ誤った直観が証明の邪魔をした。そんなときは、むしろできるだけ論理的にやるのが良い。論理的に押せるだけ押す。論理で押せなくなって初めて翔ぶことにするのだ。押せるだけ押せたなら、翔ぶ必要もなく、問題が明白になることが多い。しかし、なかなか押せるだけ押せるものではない。失敗の予感が押せる限界まで押させないようにするのだ。

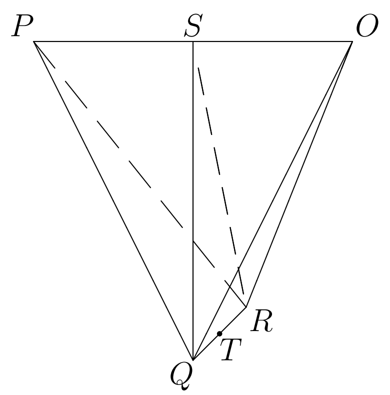
さあ、使うことは平面幾何の簡単な事実だけに限定して、論理で押せるだけ押してみることにしよう。

正四面体 $OPQR$ とピラミッド $OABCD$ を $\triangle OQR$ と $\triangle OAB$ の面を合わせた立体を考えるのであった。頭の中で一度に面をくっつけるのでなく、順を追って面

を合わせるまでの過程を考えて見ることにしよう。

まず、ピラミッド $OABCD$ の底面を基準の平面（水平面と呼ぶことにしよう）とすることにし、正四面体 $OPQR$ を QR でこの平面の上に立てて、OP の中点 S と QR の中点 T を結ぶ線 ST が水平面に垂直になるようにしよう（図 79 左図)。正四面体 $OPQR$ を、QR や水平面との位置関係を変えないまま滑らすように動かしていき、$\triangle OQR$ が $\triangle OAB$ にぴったりと合うのなら、OP が水平面に平行であることになる。正四面体 $OPQR$ の向きを変えるだけでかなり直観の抵抗が減ったのを筆者は感じる。もう証明しなくても、エイダの正しいことが納得できそうな気がしてきた。

しかし、そうなる保証はないのだから、今は出来るだけ厳格にやろう。まず QR を水平面の上をずらしていき、AD に合わせることにする。そのとき、$\triangle OQR$ が $\triangle OAB$ にぴったりと合っているかどうか分からないので、正四面体 $OPQR$ を直線 $QR = AD$ の周りに回転させて、$\triangle OQR$ と $\triangle OAB$ を合わせるようにする（図 79 右図)。この立体を仮に X とでも呼んでおこう。このとき、直線 OP が水平面に平行であるかどうかが問題である。



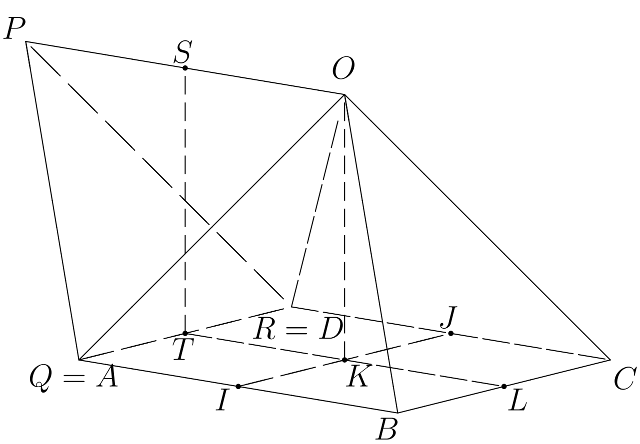


図 79: 正四面体とピラミッド (OP は水平か？)

直線 OP と点 T を含む平面、即ち $\triangle OPT$ の定める平面は正四面体 $OPQR$ の対称面になっており、立体 X ではこの平面は BC の中点 L をも通っており、ピラミッド $OABCD$ との切り口は $\triangle OTL$ となり、ピラミッド $OABCD$ の対称面にもなっている。この平面が水平面と垂直であることを注意して、この平面と立体 X との切り口を見てみよう（図 80)。

正四面体 $OPQR$ とピラミッド $OABCD$ の各辺の長さはすべて等しかった。この長さを a としよう。切り口として得られる四角形 $OPTL$ は平行四辺形になる。なぜなら、各対辺の長さが等しいからである。

念のために対辺の長さが等しいことの証明もしておこう。

$OP = a = AB = TL$ であり、$PT = OL = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ である。前者は辺そのものであり、後者は正三角形の頂点から対辺への垂線の長さであり、ピタゴラスの定理を使えばすぐに分かる ($\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$)。ピタゴラスの定理を知らなくても、辺の長さの等しい正三角形 $\triangle PQR$ と $\triangle OBC$ は合同であり、重ね合わせれば、点 T と点 L が重なり、したがって、線分 PT と OL は重なることからも分かる。

更に言うなら、$\triangle TOP$ と $\triangle OTL$ に於いて、$TO = OT, OP = TL, PT = LO$ の対応する三辺が等しいので、二つの三角形は合同であり、対応する角も等しい。特に、$\angle POT = \angle LTO$ であり、これは二直線 PO と LT の直線 OT に関する錯角が等しいことを意味しており、この二直線 PO と LT は平行であることになる。

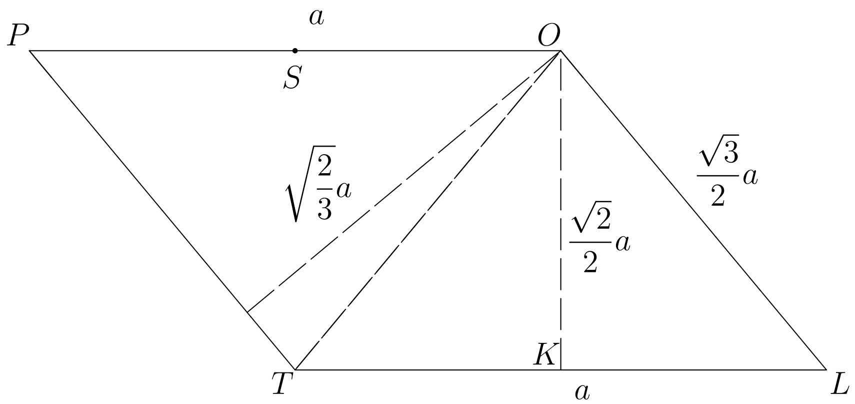


図 80: OP 断面

やっと、直線 OP が水平面に平行（水平）であることが証明できたが、これで直観の歪みが取り除かれて、水平であることが納得されるだろうか？

そういう人もいるだろうが、多くの人は、証明を得ただけではなかなかそれまでの直観は改められない。直観が歪んだ心理的な理由を考えてみれば、もしかすると旨くいくかも知れないが、それは何なのだろう。

実は正四面体とピラミッドを素直に描いただけのような図 78 にもその原因が現れている。実際には正四面体やピラミッドの投影図としては決して出来ないような形ではあるのだが、それぞれ単独で見ればその投影図だとして何の違和感も感じないだろう。立体の投影図を実際に幾つも描いたことがあれば、違和感を感じる読者もいるだろうが。

しかし一般には、あまり正確にある角度からの投影図を描くと、却ってその立体に見えないことがあるのである。見る角度によって、得られる投影図は全く印象の異なることがあるのである。その幾つかの角度からの投影図での特徴を混在させて描いた方が、元の立体を想像させやすくすることがあるのである。実際に教師が黒板で描く図や、教科書などの図にも結構こういう図が多いのである。（こ

れを一概に悪いと言っているのではない。教育的効果を考えれば止むを得ない場合もその方が良いという場合もあるだろう。）ある意味で、これが立体の直観が育たない理由の一つなのだ。

こんな図を容認するようじゃ幾何をやってるのじゃなく、ピカソばりの抽象画の世界じゃないかという非難をしたくなるかも知れない。だから証明するのは直観だけでなく、きちんと論理的にやらねばならないのだ。

上の正四面体とピラミッドの図 78 でも、各辺の長さが同じだとか、角度がどうなっているかさえ間違えずにいられたら、少々図がまずくても何の問題もないことが多い。しかし今はこの二つの立体を合わさないといけないので、同時にこの二つの立体を見ることになるのだが、$\triangle PQR$ も水平面上に置く限り、同時にこのように見える角度は実はないのである。ここでも少し、ピカソだったのだ。

この図 78 を見ていると、$\triangle OQR$ は回転軸 QR の周りにかなり回さないと $\triangle OAD$ に重なりそうになく思え、OP は O から見て水平よりも高くなっていくように見える。

また図 78 では二つの立体の高さは同じように見えるだろうが、多少とも立体図形のことに詳しい人は、正四面体の高さの方がピラミッドの高さよりも高いことを知っている。

折角証明のための図 80 があるのだから、この高さを求めておこう。ピラミッド $OABCD$ の高さは、頂点 O から水平面への垂線の長さだが、これは線分 OK として実現されている。ピタゴラスの定理より、

$$OK = \sqrt{OL^2 - KL^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

となる。

また正四面体 $OPQR$ の高さは頂点 O から水平面への垂線の長さだが、これは O から PT への垂線として実現されている。この長さを仮に h とする。平行四辺形 $OPTL$ の面積を二通りに表わすと、$\frac{\sqrt{3}}{2}ah = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ となり、従って、$h = \sqrt{\frac{2}{3}}a$ となる。

正四面体の方がピラミッドよりかなり背が高く、尖った感じにならないといけない。この感じからいくと、OP は O から見て水平よりも低くなっていくように感じる。（かなり高いなどと曖昧なことを言わなくても、$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍高いと言えばよいのだが、$\frac{4}{3}$ 倍は分かってもその平方根倍という感覚はなかなか掴みにくいものだ。）

こうなると、この二つの感じ方のどちらが正しいだろうかという疑問は自然に感じられても、そのどちらでもないかも知れないとはなかなか思いにくいものなのだ。直線 OP が水平であるという直観は、そうなるという何等かの保証がないと、働かなくても不思議はない。

三角形の合同定理は何かを証明するのには良くても、納得させるのには適していないこともある。それでは、OP が水平であることの、三角形の合同定理をあからさまには使わない証明をしてみよう。

図 79 の左図で、正四面体 $OPQR$ を QR で水平面に立てて、ST が水平面に垂直になるようにした。そのとき、OP は水平で、水平面からの高さは ST そのものである。ST は $\triangle SQR$ の頂点 S から底辺 QR への垂線であり、$SQ = SR = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, QR = a$ であることから、OK に対する計算と同じ計算で、$ST = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ であることが分かり、従って $OK = ST$ である。

さて上の図 80 に戻り、四角形 $OKTS$ を考えることにする。OK は水平面への垂線だから、$\angle OKT =$ 直角 であることが分かっている。今、$OK = ST$ が分かったのだから、この四角形 $OKTS$ は長方形である、という証明では実はいけない。証明としてはいけないのだが、こう理解できたらその感覚の方が納得しやすいだろう。

何故証明としてはいけないのかというと、$\angle STK =$ 直角 であることが先に分かるわけではないからである。図 79 の左図で ST は水平面に垂直だから、水平面上のすべての直線と直角に交わり、特に $\angle STQ =$ 直角である。しかし、正四面体 $OPQR$ をピラミッド $OABCD$ にくっつけるとき、直線 QR を軸に回転しているかも知れない（していないことが証明したかったことである）ので、QR 以外の直線とは直角に交わっている保証がないのである。

長方形であることの証明自体は簡単である。$OS = \dfrac{a}{2} = TK$ も言えるので、四角形 $OKTS$ は平行四辺形であり、一つの内角が直角なので、長方形である。

四角形 $OKTS$ が長方形であることも証明できた。ST と OK は水平面に垂直で、長さが等しいのだから、OP は水平である。これならかなり、直観が宥められるのではないかと思う。

直観が宥められたと言っても、立体 X が五面であることが証明出来たわけではない。直線 OP が水平だからといって、$\triangle OPQ$ と $\triangle OAB$ が直線 OQ の所で折れ曲がっていないということが示せてはいないのだ。

6.3　ガチガチの証明と面角

三次元の空間の中で二つの平面が取りうる位置関係は、大きく分けて三つある。交わらないか、交わりが直線であるか、交わりが平面つまり二つの平面が同じであるかである。

交わらない場合は二つの平面の間の距離が考えられるし、交わる場合にはその交わる度合が角度の形で与えられるだろう。この角はもちろん二直線の間の角度でもなく、立体角でもない。これは面角と呼ばれている。

まず面角の定義を与えておこう。平面αとβが直線ℓで交わっているとしよう。（交わらないときはその面角は0とすることにする。）交線ℓ上に任意に点Oを取り、平面α上にOを通り直線ℓに垂直な直線OPを引く。平面β上にもℓへの垂線OQを引く。二直線OPとOQの成す角の大きさθを二平面αとβの作る**面角**の大きさという。勿論、二直線OPとOQが平面を定め、この平面上で二直線の角度を測るのである (図 81)。5.4 節でも述べたように、二直線間の角度は二つ値を取りうる。つまりθに対して$\pi-\theta$も取り得る（鋭角と鈍角に当たる）のだが、特に断らない限り、直角でなければ鋭角の方を選ぶことに約束しておく。

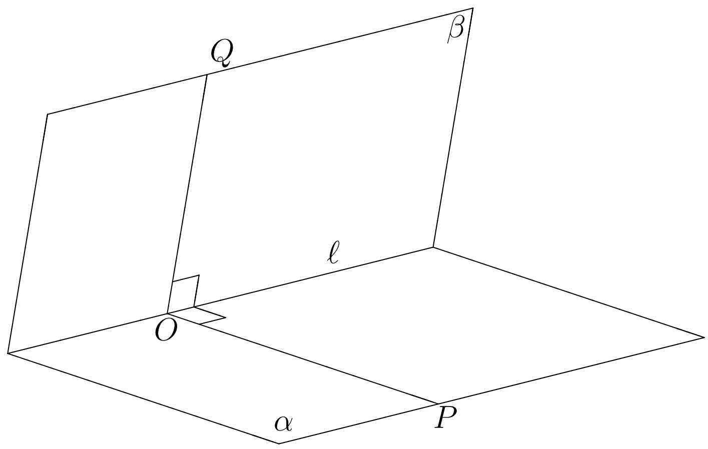


図 81: 面角の定義

面角が二つの平面だけで定まる量だということ、更に 2 平面の交わる度合であると言ってよいことを納得するための議論は証明の後でやってみることにして、ここではまず必要な議論だけをしておく。

面角の大きさθが0°や180°のときは 2 平面αとβは一致するし、$\theta=90^\circ$のときは 2 平面αとβは直交するという。直交するとき、平面α上の任意の直線はOQと垂直で、平面β上の任意の直線はOPと垂直であることになる。

ここではガチガチの証明をすることにしよう。一目で分かる直観的な証明もあるが、それは次の 6.4 節で述べる。

$\triangle OPQ$ と $\triangle OAB$ 同じ面をなすことを示すには、直接的に $\triangle OPQ$ の面と $\triangle OAB$ の面との面角が $180°$ であることを示す**方針 I** と、$\triangle OPQ$ の面と $\triangle OAB$ の面の水平面との面角が等しいことを示す**方針 II** の二つがある。

まず方針 I で示してみよう。図 79 の立体 X を見てみよう。交線 $OQ = OA$ 上に適当な点を選ばねばならないが、対称性から線分 OQ の中点 H を取るのがよいだろう。H を通り、直線 OQ の垂直な平面 γ を考えると、γ は正四面体 $OPQR$ の対称面になっており、その交わりは $\triangle PHD$ になっている。更にピラミッド $OABCD$ との交わりが $\triangle HBD$ になっている。平面 γ 上でこの二つの三角形が辺 HD で隣り合っている。折れ線 PHD が実は直線であること、つまり点 H での隣り合う角の和が $180° = \pi$(ラジアン) を示せばよい。これが問題の二つの平面の面角だから。

予断を持つといけないので二つの三角形を少し離して描いておく（図 82 の左図)。$\angle OHD = \varphi, \angle BHD = \psi$ と書くことにするとき、$\varphi + \psi = \pi$ を示せばよい。

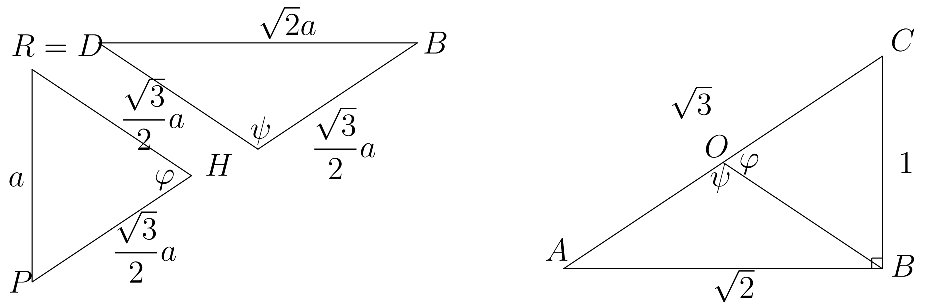


図 82: 面角の計算

図 82 に現れる線分の長さはすべて分かっている。$PD = a, PH = DH = BH = \frac{\sqrt{3}}{2}a, BD = \sqrt{2}a$ である。だから $\triangle DHP$ と $\triangle DHB$ の形が決まってしまうので、$\varphi + \psi = \pi$ はどのようにして示してもよい。

三角関数を使ってみるなら、余弦定理

$$PD^2 = PH^2 + DH^2 - 2PH \times DH \cos\varphi,\ BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH \times DH \cos\psi$$

をそれぞれの三角形に使えばよい。値を入れれば、長さ a は幾つであっても $\cos\varphi = \frac{1}{3} = -\cos\psi$ となる。従って、$\varphi + \psi = \pi$ である。

「従って」という部分を、三角関数を使ったのなら、もっときちんと示せと言うなら次のようにやれば良い。三角形の内角だから、$0 < \varphi, \psi < \pi$ という制限があって、$0 < \sin\varphi, \sin\psi \leq 1$ であるから、このサインの値は等しい。つまり $\cos\varphi + \cos\psi = 0, \sin\varphi = \sin\psi$ であり、ここで加法定理を使えば $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1$ となり、$\varphi + \psi = \pi$ であることが分かる。

三角関数を使うのが嫌なら、図 82 右図に描かれた辺の長さが $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の直角三角形を考えればよい。斜辺 AC の中点を O とし、B と結べば、$OA = OB =$

$OC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり、辺の比が同じだから、問題の三角形と相似になり、$\angle COB=\varphi, \angle AOB=\psi$ となり、元々直線角 $(=180°)=\pi$ を分けただけのものだから、$\varphi+\psi=\pi$ であることが分かる。

この証明だとついでに $\angle PDB=$ 直角 が証明できたことになる。図 82 でなら余り不思議に思わないかも知れないが、図 79 で考えれば妙な感じがしないでもない。

面の一致についてのこの方針 I による証明は確かに立派な証明で、正々堂々正面から障壁をぶち抜いたという感じのする証明ではあるが、無理矢理承服させられたという気もしないではない。線分 OA のところで折れ曲がっていないといってもなんだか偶然で、今にもまた折れそうな気がする人も居るかもしれない。

著者には、以下に述べる方針 II の証明の方が何だか対称性が高そうな、何か偶然の作用があっても大丈夫のような気がするが、どうしてだろうか。それはともかく、方針 II での証明をしよう。

図 79 を見る。$\triangle OAB$ と水平面との面角は $\angle OIJ$ を測ればよい。JI と交線 AB が垂直であることは明らかで、OI と AB が垂直であることは OK が水平面に垂直であることと三垂線の定理による。$\triangle OPQ$ と水平面との面角は $\angle SQR$ を測ればよい。OP の水平性の証明で注意したように、ST も水平面に垂直であるから、SQ, SR が交線 AB に直交している。

ところが $\triangle SQR$ と $\triangle OIJ$ は共に上の方針の証明で使った $\triangle PHD$ と合同な二等辺三角形になる。従って $\angle SQR=\angle OIJ=\angle HPD=\dfrac{\pi-\varphi}{2}$ となって、証明が終わる。

方針 II での証明は面角を定義しようとする精神に近いので安心感がある。この精神を生かせば、一目で了解できるような証明が可能でそれは 6.4 節で述べる。

どの証明も準備ばかり長くて、証明が始まると、途端に終わってしまうのが不満の人もいるかも知れないが、そんなものなのである。概念や感覚をきちんとすることの方が実際の証明よりも大変だし重要なのだ。

この節を終わる前に、面角の定義が 2 平面の交わる度合を表わしていることの意味を納得するための議論をしておく。交わる 2 直線の間の角でさえ定義できるためには多くの対称性に支えられていたのだが、ここではどんな対称性が支配しているのだろうか。

まず、2 平面 α, β の面角 θ が、その定義における交線 ℓ 上の点 O の取り方に依らないだが、これはすぐに分かる。きちんと言うと、交線 ℓ 上にもう一つ点 O' を取って同じ様に垂線 $O'P'$ と $O'Q'$ を引くと、この間の角度がまた θ になるということである (図 83)。

これも厳密に証明しようとすると結構厄介である。感覚的には $\triangle OPQ$ をその面に垂直な方向 (ℓ の方向) にずらしてゆくのだから当たり前のようだが、立体ではきちんと証明できないことは錯覚が起きていないとも言えない。証明した後では当たり前だと言ってもよいが、こんなことを証明しているような本も見当たらな

いので証明を与えておく。

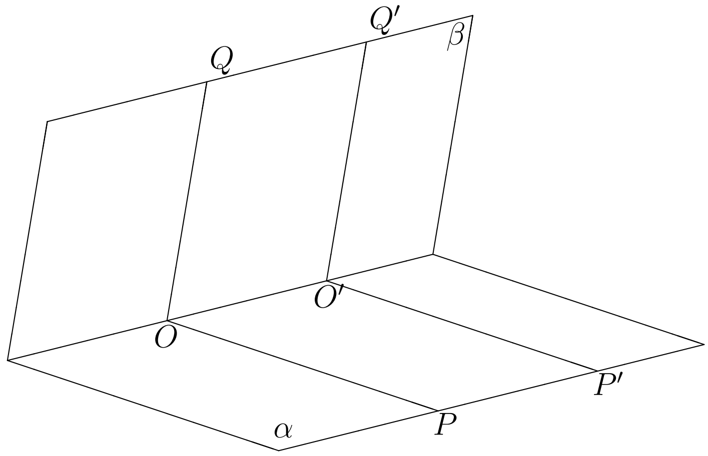


図 83: 面角の値は選ぶ点によらない

OP, OQ が交線 ℓ に垂直なので、OP と OQ の作る平面 γ も直線 ℓ に垂直である。点 P, Q を選び、$OP = O'P', OQ = O'Q'$ であるように点 P', Q' を取れば、四角形 $OO'P'P$ と $OO'Q'Q$ が長方形であることはすぐ分かる。従って、$OO' = PP' = QQ'$ であり、またこの 3 線分が互いに平行であることが分かる。特に PP' は ℓ と平行で、従って PP' は平面 γ に垂直である。それゆえ、平面 γ 上の線分 PQ と PP' は直交し、$\angle P'PQ$ は直角である。

四角形 $PP'Q'Q$ は $PP' = QQ'$ で PP' と QQ' が平行なことから平行四辺形であることは分かっているが、更に一つの内角 $\angle P'PQ$ が直角であることから長方形であることが分かり、$PQ = P'Q'$ となる。

$\triangle OPQ$ と $\triangle O'P'Q'$ は、対応する三辺がそれぞれ等しいので、合同であり、対応する角度も等しい。したがって、$\theta = \angle POQ = \angle P'O'Q' = \theta'$ となって、面角の定義が交線上の点の取り方によらないことが分かった。

さて、面角の定義が何故、交線への 2 垂線間の角度として定義されるのだろうか？その角度は何か特別の意味を持っているのだろうか。

何はともあれ、交線 ℓ 上の点 O を選ぶところまでは良いとしよう。そこで、図 84 のように 2 平面 α と β 上に、点 O から引く半直線 OP, OQ を任意のものとしてみよう。確かにこうすると、$\angle POQ$ はいろいろと変化し、2 平面 α と β だけでは決まらないようだ。

半直線 OP, OQ と交線 ℓ とのなす角をそれぞれ φ, ψ とし、$\angle POQ$ を χ と書くことにする。角 φ, ψ を $0 \leq \varphi, \psi \leq \pi$ の範囲で任意に与えれば、角 χ は一意的に与えられる。関数 $\chi = \chi(\varphi, \psi) = \chi(\varphi, \psi; \theta)$ が与えられた訳である。そして φ, ψ の関数としての χ の特別な値として、面角 θ が与えられないかという問題を考えたい。

2 変数 φ, ψ を勝手に動かすと混乱するので、まず $\varphi\,(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ を固定して、ψ

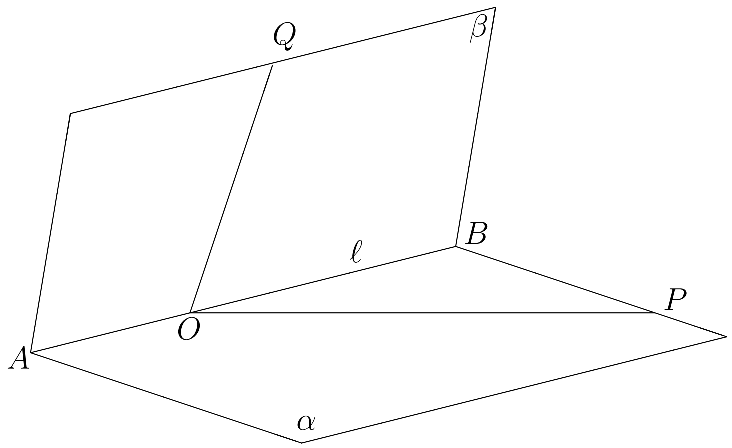


図 84: 交線上の点から 2 平面に半直線を引く

のみの関数としたとき χ がどのような挙動をするかを見てみよう。図形的に言えば、OP だけは任意に引いたものとし、OQ を動かして角度 $\angle POQ$ がどう変化するかを見てみることである（図 85）。

最初に指定する半直線 OP において、OP と ℓ のなす角は 0 から直角までとしてもよい（対称性の議論から）。$OP = a$ とする。$\angle POQ$ が一定であるような半直線 OQ を動かしてみると、O を頂点とし、OP を中心軸とする円錐となる。O を頂点とし、OP を中心軸とする円錐と平面 β との交わりは、2 本の半直線か、1 本の半直線か、頂点 O だけかの 3 つの場合に分けられる。そうすると平面 β 上の半直線 OQ で $\chi = \angle POQ$ が最も小さいものは、この円錐が β に接するときの接線になることが分かる。この接線である円錐の母線を OQ とする。

この最小値 χ を φ, θ の関数として表わしてみよう。

図 86 を見てみよう。P から平面 β に垂線を下ろせば、平面 β は母線 OQ での円錐の接平面だから、その足 K は半直線 OQ の上に乗ることになる。

P から ℓ に下ろした垂線の足と K から ℓ に下ろした垂線の足は一致し、それを H と書くことにする (三垂線の定理による)。

角の大きさに対する記号を次のように確定しておこう。

$\angle POB = \varphi(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}), \angle QOB = \psi, \angle POQ = \chi, \angle PHK = \theta,\ 0 \leq \psi, \chi, \theta \leq \pi$

$\angle OKP = \angle OHP = \angle OHK = \angle PKH = \frac{\pi}{2}$

これを用いて、分かっている辺と角の関係を 3 つの直角三角形について挙げてみると、

$\triangle OPK$ では、$PK = OP \sin\chi = a \sin\chi, OK = OP \cos\chi = a \cos\chi$、

$\triangle OPH$ では、$OH = OP \cos\varphi = a \cos\varphi, PH = OP \sin\varphi = a \sin\varphi$、

$\triangle OHK$ では、$OH = OK \cos\psi = a \cos\psi \cos\chi, KH = OK \sin\psi = a \sin\psi \cos\chi$

となる。まず、 OH の二つの表現から $\cos\varphi = \cos\psi \cos\chi = a^{-1}OH$ が分かる。

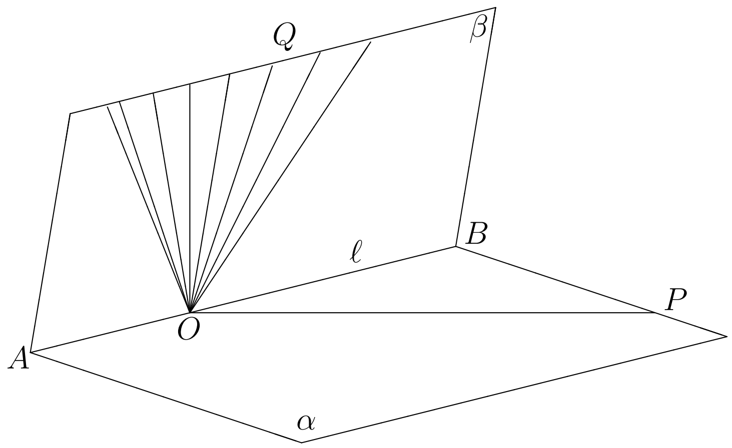


図 85: 多くの半直線のどれにすべきか？

$\triangle PHK$ で $\angle PHK = \theta$ で余弦定理 $PK^2 = PH^2 + KH^2 - 2PH \cdot KH \cos\theta$ に分かっているものを代入して、a^2 を消去すると、

$$\sin^2\chi = \sin^2\varphi + \sin^2\psi\cos^2\chi - 2\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\cos\theta$$

となる。$\cos\varphi = \cos\psi\cos\chi$ を代入すると、

$$1 - \cos^2\chi = 1 - \cos^2\chi\cos^2\psi + \cos^2\chi\sin^2\psi - 2\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\cos\theta$$

となり、移項して整理すれば

$$2\sin\varphi\sin\psi\cos\chi\cos\theta = \cos^2\chi(1 + \sin^2\psi - \cos^2\psi) = 2\cos^2\chi\sin^2\psi$$

となる。円錐が接するという状況では ($\theta \neq \frac{\pi}{2}$ なら) $\cos\chi\sin\psi \neq 0$ だから

$$\sin\varphi\cos\theta = \cos\chi\sin\psi$$

となる（$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときでも成り立つ）。二乗すれば

$$\sin^2\varphi\cos^2\theta = \cos^2\chi\sin^2\psi = \cos^2\chi - \cos^2\chi\cos^2\psi = \cos^2\chi - \cos^2\varphi$$

となる。移項すれば、

$$\cos^2\chi = \sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi\sin^2\theta$$

となり、従って

$$\chi = \cos^{-1}\sqrt{1 - \sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

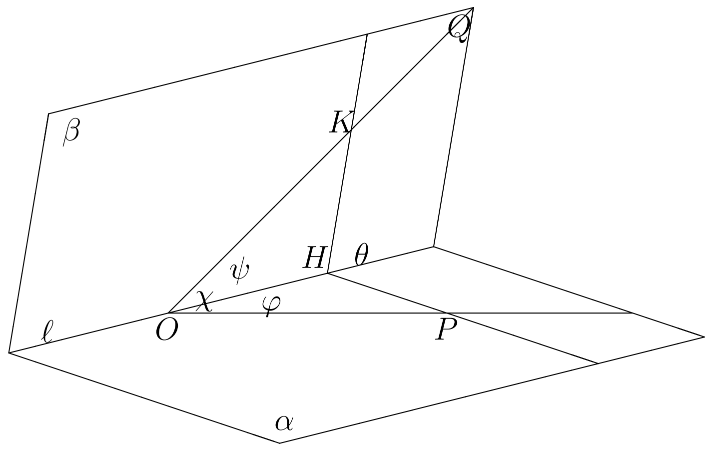


図 86: φ を与えたとき、ψ の関数としての χ を求める

となる。

ここで φ を動かしていくと、χ の値がどうなるかを見てみよう。$\varphi = 0$ のとき $\chi = \cos^{-1} 1 = 0$ であり、$\varphi = \frac{\pi}{2}$ のとき $\chi = \cos^{-1}(1-\sin^2\theta) = \theta$ となる。$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、$\sin\varphi$ は単調増大だから、$\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}$ は単調減少で、従って χ は φ の単調増加関数である。

特に二つの面 α と β が直交しているとき、$\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入してみると、$\chi = \varphi$ ($\cos\psi = 1$ ゆえ $\psi = 0$) となり、任意の半直線 OP を中心軸とする円錐で平面 β と接するものの接線は二つの平面の交線 ℓ になることになる。

こうして、$\chi(\varphi,\psi)$ は、φ を止めたときの ψ に関する最小値の、φ を動かした最大値が存在して θ となり、それは $\varphi = \frac{\pi}{2}$ であるときである。また、$\cos\varphi = \cos\psi\cos\chi$ であることから、$\chi \neq \frac{\pi}{2}$ ならば $\psi = \frac{\pi}{2}$ ということになり、面角の定義そのものとなっている。

面角の定義は**ミニマックス原理**に基づいていたということになる。

6.4　一目で分かる証明（手品のような手つきで）

図 79 で $\triangle OPQ$ と $\triangle OAB$ が同じ平面を与えることが問題だったが、前節 6.3 の証明の方針 II の精神を生かせば、図 79 でピラミッド $OABCD$ の $\triangle OBC$ の反対側に正四面体 $OPQR$ をあてがい、その反対側にまたピラミッド $OABCD$ を差込むというような操作をすることが出来ることが分かる。

これを無限に続けると $\triangle OIJ$ を底面とする無限に長い直三角柱が出来る。この直三角柱を先に考え、順に正四面体とピラミッドで分割していくことを考えれば、$\triangle OPQ$ と $\triangle OAB$ が同じ平面を与えることは自明のことになってしまう。

二つの同じピラミッド $OABCD$, $O'A'B'C'D'$ を用意し、底面を同じ水平面上に起き、辺 BC を辺 $A'D'$ と合わせると次の図 87 になる。

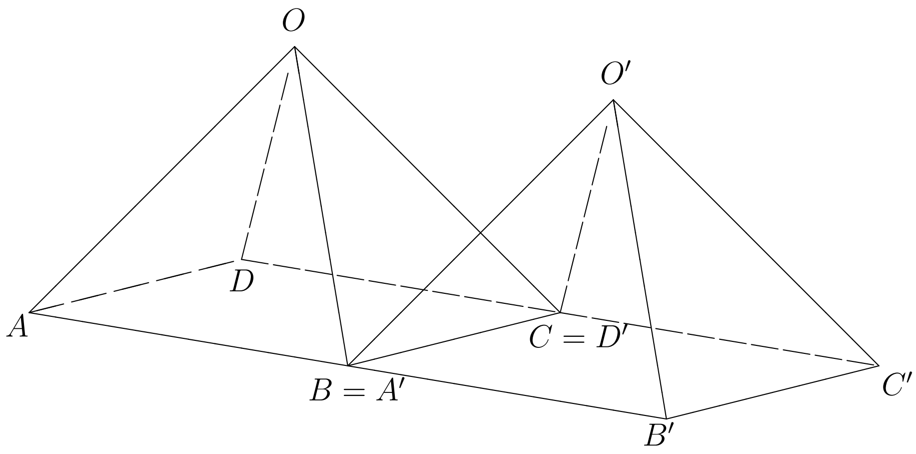


図 87: ピラミッドを二つ並べる

$\triangle OAB$ と $\triangle O'A'B'$ が同じ平面をなすことは明らかである。反対側の $\triangle OCD$ と $\triangle O'C'D'$ も同様である。辺 $BC = A'D'$ の上方の空間を考え、$\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ の二つの平面を延長したもので囲まれた領域を考えよう。これが四面体になることは明らかで、この四面体 $OO'BC$ のすべての辺は問題としている正三角形の１辺なのだからすべて等しく、従ってすべての側面は合同な正三角形であり、それゆえ四面体 $OO'BC$ は正四面体である。

こう表わしたなら、$\triangle OO'B$ が $\triangle OAB$ と同じ平面であることは明らかである。

証明もこれで充分厳密である。実に鮮やかな証明であるが、気がつくかどうかだけと言うことも出来る。実物模型を作れば同じ平面であることが分かるけれど、それよりも納得が得られたのではないだろうか。この証明は、事実に対する不信感がある間は決して発見されないだろうが、事実を信じてもよいような気がした瞬間からなら何時思い付いても不思議はない。

しかし、実際に模型を作ったのなら更に印象的に見せる方法もあって、それにはこのことを更に強調するという手法を取ればよい。模型を出来れば５組みくらい作って、まずピラミッドだけ１列に並べる。そして、正四面体は全て手にもって、

パタパタパタと１つずつ落しながら一気に隙間を埋めていき、直三角柱が得られたような気分にさせるのである。

手際よく、手品のような手つきでやるとよい。成功すれば、観客のどよめきが聞こえてくるだろう。

もう一つ面白い方法がある。ピラミッド $OABCD$ の各辺の中点と底辺の正方形の中心に図 88 のように名前を付けてみる。すると、ピラミッド $OABCD$ と相似で相似比が $\frac{1}{2}$ のピラミッドが６つ得られていることに気付くだろう。$OEFGH, EAJPI, FJBKP, GPKCL,$ とである。ピラミッド $OABCD$ からこれらを除いた空間が、丁度４つの正四面体 $EFJP, FGKP, GHPL, HEIP$ で満たされていることが分かる。

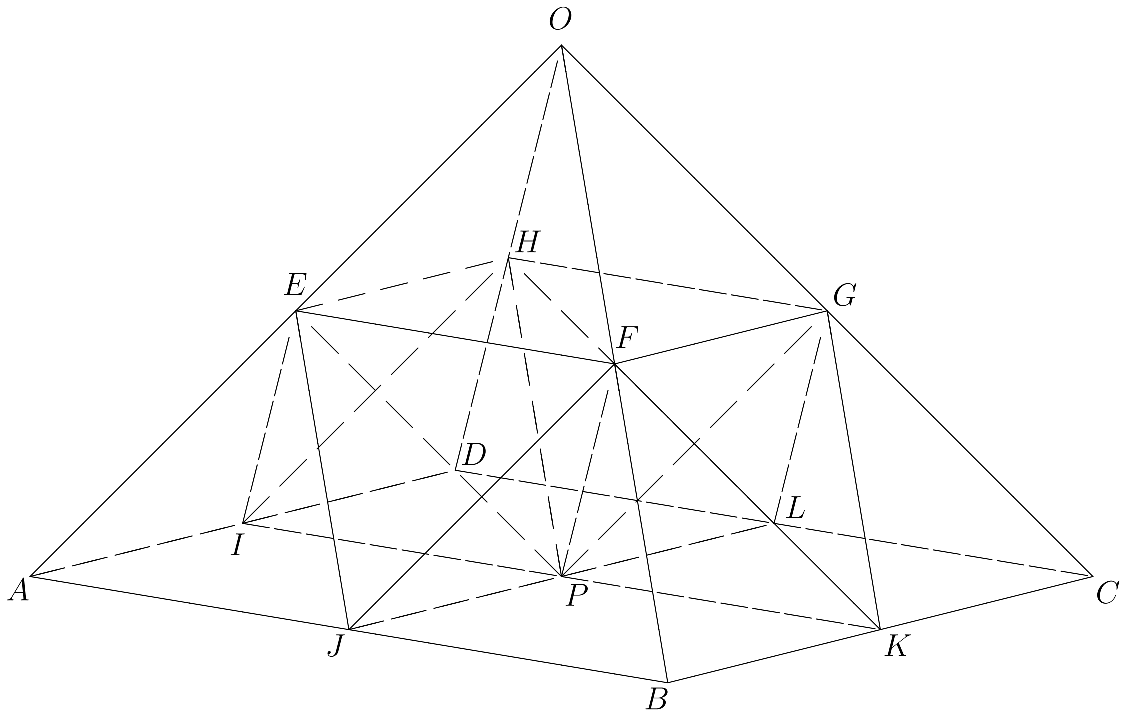


図 88: 辺の長さ半分のピラミッドと正四面体でピラミッドを分割する

これがもう一つの証明になっている。つまり例えば、正四面体 $EFJP$ の面 $\triangle EFJ$ とピラミッド $FJBKP$ の面 $\triangle FJB$ が同じ平面であるのは、元のピラミッド $OABCD$ の面 $\triangle OAB$ の一部であることから明らかである。

これも手順と手つきさえ良ければ拍手が起こる演技になるかも知れない。手順 I。ピラミッド４つを４角に並べ、ピラミッド２つの底面を合わせてダイヤモンドの形にしてそっと上から差込むと、４つの側面に４つの隙間が出来る。この隙間に、正四面体を図 79 の左図のように立ててはめ込めば、大きなピラミッドが出来る。

手順 II。ピラミッド４つを４角に並べ、隣り合ったピラミッドの間に４つの正四面体を落としこむと、真ん中に凹みが出来、これにピラミッドを上下反対にし

て差込むとぴったり填まり高台が出来る。この上にピラミッドをちょんと載せれば、大きなピラミッドが出来る。

どちらの手順が劇的か分からない。案外進行に合わせたお喋りの方が受けには効果があるかも知れない。

ところで、この証明には一寸した副産物がある。同じ長さの辺を持つ正四面体とピラミッドの体積の比は $1:2$ であることが分かるのである。

証明は次のようにやれば良い。a をピラミッド $OEFGH$ の体積とすると、相似比が $1:2$ だからピラミッド $OABCD$ の体積は $2^3a=8a$ である。b を正四面体 $EFJP$ の体積とすると、ピラミッド $OABCD$ がピラミッド $OEFGH$ と合同なもの６つと正四面体 $EFJP$ と合同なもの４つに分けられるのだから、$8a=6a+4b$、即ち $a=2b$ となる。同じ長さの辺を持つ正四面体とピラミッドの体積の比が $1:2$ であることが分かる。

さらに錐の体積が柱の体積の３分の１であることも示すことが出来る。まず底面が正方形の場合に示そう。正方形 $EFGH$ を底面とするピラミッド $PEFGH$ は正四角錐であり、同じ底面で同じ高さの正四角柱をピラミッド $OABCD$ の内部に考え、Y と呼ぼう (図 89)。この正四角柱 Y のもう一つの底面である正方形の頂点は、正方形 $AJPI, JBKP, PKCL, IPLD$ の中心になる。Y とピラミッド $EAJPI$ との交わりはピラミッド $EAJPI$ の４分の１であり、Y と正四面体 $EFPJ$ との交わりは正四面体 $EFPJ$ の２分の１である。[37]従って、正四角柱 Y の体積は $a+\frac{4}{4}a+\frac{4}{2}b=2a+2b=3a$ である。

これで正四角柱 $EFGHQRST$ の体積が、正四角錐 $PEFGH$ の体積の３分の１であることが分かった。更に $\triangle ODB$ でピラミッド $OABCD$ を切り分ければ、三角形 $\triangle EFH$ を底面とする三角柱 $EFHQRT$ の体積が三角錐 $PEFH$ の体積の３分の１であることが分かる。

あとは $\triangle EFH$ で底辺 EF を固定して頂点 H を直線 HG 上を動かして全体をずらしてやれば、一般の三角形を底面にしている場合にも示されていることを納得してもらうことは出来よう。一般の三角形を底面にする場合が納得できれば、一般の多角形を底面にする場合も納得できるだろう。

6.5 直観力の養成

「直観は教えられるか？」「教えられない直観力を指導できるか？」という疑問は、そのままでは No と答えるほかないだろう。しかし「直観力とは何か」ということをもう一度考えてみよう。直観力が優れているとはどういう状態を指しているのか。直観力が強く働いているとはどんなことを意味するのか。

幾何的直観については 2.2 節で補助線を引くことを例にとって考えてみた。ここでは推理小説で、エルキュール・ポアロや浅見光彦のような名探偵[38]が謎を解いて

[37]分かりにくい人は、ピラミッド $OABCD$ を $\triangle OIK$ と $\triangle OJL$ で切ってみればよい。

[38]ポアロはアガサ・クリスティーの、浅見光彦は内田康夫の小説の主人公

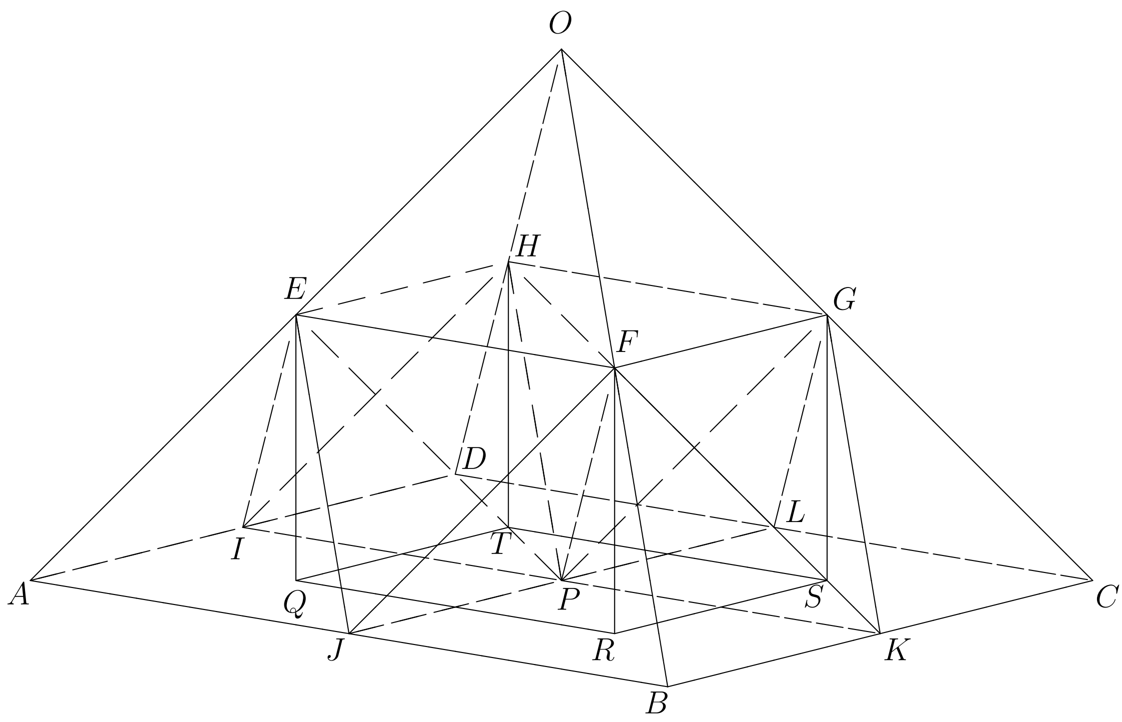


図 89: 正四角柱の体積をピラミッドと正四面体の体積で表わす

いく様子を思い起こしてみよう。勿論データなしでは何も判らないからある程度のデータは要求するが、後は灰色の脳細胞が働くに任せたり、証拠が示すことより勘の働きを重視する。細々した証拠を重視せず、偏見（思い込み）に囚われないで思索するようだ。大きなジグソーパズルを考えるように、白紙の部分はあっても構わないが、全体的なテーマにあわない解決は採らない。グローバルな視点を大切にすると同時に、非常に緻密な考証をする。

そして何より大切なのは作業仮設をを立てることを厭わないことである。何度も何度も仮設を立て、事実と反するものは捨て、全体の図柄に反するものは如何に正しそうに思えても疑問符を付けたまま保留しておく。筆者なら最初から捨てると思うような仮設も丹念に検証していく。

ポアロの場合は特に、無駄なような仮設もすべて検証していき、真に残った仮設が如何に信じにくくとも真実であると行った推論のスタイルを採る。このような推論の場合は考慮した作業仮設が何等かの意味ですべてを尽くしていることが必要で、実際の小説では時折御都合主義的な場合も見られるが、天才のひらめきと言うより額ににじむエジソンの汗を感じてしまう。

しかし、これこそがやはり、直観力の働く有り様であろう。全体的な構造への洞察力に裏打ちされた、多数の作業仮設を立て検証することの出来る能力が、優れた直観力の持ち主の条件ではないだろうか。

従って、対象とする事柄への全体的な洞察力を増すこと、対象となる事柄にお

いて起こりうるモデルを沢山知っていること、モデルの適否を判定する感性を磨くことが直観力の養成ということになるのだろう。

参考文献

[1] アーサー・C・クラーク「グランド・バンクスの幻影」(Arthur C.Clarke: The Ghost of the Grand Banks,1990)、山高昭訳、早川書房、１９９２年

[2] 蟹江幸博・奥招、児童・生徒の直観的能力に関する研究 (I)-直観的能力は指導によって向上するか、その可能性について-、三重大学教育学部研究紀要、第44 巻、教育科学、(1992),17-49.

[3] 岩堀長慶「合同変換群の話　幾何学の形での群論演習」現代数学社,1974 年１０月

[4] ヘルマン・ワイル「シンメトリー　美と生命の文法」(Hermann Weyl: **Symmetry**,Princeton University Press,1952)、遠山啓訳、紀伊國屋書店、1957 年12 月

目 次

図 目 次